

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАХВАТА ЧАСТИЦ В СИНХРОТРОНЕ

В. В. ЦЫГАНКОВ

В синхротроне со слабой фокусировкой изменение ускоренного до конечной энергии заряда от цикла к циклу вызывается в основном изменением таких параметров, как моменты включения инжекции и ускоряющего высокочастотного (ВЧ) напряжения, энергия инжекции, начальная частота генератора. Построение математической модели захвата является начальным этапом проектирования системы автоматической оптимизации условий захвата.

Рассматривается многооборотная инжекция частиц в синхротрон при следующих допущениях: не учитывается коллективное взаимодействие частиц при инжекции, показатель спада магнитного поля  $n$ , постоянный по радиусу и азимуту сектора электромагнита и одинаковый во всех секторах, поле внутри прямолинейных участков отсутствует, амплитуда ускоряющего ВЧ-напряжения устанавливается за время, которым можно пренебречь по сравнению с периодом радиально-фазовых колебаний.

Процесс инжекции разделяется на два этапа [1]. На 1-м этапе инжекции, который длится до момента включения ВЧ-поля, частицы инжектируются на мгновенную орбиту, сжимающуюся к центру из-за роста магнитного поля. В соответствии с протеканием 1-го этапа инжекции вычисляется функция распределения частиц  $g_{\min}(u, \gamma)$  по координатам  $u$  и  $\gamma$  (где  $u$  — расстояние от внутренней пластины инфлектора до мгновенной орбиты,  $\gamma$  — угол между направлением вылета частиц из инфлектора и касательной к мгновенной орбите в месте, где установлен инфлектор). В отличие от функции распределения частиц по амплитудам бетатронных колебаний  $\phi(A)$  [1] функция  $g_{\min}(u, \gamma)$  дает возможность учесть в соотношениях захвата  $n$  изменение момента инжекции и энергии инжектируемых частиц.

Решение уравнения бетатронных колебаний на азимуте инфлектора  $\sigma$  для ускорителей типа рейстрек имеет вид [1]:

$$x_A = F_c(\sigma) \cdot \cos(4\mu\kappa + \alpha(\sigma)), \quad (1)$$

где

$$F_c(\sigma) = 2(D \sin \sigma + dD \cdot \cos \sigma), \quad (2)$$

$$\alpha(\sigma) = \arg(D \cdot \sin \sigma + dD \cdot \cos \sigma),$$

$$D = \frac{R\gamma}{x} \frac{d^* - x_0}{d^* - d}, \quad d = \frac{c - e^{i\lambda}}{s}, \quad d^* = \frac{c - e^{-i\lambda}}{s},$$

$$c = \cos \frac{\pi}{2} x, \quad s = \sin \frac{\pi}{2} x, \quad \cos \mu = c - ps,$$

$$p = \frac{l x}{2R}, \quad \sigma = \frac{x S}{R}, \quad x = \sqrt{1 - n},$$

$S$  — расстояние от края сектора до инфлектора по направлению движения частиц,

$R$  — радиус равновесной орбиты,

$l$  — длина прямолинейного промежутка,

$\gamma$  — угол между направлением вылета частицы и касательной к равновесной орбите на азимуте,

$x_0$  — начальное отклонение частицы от мгновенной орбиты,

$x_k$  — значение  $x$  на  $k$ -ом обороте ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ).

Выполняя операции (2) и подставляя выражения для  $F_c(\sigma)$  и  $\alpha(\sigma)$  в (1), получим:

$$x_k = x_0 B(k) + \frac{\gamma R}{x} A(k), \quad (3)$$

где

$$A(k) = a \cos 4\mu k + \frac{s(b + pa) + 2pb c}{\sin \mu} \sin 4\mu k,$$

$$B(k) = b \cos 4\mu k - \frac{s(a + pb)}{\sin \mu} \cdot \sin 4\mu k,$$

$$a = \sin \sigma, \quad b = \cos \sigma.$$

В области  $u > 0$  условие обхода инфлектора имеет вид:

$$(g + u) B(k) + \frac{\gamma R}{x} A(k) \leq \Delta R_{об} k + u, \quad (5)$$

где  $\Delta R_{об}$  — сжатие мгновенной орбиты за оборот,

$g$  — расстояние от внутренней пластины инфлектора до частицы,  $a$

$u$  — от внутренней пластины до мгновенной орбиты в момент вылета частицы из инфлектора.

