

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербаков Р.Н. Щербаков Н.Р. Построение репера неголономной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 3. – С. 11–16.
2. Кованцов Н.И. Теория комплексов. – Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1963. – 292 с.
3. Щербаков Р.Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. – Томск: Изд-во ТГУ, 1973. – 236 с.
4. Кованцов Н.И. К теории неголономных комплексов // Докл. Второй сибирской конф. по матем. и мех. – Томск, 1962. – С. 85–87.
5. Щербаков Р.Н. Эквивафинная теория комплексов прямых // Докл. научной конф. по теоретич. и прикладным вопросам математики и механики. – Томск, 1960. – С. 82–83.
6. Щербаков Р.Н. Основной цилиндрок линейчатого комплекса // Известия вузов. Математика. – 1962. – № 3 (28). – С. 177–178.
7. Гриневичус К.И. О неголономном комплексе // Литовский математический сб. – 1969. – Т. 9. – № 1. – С. 85–99.
8. Близнакас В.И. Некоторые вопросы теории неголономных комплексов // Труды геометрического семинара. – М.: Изд-во ВИНТИ, 1974. – № 5. – С. 69–96.
9. Барыктабасов Э.Д. К эквивафинной теории неголономных комплексов. О связи неголономных конгруэнций W с точками неголономности // Труды Томского ун-та. Геометрический сб. – 1975. – Т. 258. – № 15. – С. 122–151.
10. Печников И.А. Репераж сопряжённых пар пфаффовых подмногообразий // Геометрический сб. – 1978. – № 19. – С. 122–126.
11. Щербаков Р.Н. О неголономных конгруэнциях W // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 4. – С. 802–804.
12. Кованцов Н.И. Линейчато-геометрический аналог триортogonalной системы поверхностей // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 113. – № 3. – С. 497–500.
13. Барыктабасов Э.Д. Неголономные конгруэнции в неголономном комплексе // Тр. Томского ун-та. Геометрический сб. – 1974. – Т. 255. – № 14. – С. 172–191.
14. Широков П.А., Широков А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 319 с.

УДК 519.865

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА

А.В. Аникина, Н.С. Демин*

Томский политехнический университет

*Томский государственный университет

E-mail: oceanann@rambler.ru

Проводится исследование стоимости опциона, портфеля и капитала для европейского опциона купли с последствием при наличии выплат по дивидендам в случае непрерывного времени.

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стандартном вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P} = (F_t)_{t \in [0, T]})$ [1, 2]. Через $\mathbb{P}_t = \mathbb{P}|F_t$ обозначается сужение меры $\mathbb{P}$ на F_t . На финансовом рынке обращаются рискованные (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t \in [0, T]$ определяются уравнениями из [3, 4]

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad dB_t = rB_t dt, \quad (1.1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0$, $r > 0$, $S_0 > 0$, $B_0 > 0$, решение которых имеет вид

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t\}, \quad B_t = B_0 \exp\{rt\}. \quad (1.2)$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде [1, 2]

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \quad (1.3)$$

где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ пара F_t – измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. За обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta \gamma_t S_t$, пропорциональной рискованной части капитала с коэффициентом δ , таким, что $0 \leq \delta < r$, т.е.

$$dD_t = \delta \gamma_t S_t dt. \quad (1.4)$$

Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами происходит в виде

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t. \quad (1.5)$$

Из (1.3) следует, что

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t. \quad (1.6)$$

Тогда согласно (1.5), (1.6), $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = dD_t$, что является балансовым соотношением, заменяющим условие самофинансируемости в стандартной задаче [3]. Из (1.1), (1.3)–(1.5) следует, что капитал определяется уравнением

$$dX_t = rX_t dt + \sigma \gamma_t S_t dW_t^{\mu-r+\delta}, \quad W_t^{\mu-r+\delta} = W_t + (\mu - r + \delta)t/\sigma. \quad (1.7)$$

Далее нам потребуется результат, связанный с преобразованием мер вида

$$d\mathbb{P}_t^* = Z_t d\mathbb{P}_t, \quad (1.8)$$

математические ожидания относительно которых $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}^*$ соответственно.

Теорема Гирсанова [1, 2]. Пусть Y_t – диффузионный процесс, определяемый уравнением

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + dW_t,$$

где W_t – винеровский процесс. Пусть

$$Z_t = \exp \left\{ - \int_0^t b(\tau, Y_\tau) dW_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(\tau, Y_\tau) d\tau \right\},$$

причем

$$\mathbb{E} Z_t = 1. \quad (1.9)$$

Тогда процесс Y_t является винеровским относительно меры $\mathbb{P}^*$.

