

РАСЧЕТ ДОСТОВЕРНОСТИ ГРАНИЧНОГО КОНТРОЛЯ ПРИ НЕКОТОРЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОВЕРЯЕМОГО ПАРАМЕТРА И ПОГРЕШНОСТИ КОНТРОЛЬНОЙ АППАРАТУРЫ

Н. П. ФЕФЕЛОВ

(Представлена научным семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

В [1] выведены общие формулы для расчета вероятностей результатов граничного контроля в случае, когда проверяемый параметр ограничен только с одной стороны. В настоящей работе они рассмотрены для наиболее часто встречающихся законов распределения контролируемого параметра и погрешности проверочного устройства.

Случай равномерных законов распределения

Рассмотрим вероятности результатов контроля при равномерных законах распределения X и Y . Хотя этот вид законов практически почти не встречается, он представляет интерес потому, что погрешность, распределенная по равномерному закону, обладает наиболее «разрушительными» свойствами. При этом достоверность контроля получается наименьшей по сравнению с другими законами распределения.

Пусть проверяемый параметр распределен равномерно на отрезке $x_{\min} \div x_{\max}$ шириной L (рис. 1).

$$f(x) = \begin{cases} 0, & X \leq x_{\min}, \\ \frac{1}{L}, & x_{\min} < X \leq x_{\max}, \\ 0, & X > x_{\max}. \end{cases}$$

Проверяемое устройство считается исправным, если X лежит в интервале $X_0 \div X_{\max}$. Вероятность этого события до контроля $P_n = \frac{X_{\max} - X_0}{L}$. Устройство проверки выдает случайный контрольный сигнал Y , который распределен равномерно на отрезке $u_{\min} \div u_{\max}$ шириной 2γ (рис. 1), т. е.

$$f(y) = \begin{cases} 0 & Y \leq u_{\min}, \\ \frac{1}{2\gamma} & u_{\min} < Y \leq u_{\max}, \\ 0 & Y > u_{\max}. \end{cases} \quad (2)$$

Условные плотности распределения параметра X после проверки для равномерных законов имеют вид:

$$f(x|Z > 0) = \begin{cases} 0, & X \leq x_0 - \gamma, \\ \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{X - x_0 + \gamma}{x_{\max} - x_0}, & x_0 - \gamma < X \leq x_0 + \gamma, \\ \frac{1}{x_{\max} - x_0}, & x_0 + \gamma < X \leq x_{\max}, \\ 0, & X > x_{\max}. \end{cases} \quad (3)$$

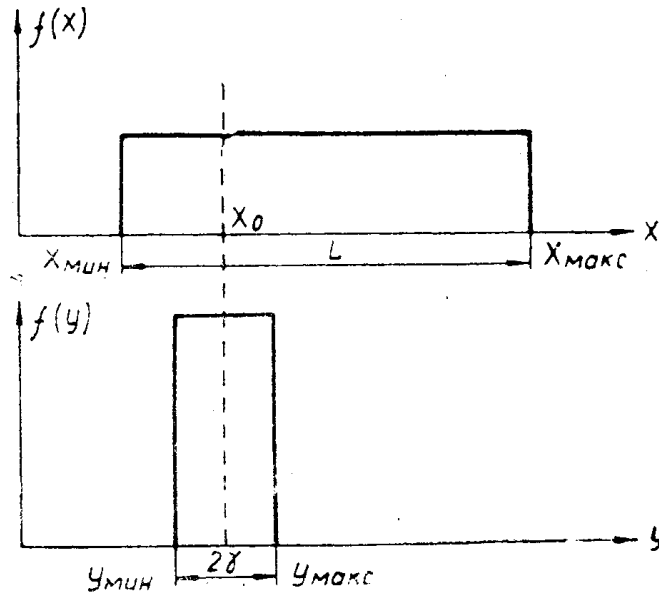


Рис. 1

$$f(x|Z < 0) = \begin{cases} 0, & X \leq x_{\min}, \\ \frac{1}{x_0 - x_{\min}}, & x_{\min} < X \leq x_0 - \gamma, \\ \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{x_0 + \gamma - X}{x_0 - x_{\min}}, & x_0 - \gamma < X \leq x_0 + \gamma, \\ 0, & X > x_0 + \gamma, \end{cases} \quad (4)$$

Интегрируя (3) и (4), получаем вероятности результатов контроля:

- а) $P_{\text{он}} = P(X > x_0 | Z > 0) = 1 - \frac{\gamma}{4(x_{\max} - x_0)}$ — обнаруженная неисправность;
- б) $P_{\text{нд}} = P(X < x_0 | Z > 0) = \frac{\gamma}{4(x_{\max} - x_0)}$ — необнаруженный дефект;
- в) $P_{\text{ло}} = P(X > x_0 | Z < 0) = \frac{\gamma}{4(x_0 - x_{\min})}$ — ложный отказ;
- г) $P_{\text{од}} = P(X < x_0 | Z < 0) = 1 - \frac{\gamma}{4(x_0 - x_{\min})}$ — обнаруженный дефект.