Из (5) следуют два неравенства:

$$1) \quad g_1(k) \leq \frac{1 - B(k)}{B(k)} \cdot u - \frac{A(k)}{B(k)} \frac{R}{x} \gamma + \frac{\Delta R_{об} k}{B(k)}, \quad (6)$$

если  $B(k) > 0$ , и

$$2) \quad g_2(k) \geq \frac{1 - B(k)}{B(k)} \cdot u - \frac{A(k)}{B(k)} \frac{R}{x} \gamma + \frac{\Delta R_{об} k}{B(k)}, \quad (7)$$

если  $B(k) < 0$ .

В (6) и (7) для фиксированных значений  $n, \Delta R_{об}, \gamma, u$  и среди  $k = 1, 2, 3, \dots$  найдем такое значение  $k = k'$ , при котором  $g_1(k')$  минимально, и такое значение  $k = k''$ , при котором  $g_2(k'')$  максимально. Тогда область инфлектора, вылетов из которой частицы будут захвачены в 1-й этап инжекции, равна:

$$0 \leq g_2(k'') \leq g_1(k') \leq g_1, \quad (8)$$

где  $g_1$  — ширина инфлектора.

Аналитические методы исследования функции  $g(k)$  дискретного аргумента  $k$  отсутствуют, поэтому операцию нахождения  $k'$  и  $k''$  приходится выполнять численно.

В первый момент после включения ВЧ-поля частицы распределяются по фазам  $\varphi_0$  ускоряющего напряжения. Область фаз ( $\varphi_1, \varphi_2$ ),

ограниченная сепаратрисой, представляет геометрическое место точек синхротронных орбит, вокруг каждой из которых частицы распределены по положениям мгновенной орбиты в соответствии с первым этапом инжекции. Через четверть периода радиально-фазовых колебаний синхротронная орбита, имеющая начальную фазу  $\varphi_0$ , будет на расстоянии  $y \sim \varphi(\varphi_s)$  от равновесной орбиты, поэтому область интегрирования по  $u$  для данной синхротронной орбиты равняется  $(0, u_1, -y)$  ( $\varphi_s$  — равновесная фаза,  $u_1$  — расстояние от внутренней пластины инфлектора до центра рабочей области). Если энергия инжектируемых частиц изменилась на величину  $+\Delta E$ , то азимутальный размер сгустка в плоскости  $(\varphi, \varphi)$  будет равен  $y_{02} - y_{01} = \varphi(\Delta E)$ , а нижний предел интегрирования по  $y$  равен  $y_0 = \frac{R_s \Delta E}{\beta^2 (1-n) E}$ . В случае, когда область интегрирования по  $u$  не зависит от  $\gamma$ , заряд, захваченный в ускорение с учетом двух этапов инжекции, равен:

$$Q = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int_0^{y_{01}} \int_{\varphi_{01}}^{\varphi_{02}} \int_{y_0}^{y_1} \int_0^{u_1-y} \int_0^{g_{\min}(u, \gamma)} q(\gamma, y_0, \varphi_0, y, u, g) \times \\ \times dg du dy d\varphi_0 dy_0 d\gamma, \quad (9)$$

$q$  — функция распределения инжектируемых частиц по углу  $\gamma$ , энергии  $y_0$ , начальной фазе  $\varphi_0$  ВЧ-напряжения, амплитудам радиально-фазовых колебаний  $y \sim \varphi(\varphi_s)$  без учета бетатронных колебаний, длительности импульса инжекции  $u$ , ширине инфлектора  $g$ ;

$y_1$  — радиальный полуразмер сепаратрисы;

$$g_{\min}(u, \gamma) = g_1(\kappa') = \frac{1 - B(\kappa')}{B(\kappa')} \cdot u - \frac{A(\kappa')}{B(\kappa')} \frac{R}{x} \gamma + \frac{\Delta R_{06} \cdot \kappa'}{B(\kappa')}. \quad (10)$$

Далее положим, что соотношение между координатами  $\varphi_0$  и  $y$  линейное, т. е. если распределение частиц по фазам  $\varphi_0$  равномерное, то распределение частиц по  $y$  (без учета бетатронных колебаний) можно также считать равномерным. Такое допущение можно сделать, если в выражении [1]