Пусть $Y_t = W_t^{\mu-r+\delta}$. Согласно (1.7)

$$dY_t = dW_t^{\mu-r+\delta} = ((\mu-r+\delta)/\sigma)dt + dW_t. \quad (1.10)$$

Так как, согласно (1.10), $b(\tau, Y_t) = (\mu-r+\delta)/\sigma$, то

$$Z_t = Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp \left\{ - \frac{\mu-r+\delta}{\sigma} W_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} \right)^2 t \right\}.$$

Так как

$$\mathbb{E} \exp \{ \sigma W_t \} = \exp \{ (\sigma^2 t)/2 \},$$

то $\mathbb{E} Z_t^{\mu-r+\delta} = 1$, т.е. условие (1.9) для $Z_t^{\mu-r+\delta}$ выполняется.

Пусть $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$, определяемая преобразованием $d\mathbb{P}_t^{\mu-r+\delta} = Z_t^{\mu-r+\delta} d\mathbb{P}_t$, и пусть $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{\mu-r+\delta}$. Тогда, согласно теореме Гирсанова, процесс $W_t^{\mu-r+\delta}$ вида (1.7) является винеровским относительно меры $\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$, т.е. для $t > \tau$, $\mathbb{E}^{\mu-r+\delta}(W_t^{\mu-r+\delta} - W_\tau^{\mu-r+\delta} | F_\tau) = 0$, $\mathbb{E}^{\mu-r+\delta}((W_t^{\mu-r+\delta} - W_\tau^{\mu-r+\delta})^2 | F_\tau) = t - \tau$. Таким образом, обозначая через $Law(\cdot | \mathbb{P})$ и $Law(\cdot | \mathbb{P}^{\mu-r+\delta})$ свойства процессов относительно $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$, получаем

$$Law(W^{\mu-r+\delta} | \mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(W | \mathbb{P}). \quad (1.11)$$

Тогда, согласно (1.2), (1.7), (1.11),

$$\begin{aligned} Law(S_t; t \leq T | \mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) &= \\ &= Law(S_0 \exp \{ (\mu - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t \}; t \leq T | \mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) = \\ &= Law(S_0 \exp \{ (r - \delta - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t^{\mu-r+\delta} \}; t \leq T | \mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) = \\ &= Law(S_0 \exp \{ (r - \delta - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t \}; t \leq T | \mathbb{P}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким образом, $Law(S(\mu, r, \delta) | \mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(S(\mu, r, \delta) | \mathbb{P})$, т.е. вероятностные свойства процесса $S(\mu, r, \delta)$, определяемого уравнением

$$d_t S_t(\mu, r, \delta) = S_t(\mu, r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t^{\mu-r+\delta}),$$

относительно $\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$ совпадают со свойствами процесса $S(r, \delta)$, определяемого уравнением

$$d_t S_t(r, \delta) = S_t(r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t), \quad (1.13)$$

относительно меры $\mathbb{P}$.

Задача: сформировать портфель $\pi_t(\delta) = (\beta_t(\delta), \gamma_t(\delta))$ таким образом, чтобы формирование капитала согласно (1.3) в конечный момент времени T обеспечило выполнение платежного условия $X_T = f_T(S)$, где

$$f_T(S) = S_T - \min_{0 \leq t \leq T} S_t \quad (1.14)$$

является платежной функцией с последствием в случае опциона купли (колл – опцион) [3].

В данной работе: 1) находится формула, определяющая рациональную (справедливую) стоимость опциона $C_T(\delta)$, как начального капитала $X_0 = x$, при котором достигается выполнение платежного условия; 2) находятся формулы, определяющие эволюцию текущего капитала $X_t(\delta)$ и портфеля $\pi_t(\delta) = (\beta_t(\delta), \gamma_t(\delta))$; 3) исследуются свойства решения.

2. Стоимость опциона

Поскольку платежная функция вида (1.14) является естественной, то [3]

$$C_T(\delta) = e^{-rT} \mathbb{E} f_T(S(r, \delta)). \quad (2.1)$$

Согласно (1.1), (1.2), (1.12), (1.13)

$$\begin{aligned} S_t(r, \delta) &= S_0 \exp \{ (r - \delta - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t \} = \\ &= S_0 \exp \{ \sigma \xi_t \}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\xi_t = W_t + (ht)/\sigma, \quad h = r - \delta - (\sigma^2/2). \quad (2.3)$$

Далее $R = (-\infty, +\infty)$, $N\{a; b\}$ – нормальное распределение с параметрами a и b , а $\Phi(x)$ – функция Лапласа, т.е. $\Phi(x) = N\{0; 1\}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Лемма 1 [2]. Пусть $\tau_x = \inf\{t \geq 0: \sigma W_t \geq x\}$, $x \in R$. Тогда процесс W_t^* такой, что

$$\sigma W_t^* = \begin{cases} \sigma W_t, & t \leq \tau_x, \\ 2x - \sigma W_t, & t > \tau_x, \end{cases}$$

является винеровским процессом.