На рис. 2 показаны графики построения по формулам 5(а) и 5(б). По оси абсцисс отложены значения P_H . Параметром кривых является относительная ширина распределения контрольного сигнала

$$\delta = \frac{\gamma}{L}$$

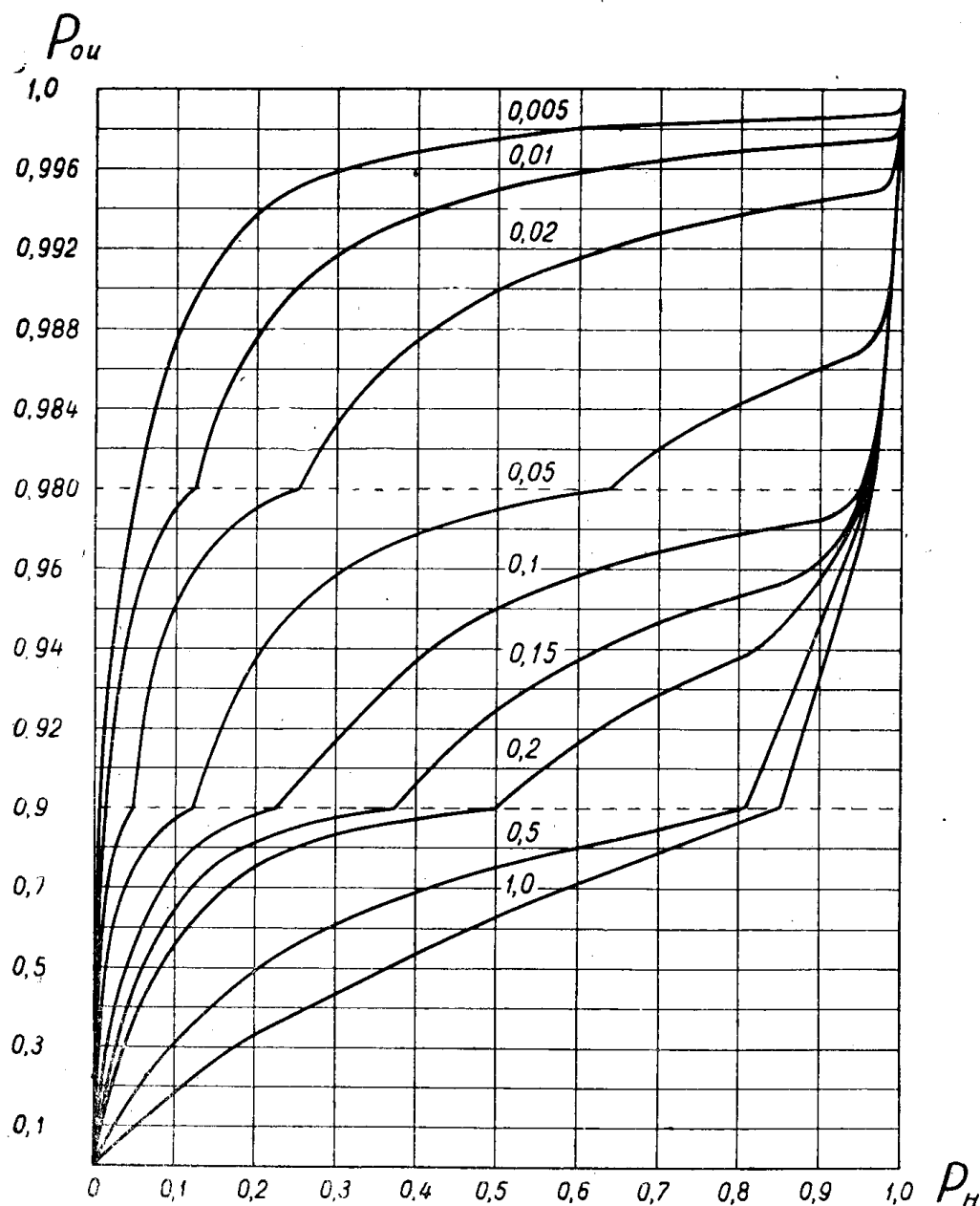


Рис. 2

Графики для вероятностей обнаруженного дефекта и ложного отказа имеют аналогичный вид, их можно получить, заменив обозначения P_H на $1 - P_H$, P_{oi} на $P_{ол}$ и $P_{нд}$ на $P_{ло}$.