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{2(1 - \varphi_s \operatorname{ctg} \varphi_s)^{1/2}}{\pi} \frac{y}{y_1} \left[ 1 + \kappa_{1,2} \left( \frac{y}{y_1} \right)^2 \right], \quad (10)$$

устанавливающим связь между амплитудами радиальных и фазовых колебаний, пренебречь членом  $\kappa_{1,2} \left( \frac{y}{y_1} \right)^2$  ( $\kappa_{1,2} = 0,2 \div 0,25$ ;  $0 \leq y \leq y_1$ ), который „дает небольшую поправку“ [1]. Для случая равномерного распределения заряда

$$q(\gamma, y_0, \varphi_0, y, u, g) = \frac{I}{g_1 \cdot \left| \frac{dR}{dt} \right| \cdot y_1 \cdot 2\pi y_{01} (\gamma_2 - \gamma_1)}, \quad (11)$$

где  $I$  — ток инжектора.

Область интегрирования по  $\varphi_0$  при  $\Delta E \neq 0$  можно определить, если в выражении [2]

$$\varepsilon_{y_0}(y = y_1) = \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{\pi} = \frac{2(1 - \varphi_s \cdot \operatorname{ctg} \varphi_s)^{1/2}}{\pi} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{y_0}{y_1} \right)^2} + \right. \\ \left. + \kappa_{1,2} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{y_0}{y_1} \right)^2} \right]^3 \right); \quad (12)$$

пренебречь членом  $\kappa_{1,2} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{y_1}\right)^2} \right]^3$ ,  $0 \leq y_0 \leq y_1$ . Подставляя

(10), (11), (12) в (9), легко вычислить интегралы (9).

Помимо вышеуказанных допущений относительно вида функций  $\varepsilon_{1,2}$  и  $\varepsilon_{y_0}$ , которые не носят принципиального характера, в формуле (9) не учтено изменение функции  $g_{\min}(u, \gamma)$  в области мгновенных орбит, близких к синхротронной. Действительно, если мгновенная орбита совпадает с синхротронной, отстоящей от равновесной на расстоянии  $u$ , то  $g_{\min}(u, \gamma)$ , так как период синхротронных колебаний много больше периода бетатронных колебаний. Для каждой мгновенной орбиты максимальная амплитуда бетатронных колебаний (для ускорителя

без прямолинейных промежутков) равна  $A = \sqrt{[u + g_{\min}(u, \gamma)]^2 + \left(\frac{\gamma R}{x}\right)^2}$ .

