

## РАСЧЕТ ДОСТОВЕРНОСТИ ГРАНИЧНОГО КОНТРОЛЯ ПРИ НЕКОТОРЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОВЕРЯЕМОГО ПАРАМЕТРА И ПОГРЕШНОСТИ КОНТРОЛЬНОЙ АППАРАТУРЫ

Н. П. ФЕФЕЛОВ

(Представлена научным семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

В [1] выведены общие формулы для расчета вероятностей результатов граничного контроля в случае, когда проверяемый параметр ограничен только с одной стороны. В настоящей работе они рассмотрены для наиболее часто встречающихся законов распределения контролируемого параметра и погрешности проверочного устройства.

### Случай равномерных законов распределения

Рассмотрим вероятности результатов контроля при равномерных законах распределения  $X$  и  $Y$ . Хотя этот вид законов практически почти не встречается, он представляет интерес потому, что погрешность, распределенная по равномерному закону, обладает наиболее «разрушительными» свойствами. При этом достоверность контроля получается наименьшей по сравнению с другими законами распределения.

Пусть проверяемый параметр распределен равномерно на отрезке  $x_{\min} \div x_{\max}$  шириной  $L$  (рис. 1).

$$f(x) = \begin{cases} 0, & X \leq x_{\min}, \\ \frac{1}{L}, & x_{\min} < X \leq x_{\max}, \\ 0, & X > x_{\max}. \end{cases}$$

Проверяемое устройство считается исправным, если  $X$  лежит в интервале  $X_0 \div X_{\max}$ . Вероятность этого события до контроля  $P_n = \frac{X_{\max} - X_0}{L}$ . Устройство проверки выдает случайный контрольный сигнал  $Y$ , который распределен равномерно на отрезке  $u_{\min} \div u_{\max}$  шириной  $2\gamma$  (рис. 1), т. е.

$$f(y) = \begin{cases} 0 & Y \leq u_{\min}, \\ \frac{1}{2\gamma} & u_{\min} < Y \leq u_{\max}, \\ 0 & Y > u_{\max}. \end{cases} \quad (2)$$

Условные плотности распределения параметра  $X$  после проверки для равномерных законов имеют вид:

$$f(x|Z > 0) = \begin{cases} 0, & X \leq x_0 - \gamma, \\ \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{X - x_0 + \gamma}{x_{\max} - x_0}, & x_0 - \gamma < X \leq x_0 + \gamma, \\ \frac{1}{x_{\max} - x_0}, & x_0 + \gamma < X \leq x_{\max}, \\ 0, & X > x_{\max}. \end{cases} \quad (3)$$

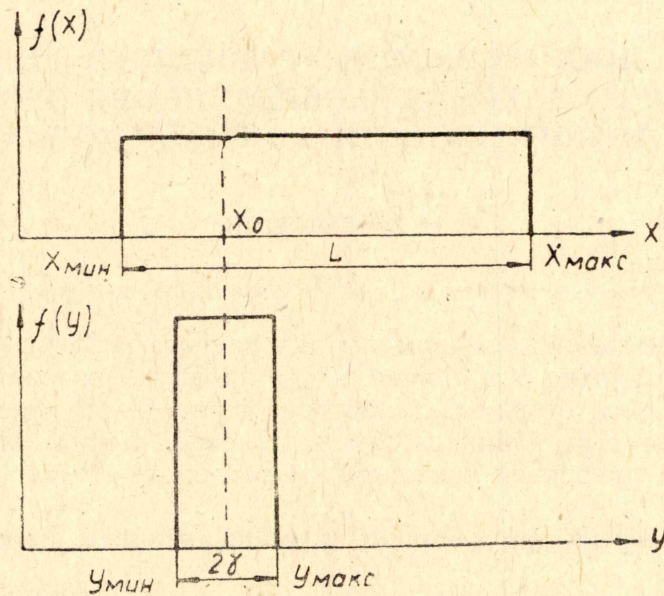


Рис. 1

$$f(x|Z < 0) = \begin{cases} 0, & X \leq x_{\min}, \\ \frac{1}{x_0 - x_{\min}}, & x_{\min} < X \leq x_0 - \gamma, \\ \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{x_0 + \gamma - X}{x_0 - x_{\min}}, & x_0 - \gamma < X \leq x_0 + \gamma, \\ 0, & X > x_0 + \gamma, \end{cases} \quad (4)$$

Интегрируя (3) и (4), получаем вероятности результатов контроля:

а)  $P_{\text{он}} = P(X > x_0 | Z > 0) = 1 - \frac{\gamma}{4(x_{\max} - x_0)}$  — обнаруженная неисправность;

б)  $P_{\text{нд}} = P(X < x_0 | Z > 0) = \frac{\gamma}{4(x_{\max} - x_0)}$  — необнаруженный дефект; (5)

в)  $P_{\text{ло}} = P(X > x_0 | Z < 0) = \frac{\gamma}{4(x_0 - x_{\min})}$  — ложный отказ;

г)  $P_{\text{од}} = P(X < x_0 | Z < 0) = 1 - \frac{\gamma}{4(x_0 - x_{\min})}$  — обнаруженный дефект.