Задаваясь величиной P_{oi} (или любой другой) и зная P_H , можно по графику определить δ , следовательно, и допустимую погрешность проверочной аппаратуры.

Случай, когда проверяемый параметр имеет равномерный закон распределения, а погрешность контролирующего устройства распределена по нормальному закону

Пусть X имеет плотность распределения вида (1), а контрольный сигнал Y имеет нормальный закон распределения

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp \left[-\frac{(y-x_0)^2}{2\sigma_y^2} \right]. \quad (6)$$

Для этого случая выражения (5) [1] приобретают вид:

$$P_{он} = \frac{P_n + P_n \Phi \left(\frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) -}{1 + P_n \Phi \left(\frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) - (1 - P_n) \Phi \left(\frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] \right\}}{+\sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \left\{ \exp \left[-\left(\frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] - \exp \left[-\left(\frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] \right\}}, \quad (7)$$

$$P_{нд} = 1 - P_{он},$$

$$P_{од} = \frac{(1 - P_n) + (1 - P_n) \Phi \left(\frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) -}{1 - P_n \Phi \left(\frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) + (1 - P_n) \Phi \left(\frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] \right\}}{+\sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \left\{ \exp \left[-\left(\frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] - \exp \left[-\left(\frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] \right\}},$$

$$P_{ло} = 1 - P_{од},$$

где $P_n = \frac{x_{\max} - x_0}{L}$ — начальная (до контроля) вероятность исправной работы по параметру X ;

$\delta = \frac{\sigma_y}{L}$ — относительное среднее квадратичное отклонение контрольного сигнала Y ;

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp[-t^2] dt \text{ — функция Лапласа.}$$

Функция Лапласа и $\exp[-t^2]$ асимптотически быстро приближаются к постоянным величинам, поэтому формулы (7) можно упростить:

$$P_{он} = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{2\pi} P_n},$$

$$P_{нд} = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi} P_n},$$

$$P_{од} = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}(1 - P_n)}; \quad (8)$$

$$P_{ло} = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}(1 - P_n)}$$

Упрощенные формулы дают четыре верных знака после запятой при $\frac{P_n}{\delta} > 4,25$ и пять верных знаков при $\frac{P_n}{\delta} > 4,8$.

На рис. 3 представлены графики для $P_{он}$ и $P_{нд}$. Чтобы графики на рис. 2 и 3 можно было сравнить между собой, величина параметра