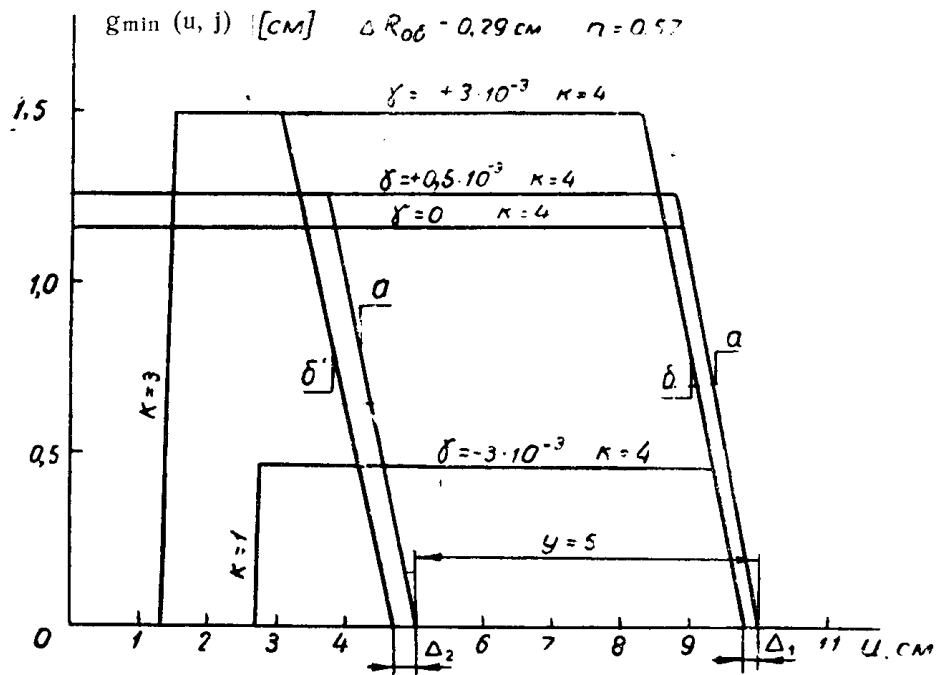


Рис. 1. Функция распределения по  $u$  и  $\gamma$  и ее изменение на 2-м этапе инжекции

Если  $A < u_1 - y$ , то распределение частиц по  $u$  находится согласно (10), если же  $A > u_1 - y$ , то функция распределения равна:

$$g'_{\min}(u, \gamma) = g_{\min}(u, \gamma) - \{A - (u_1 - y)\}. \quad (13)$$

Таким образом, область интегрирования по  $u$  разбивается на две:  $(0, u')$  и  $(u', u'' \approx u_1 - y)$ ,  $u'$  находится из условия равенства фигурной скобки нулю, а  $u''$  из условия  $g'_{\min}(u, \gamma) = 0$ . На рис. 1 представлен график функции  $g_{\min}(u, \gamma)$  (10), (13), рассчитанный для параметров синхротрона 1,5 ГэВ ТПИ. Из рис. 1 видно, что погрешность формулы (9), которая вызвана тем, что не учитывается изменение  $g_{\min}(u, \gamma)$  в области мгновенных орбит, близких к синхротронным, одного порядка для параллельного пучка с  $\gamma = 0$  и  $\gamma \neq 0$ . Коэффициент захвата

во второй этап инжекции для параллельного моноэнергетического пучка, рассчитанный по формуле (9), равен:

$$\eta_2 = \frac{Q}{Q_1} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{при } y_1 = u_1), \quad (14)$$

$$\eta_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \cdot \frac{3}{4} \quad \left( \text{при } y_1 = \frac{1}{2} u_1 \right),$$

где  $Q_1$  — заряд, захватываемый на первом этапе инжекции,  $\varphi_2 - \varphi_1 = f(y_1)$  — азимутальный размер сепаратрисы.

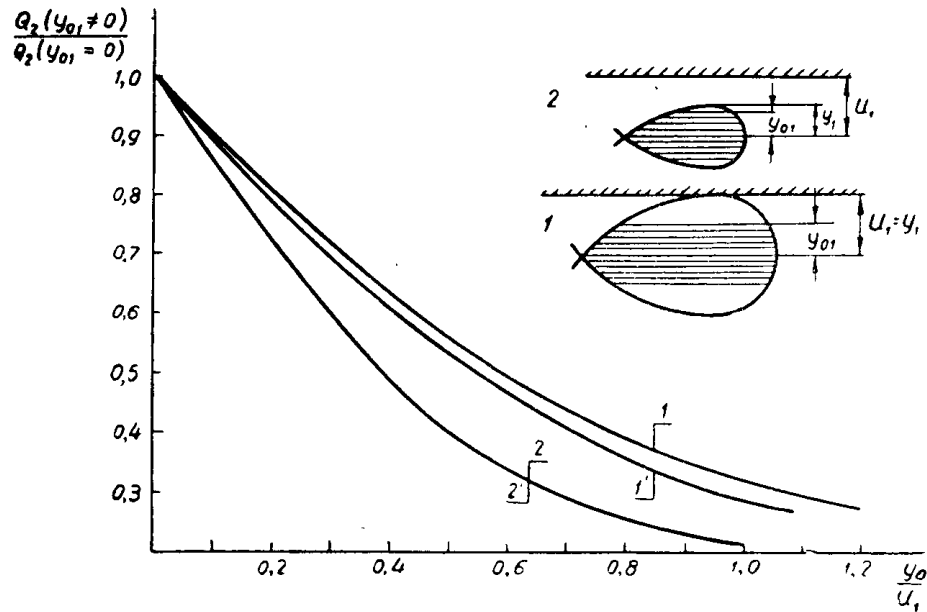


Рис. 2. Зависимость захваченного заряда от энергетического разброса  $y_{01} \sim \Delta E_{\text{max}}$

С учетом изменения  $g_{\min}(u, \gamma)$  (при  $\gamma = 0$ )

$$\eta_2' = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{g_1}{u_1} + \frac{3}{2} \frac{g_1^2}{u_1^2} \right) \quad (\text{при } y_1 = u_1) \quad (15)$$

и

$$\eta_2' = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \left( \frac{3}{4} - \frac{g_1}{u_1} \right) \quad \left( \text{при } y_1 = \frac{1}{2} u_1 \right).$$

Так как  $g_1 \ll u_1$ , то погрешность формулы (9) незначительна.