На рис. 2 показаны графики построения по формулам 5 (а) и 5 (б). По оси абсцисс отложены значения  $P_n$ . Параметром кривых является относительная ширина распределения контрольного сигнала

$$\delta = \frac{\gamma}{L}$$

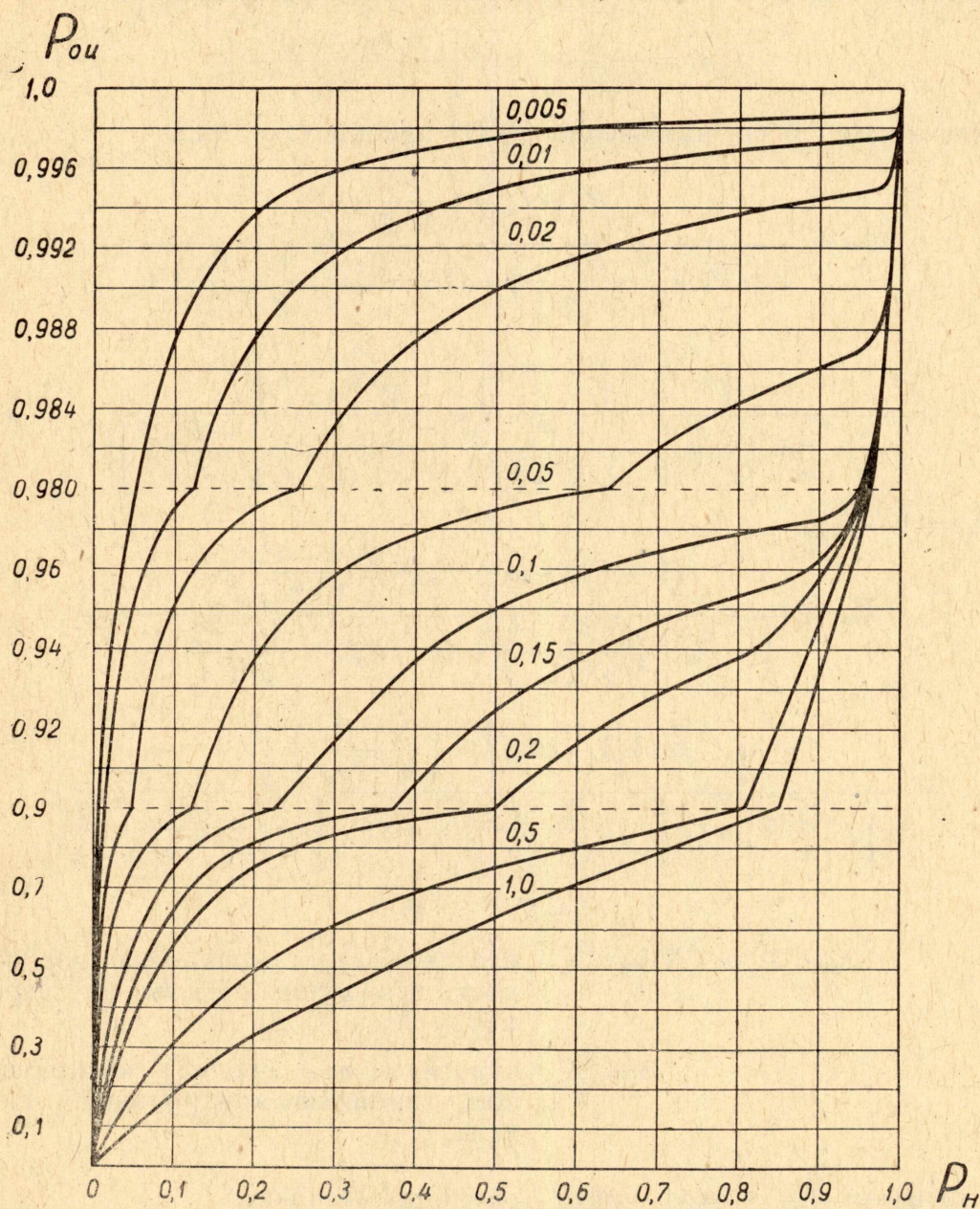


Рис. 2

Графики для вероятностей обнаруженного дефекта и ложного отказа имеют аналогичный вид, их можно получить, заменив обозначения  $P_n$  на  $1 - P_n$ ,  $P_{oi}$  на  $P_{од}$  и  $P_{нд}$  на  $P_{ло}$ .