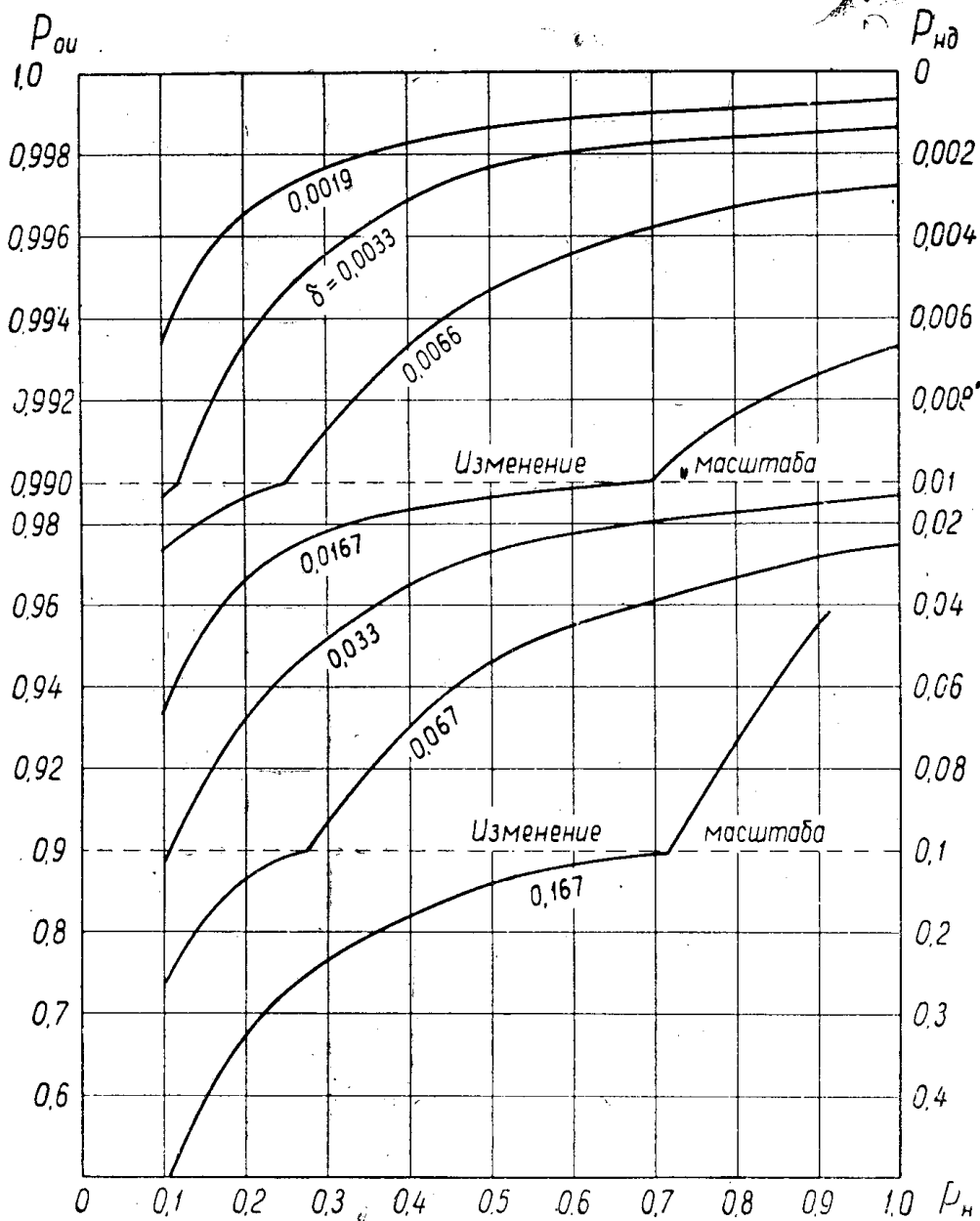


Рис. 3

ра δ выбрана из соотношения $3\sigma_y = \gamma$, с тем, чтобы ширина распределения контрольного сигнала была равна ширине его при

равномерном законе. Это соответствует одинаковой величине погрешности измерительной аппаратуры при равномерном и нормальном законах распределения.

Вероятности результатов контроля при нормальных законах

Рассмотрим теперь случай, когда проверяемый параметр и контрольный сигнал имеют нормальные законы распределения.