Потери частиц за счет энергетического разброса можно оценить по формуле, которая получается из (9) при  $\gamma = 0$ ,  $y_1 = u_1$ ,  $y_{01} = u_1 x$ :

$$\frac{Q(y_{01} \neq 0)}{Q(y_{01} = 0)} = \frac{2 \left[ \frac{5}{16} x \sqrt{1-x^2} + \left( \frac{1}{3} - \frac{x}{8} \right) \sqrt{(1-x^2)^3} - \frac{1}{3} + \frac{5}{16} \arcsin x \right]}{x}. \quad (16)$$

В квадратной скобке  $0 \leq x \leq 1$ . На рис. 2 представлены следующие графики функции  $\frac{Q(y_{01} \neq 0)}{Q(y_{01} = 0)}$ : цифрой 1 обозначен график, рассчитан-

ный без учета, а 1' — с учетом изменения  $g_{\min}(u)$  на втором этапе инжекции для параметров синхротрона 1,5 Гэв ТПИ ( $g_1 = 1,5 \text{ см}$ ,  $u_1 = 10 \text{ см}$ ) и  $y_1 = u_1$ ; цифрой 2 — график без учета, а 2' — с учетом изменения  $g_{\min}(u)$  для параметров синхрофазотрона 10 Гэв ОИЯИ г. Дубна ( $g_1 = 3 \text{ см}$ ,  $u_1 = 50 \text{ см}$ ) и  $y_1 = \frac{1}{2} u_1$ .

Рассмотрим захват параллельного моноэнергетического пучка при неоптимальных условиях захвата. Введем обозначения:

$R_1$  — радиус мгновенной орбиты в момент включения импульса инжекции;

$R_2$  — радиус мгновенной орбиты в момент включения ВЧ-поля;

$R'_2$  — радиус мгновенной орбиты в момент окончания импульса инжекции;

$R_{\text{инф}}$  — радиус, на котором установлен инфлектор;

$R_1 - R'_2 = u_n = \left| \frac{dR}{dt} \right| \Delta\tau_n$ ,  $\Delta\tau_n$  — длительность импульса инжекции

$\bar{R}_s$  — средний радиус камеры ускорителя;

$R_s$  — радиус равновесной орбиты;

$\Delta u_n = \left| \frac{dR}{dt} \right| \Delta\tau_n$ ,  $\Delta\tau_n$  — ошибка в моменте инжекции;

$\Delta u_{\text{вч}} = \left| \frac{dR}{dt} \right| \Delta\tau_{\text{вч}}$ ,  $\Delta\tau_{\text{вч}}$  — ошибка в моменте включения ВЧ-поля;

$\Delta u_\omega = \frac{R_s}{\beta^2(1-n)F} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_s}$ ,  $\Delta\omega$  — дрейф начальной частоты генератора;

$$F = 1 - \frac{1}{(2\pi R_s + L)[n + \beta^2(1-n)]}, \quad L = 4l;$$

$\Delta u_E = \frac{R_s}{\beta^2(1-n)E} \Delta E$ ,  $\Delta E$  — дрейф энергии инжекции.