Задаваясь величиной  $P_{oi}$  (или любой другой) и зная  $P_n$ , можно по графику определить  $\delta$ , следовательно, и допустимую погрешность проверочной аппаратуры.

**Случай, когда проверяемый параметр имеет равномерный закон распределения, а погрешность контролирующего устройства распределена по нормальному закону**

Пусть  $X$  имеет плотность распределения вида (1), а контрольный сигнал  $Y$  имеет нормальный закон распределения

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp \left[ -\frac{(y-x_0)^2}{2\sigma_y^2} \right]. \quad (6)$$

Для этого случая выражения (5) [1] приобретают вид:

$$P_{он} = \frac{P_n + P_n \Phi \left( \frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) -}{1 + P_n \Phi \left( \frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) - (1 - P_n) \Phi \left( \frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \left\{ 1 - \exp \left[ -\left( \frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] \right\}}{+\sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \left\{ \exp \left[ -\left( \frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] - \exp \left[ -\left( \frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] \right\}}, \quad (7)$$

$$P_{нд} = 1 - P_{он},$$

$$P_{од} = \frac{(1 - P_n) + (1 - P_n) \Phi \left( \frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) -}{1 - P_n \Phi \left( \frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) + (1 - P_n) \Phi \left( \frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \left\{ 1 - \exp \left[ -\left( \frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] \right\}}{+\sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \left\{ \exp \left[ -\left( \frac{1 - P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] - \exp \left[ -\left( \frac{P_n}{\sqrt{2} \sigma_y} \right)^2 \right] \right\}},$$

$$P_{ло} = 1 - P_{од},$$

где  $P_n = \frac{x_{\max} - x_0}{L}$  — начальная (до контроля) вероятность исправной работы по параметру  $X$ ;

$\delta = \frac{\sigma_y}{L}$  — относительное среднее квадратичное отклонение контрольного сигнала  $Y$ ;

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp[-t^2] dt \text{ — функция Лапласа.}$$

Функция Лапласа и  $\exp[-t^2]$  асимптотически быстро приближаются к постоянным величинам, поэтому формулы (7) можно упростить:

$$P_{он} = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{2\pi} P_n},$$

$$P_{нд} = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi} P_n},$$

$$P_{од} = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}(1 - P_n)}, \quad (8)$$

$$P_{ло} = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}(1 - P_n)}$$

Упрощенные формулы дают четыре верных знака после запятой при  $\frac{P_n}{\delta} > 4,25$  и пять верных знаков при  $\frac{P_n}{\delta} > 4,8$ .

На рис. 3 представлены графики для  $P_{ои}$  и  $P_{нд}$ . Чтобы графики на рис. 2 и 3 можно было сравнить между собой, величина парамет-