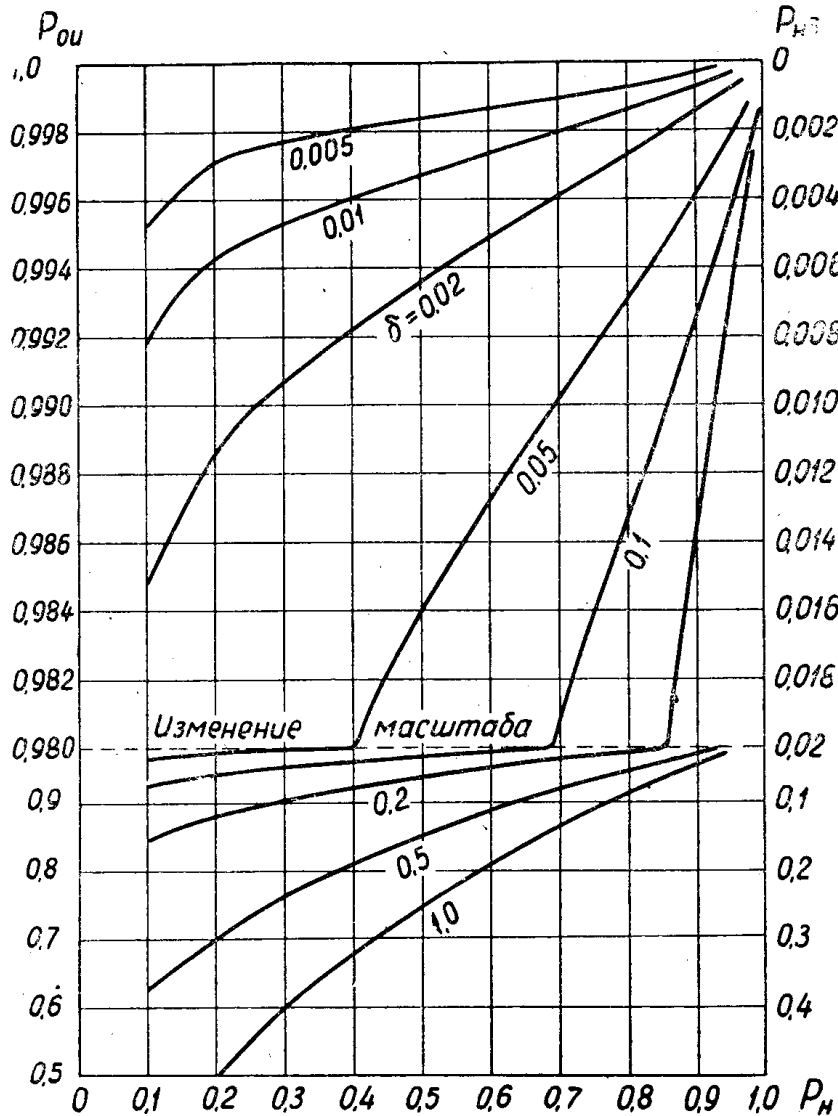


Рис. 4

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[-\left(\frac{x - m_x}{\sqrt{2}\sigma_x} \right)^2 \right], \quad (9)$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp \left[-\left(\frac{y - x_0}{\sqrt{2}\sigma_y} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

В случае нормальных законов вероятности результатов контроля лучше всего подсчитывать как условные вероятности по общим формулам [1]. Так, например, вероятность исправной

работы ($X > x_0$) при условии получения положительного исхода контроля ($Z > 0$) будет равна:

$$P(X > x_0 | Z > 0) = \frac{\int_{x_0}^{\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[-\left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2 - \left(\frac{y-x_0}{\sqrt{2}\sigma_y}\right)^2 \right] dy dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[-\left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2 - \left(\frac{y-x_0}{\sqrt{2}\sigma_y}\right)^2 \right] dy dx}$$

Интегралы этого выражения нельзя вычислить обычными приемами. Однако имеются таблицы [2], в которых табулированы интегралы от двумерной нормальной плотности. Таблицы позволяют численно рассчитывать условные вероятности результатов контроля. Заметим, что знаменатель представляет собой веро-

ятность
$$P(Z > 0) = \int_0^{\infty} f(z) dz.$$

Закон распределения Z есть композиция нормальных законов распределения случайных величин X и Y . В этом случае закон распределения Z также нормальный [3]:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp \left[-\left(\frac{z-Lm_z}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)^2 \right],$$

где $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$, $m_z = m_x - m_y = m_x - x_0$.

Это позволяет упростить выражения для результатов контроля. К аналогичному виду можно привести формулы для вероятностей других результатов контроля. Вероятности были вычислены по таблицам [2], по результатам построены графики (рис. 4). Параметром кривых является отношение средних квадратичных отклонений величин Y и X , т. е.

$$\delta = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Все замечания, сделанные к графикам рис. 2 и 3, справедливы для рис. 4 на стр. 34.

Использование полученных результатов в практике

Задача о достоверности контроля в зависимости от конкретных условий может быть рассмотрена с двух сторон:

1) задана плотность распределения параметра $f(x)$ и вероятность исправной работы устройства до контроля P_n , а также закон распределения погрешности контрольной аппаратуры; необходимо определить вероятности результатов контроля, в особенности вероятность исправной работы после контроля;

2) задана вероятность исправной работы устройства после контроля $P_{он}$ по параметру X , и известен его закон распределения; необходимо определить максимально допустимую погрешность контрольной аппаратуры, которая обеспечивает необходимую величину $P_{он}$.

Приведенные графики позволяют легко решить поставленные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Ф е ф е л о в. Достоверность граничного контроля при одностороннем ограничении проверяемого параметра (в настоящем сборнике).
2. Н. В. Смирнов, А. Н. Большев. Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения, АН СССР, 1962.
3. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей, Физматгиз, 1962.