Изменения вышеуказанных параметров рассматриваются от цикла к циклу. На рис. 3 представлен частный случай:  $R_1 < R_{\text{инф}}$ ,  $R_s = \bar{R}_s > R_2$ . Каждому положению мгновенной орбиты и соответствует область инфлектора  $g_{\min}(u)$ , вылетев из которой частица не столкнется с инфлектором. Если возвращать мгновенную орбиту электронов после того, как они совершат  $\kappa'$  оборотов, на прежнее место, то получим график функции  $g_{\min}(u)$ , нарисованный сплошной линией. Так как фактически мгновенная орбита двигается, то график функции  $g_{\min}(u)$  изображается штриховой линией. Из рис. 3 видно, что область интегрирования по  $u$  равна  $[(R_{\text{инф}} - R_1), u_1 - y]$ , по  $y - [R_s - R_2, y_1]$ , ази-

(мутальный размер сгустка:  $(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = (\varphi_2 - \varphi_1) \sqrt{1 - \left( \frac{R_s - R_2}{y_1} \right)^2}$ ).

Таким образом,

$$Q = \frac{I(\varphi_2 - \varphi_1)}{g_1 \left| \frac{dR}{dt} \right| \cdot y_1 \cdot 2\pi} \sqrt{1 - \left( \frac{R_s - R_2}{y_1} \right)^2} \int_{R_s - R_2}^{y_1} \int_{R_{\text{инф}} - R_1}^{u_1 + (R_{\text{инф}} - R_1) - y} \int_0^{g_{\min}(u)} dg du dy. \quad (17)$$

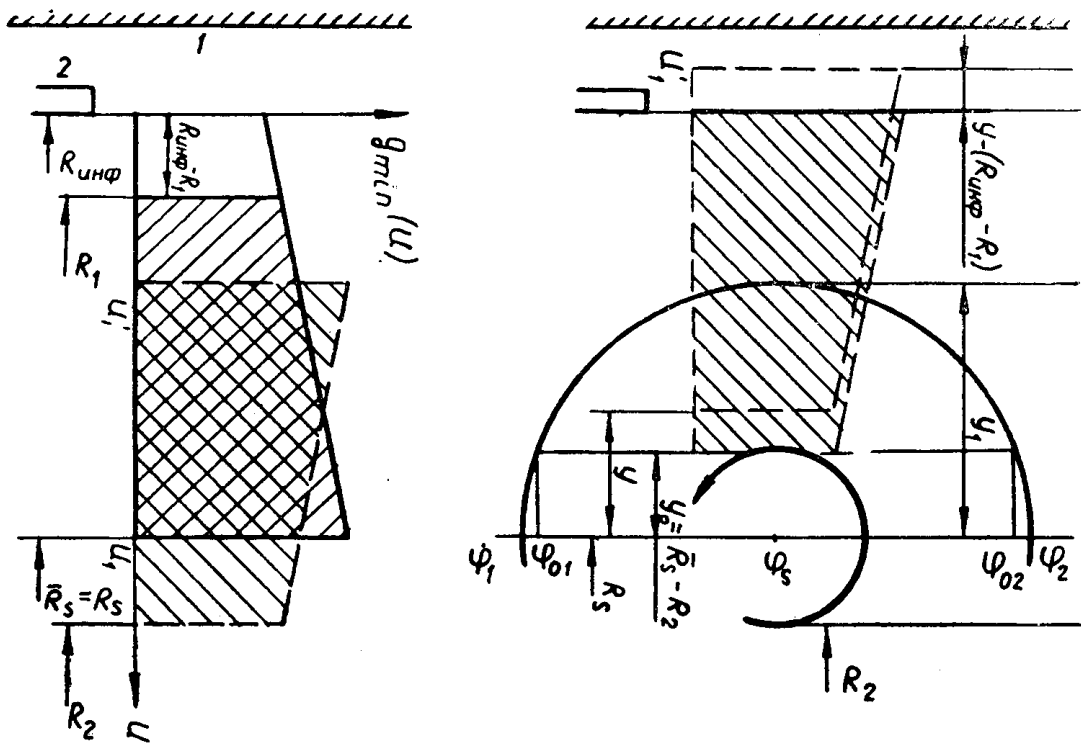


Рис. 3. К расстановке пределов интегрирования по  $u$ ,  $y$ ,  $\varphi$  при неоптимальных условиях захвата