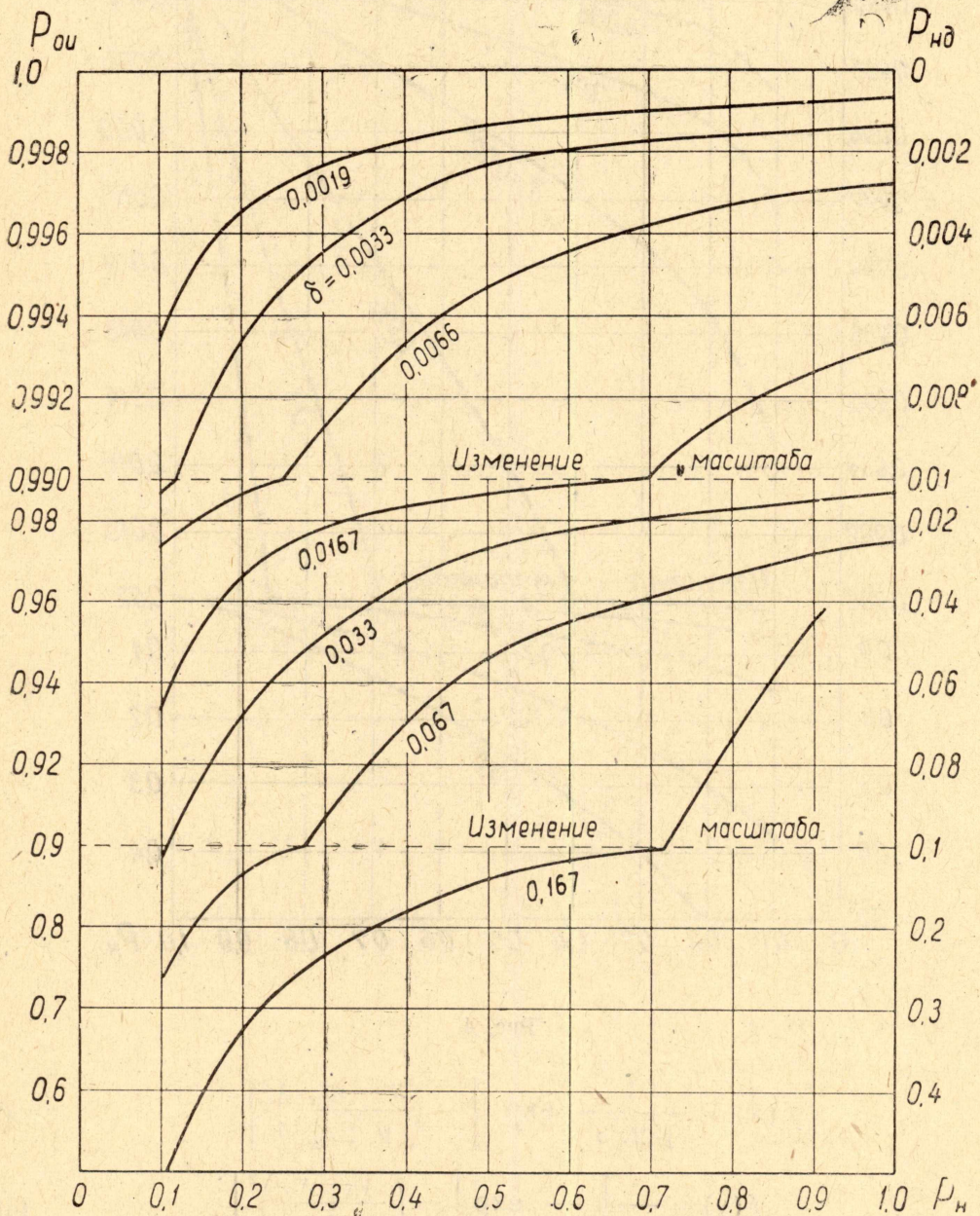


Рис. 3

ра  $\delta$  выбрана из соотношения  $3\sigma_y = \gamma$ , с тем, чтобы ширина распределения контрольного сигнала была равна ширине его при

равномерном законе. Это соответствует одинаковой величине погрешности измерительной аппаратуры при равномерном и нормальном законах распределения.

### Вероятности результатов контроля при нормальных законах

Рассмотрим теперь случай, когда проверяемый параметр и контрольный сигнал имеют нормальные законы распределения.