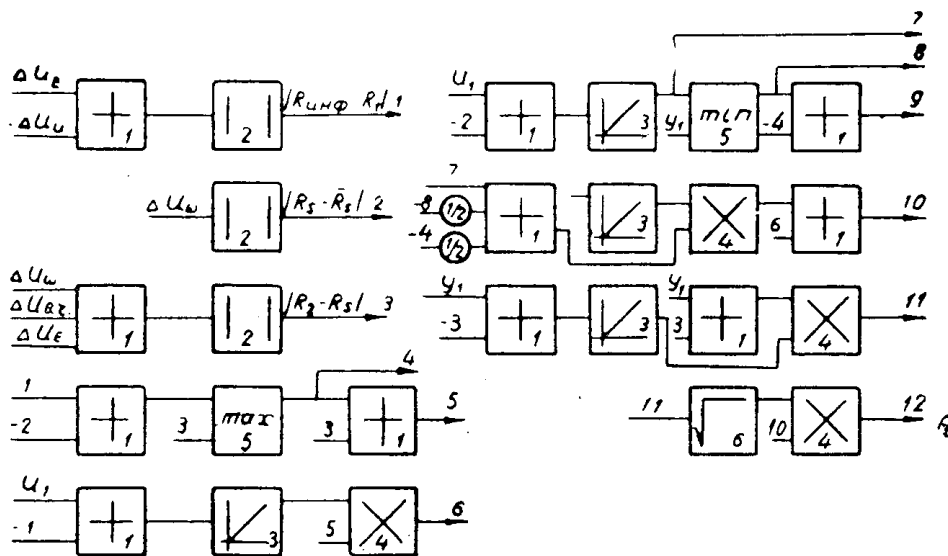


Рис. 4. Функциональная схема моделирования соотношений захвата (18) на АВМ (операции: 1 — суммирование, 2 — выделение модуля, 3 — сравнения с нулем, 4 — перемножения, 5 — сравнения двух величин, 6 — извлечения корня)

В общем случае зависимость захваченного заряда от вышеуказанных параметров имеет вид:

$$\begin{aligned}
 Q = & \frac{I \cdot 2 (1 - \varphi_s \cdot \text{ctg } \varphi_s)^{1/2}}{g_1 \left| \frac{dR}{dt} \right| y_1 \cdot \pi} \sqrt{1 - \left( \frac{|R_s - R_2|}{y_1} \right)^2} \left( \int_{|R_s - R_2|}^{|R_{\text{инф}} - R_1| - |R_s - \bar{R}_s|} \right) \times \\
 & \times \left( \int_{\{(R_1 - R_{\text{инф}}) \geq 0\}}^{u_1 - \{(R_1 - R_{\text{инф}}) \geq 0\}} + \int_{|R_{\text{инф}} - R_1| - |R_s - \bar{R}_s|}^{\min\{u_1 - |R_s - \bar{R}_s|, u_1 - (y + |R_s - \bar{R}_s|) - \{(R_{\text{инф}} - R_1) > 0\}} \right) \times \\
 & \times \int_{\{(R_{\text{инф}} - R_1) \geq 0\}}^{g_{\min}(u)} dg du dy, \quad (18)
 \end{aligned}$$

где:

$$\left. \begin{aligned}
 R_1 - R_{\text{инф}} = \Delta u_E - \Delta u_{\text{и}}, \quad R_s - \bar{R}_s = \Delta u_{\omega}, \quad R_2 - \bar{R}_s = \Delta u_E - \Delta u_{\text{вч}} \\
 |R_2 - R_s| = |(R_s - \bar{R}_s) - (R_2 - \bar{R}_s)| = |\Delta u_E - \Delta u_{\text{вч}}|
 \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим зависимость захваченного заряда от  $\Delta u_{\text{вч}}$ ,  $\Delta u_{\text{и}}$ ,  $\Delta u_E$ ,  $\Delta u_{\omega}$ . Из (18) видно, что при неравномерном распределении захваченного заряда по  $u$  зависимость от  $\Delta u_{\text{и}}$  и  $\Delta u_E$  не симметрична относительно нуля. Из (18) легко показать, что для компенсации дрейфа энергии инжекции желательно сделать моменты инжекции и включения ВЧ-поля связанными. На рис. 4 представлена блок-схема моделирования соотношения (18) при  $g_{\min}(u) = g_1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Рабинович. Основы теории синхрофазотрона. Труды ФИАН СССР, т. 10, 1958.
2. И. С. Данилкин, М. С. Рабинович. Захват частиц в синхрофазотронный режим ускорения. ЖТФ, т. 28, вып. 2, 1958.