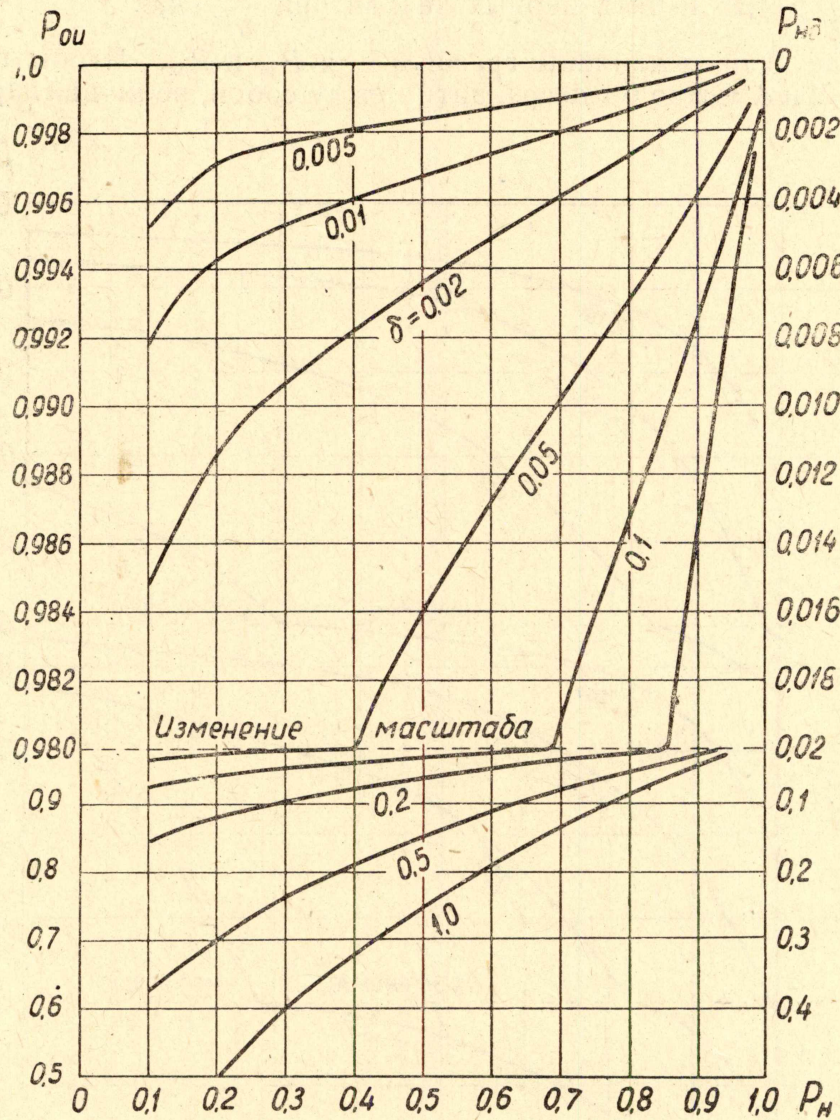


Рис. 4

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[ -\left( \frac{x - m_x}{\sqrt{2}\sigma_x} \right)^2 \right], \quad (9)$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp \left[ -\left( \frac{y - x_0}{\sqrt{2}\sigma_y} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

В случае нормальных законов вероятности результатов контроля лучше всего подсчитывать как условные вероятности по общим формулам [1]. Так, например, вероятность исправной

работы ( $X > x_0$ ) при условии получения положительного исхода контроля ( $Z > 0$ ) будет равна:

$$P(X > x_0 | Z > 0) = \frac{\int_{x_0}^{\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[ -\left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2 - \left(\frac{y-x_0}{\sqrt{2}\sigma_y}\right)^2 \right] dy dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[ -\left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2 - \left(\frac{y-x_0}{\sqrt{2}\sigma_y}\right)^2 \right] dy dx}$$

Интегралы этого выражения нельзя вычислить обычными приемами. Однако имеются таблицы [2], в которых табулированы интегралы от двумерной нормальной плотности. Таблицы позволяют численно рассчитывать условные вероятности результатов контроля. Заметим, что знаменатель представляет собой вероятность

$$P(Z > 0) = \int_0^{\infty} f(z) dz.$$

Закон распределения  $Z$  есть композиция нормальных законов распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ . В этом случае закон распределения  $Z$  также нормальный [3]:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp \left[ -\left(\frac{z-Lm_z}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)^2 \right],$$

$$\text{где } \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}, \quad m_z = m_x - m_y = m_x - x_0.$$

Это позволяет упростить выражения для результатов контроля. К аналогичному виду можно привести формулы для вероятностей других результатов контроля. Вероятности были вычислены по таблицам [2], по результатам построены графики (рис. 4). Параметром кривых является отношение средних квадратичных отклонений величин  $Y$  и  $X$ , т. е.

$$\delta = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Все замечания, сделанные к графикам рис. 2 и 3, справедливы для рис. 4 на стр. 34.

#### Использование полученных результатов в практике

Задача о достоверности контроля в зависимости от конкретных условий может быть рассмотрена с двух сторон:

1) задана плотность распределения параметра  $f(x)$  и вероятность исправной работы устройства до контроля  $P_n$ , а также закон распределения погрешности контрольной аппаратуры; необходимо определить вероятности результатов контроля, в особенности вероятность исправной работы после контроля;

2) задана вероятность исправной работы устройства после контроля  $P_{он}$  по параметру  $X$ , и известен его закон распределения; необходимо определить максимально допустимую погрешность контрольной аппаратуры, которая обеспечивает необходимую величину  $F_{он}$ .

Приведенные графики позволяют легко решить поставленные задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Ф е ф е л о в. Достоверность граничного контроля при одностороннем ограничении проверяемого параметра (в настоящем сборнике).
2. Н. В. С м и р н о в, А. Н. Б о л ь ш е в. Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения, АН СССР, 1962.
3. Е. С. В е н т ц е л ь. Теория вероятностей, Физматгиз, 1962.