Лемма 2. Пусть $\phi(y, z) \geq 0$ – биномиальная функция событий. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \phi(\min_{0 \leq \tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht), \sigma W_t + ht) = \\ &= \mathbb{E} \exp \{ (h/\sigma) W_t - (h^2/2\sigma^2)t \} \phi(\min_{0 \leq \tau \leq t} \sigma W_\tau, \sigma W_t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство. Относительно теоремы Гирсанова $Y_t = \xi_t$, $b(t, Y_t) = b(t, \xi_t) = h/\sigma$, $Z_t = \exp \{ -(h/\sigma) W_t - (h^2/2\sigma^2)t \}$. Тогда последовательно с учетом (1.8), (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \phi(\min_{\tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht), \sigma W_t + ht) &= \mathbb{E}^* Z_t^{-1} \phi(\min_{\tau \leq t} \sigma \xi_\tau, \sigma \xi_t) = \\ &= \mathbb{E}^* \exp \{ \frac{h}{\sigma} W_t + \frac{h^2}{2\sigma^2} t \} \phi(\min_{\tau \leq t} \sigma \xi_\tau, \sigma \xi_t) = \\ &= \mathbb{E}^* \exp \{ \frac{h}{\sigma} (\xi_t - \frac{h}{\sigma} t) + \frac{h^2}{2\sigma^2} t \} \phi(\min_{\tau \leq t} \sigma \xi_\tau, \sigma \xi_t) = \\ &= \mathbb{E}^* \exp \{ \frac{h}{\sigma} \xi_t - \frac{h^2}{2\sigma^2} t \} \phi(\min_{\tau \leq t} \sigma \xi_\tau, \sigma \xi_t) = \\ &= \mathbb{E} \exp \{ \frac{h}{\sigma} W_t - \frac{h^2}{2\sigma^2} t \} \phi(\min_{\tau \leq t} \sigma W_\tau, \sigma W_t), \end{aligned}$$

т.е. пришли к (2.4). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть для $t \leq T$

$$m_t = \min_{0 \leq \tau \leq t} \sigma \xi_\tau = \min_{0 \leq \tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht). \quad (2.5)$$

Тогда для $x \leq 0$ и $h \in R$ функция распределения $\mathbb{P}(m_t \leq x)$ и плотность вероятности $p(t, x) = \partial \mathbb{P}(m_t \leq x) / \partial x$ имеют вид

$$\mathbb{P}(m_i \leq x) = \mathbb{P}(\min_{0 \leq \tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht) \leq x) = \Phi\left(\frac{-x+ht}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(\frac{x+ht}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad (2.6)$$

$$p(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(-x+ht)^2}{2\sigma^2 t}\right) + \frac{2h}{\sigma^2} \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(\frac{x+ht}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}\right\} \exp\left(-\frac{(x+ht)^2}{2\sigma^2 t}\right). \quad (2.7)$$

Доказательство. Пусть A и B – некоторые события. Тогда очевидно, что $A = A \cap B + A \cap \bar{B}$ и $A = B + A \cap \bar{B}$, если $B \subset A$. Пусть

$$A = (\min_{\tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht) \leq x), \quad B = (\sigma W_t + ht < x).$$

Так как $B \subset A$, то

$$\mathbb{P}(\min_{\tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht) \leq x) = \mathbb{P}(\sigma W_t + ht < x) + \mathbb{P}(\min_{\tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht) \leq x, \sigma W_t + ht \geq x). \quad (2.8)$$

Так как $\sigma W_t \sim N(0, \sigma^2 t)$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma W_t + ht < x) &= \mathbb{P}(\sigma W_t < x - ht) = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x-ht} e^{-y^2/2\sigma^2 t} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-ht}{\sigma\sqrt{t}}} e^{-z^2/2} dz = \Phi\left(\frac{x-ht}{\sigma\sqrt{t}}\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пусть $\varphi(\min_{\tau \leq t} \sigma \xi_\tau, \sigma \xi_t) = I(\min_{\tau \leq t} \sigma \xi_\tau \leq x, \sigma \xi_t \geq x)$, где $I(D)$ – индикатор, т.е. $\mathbb{E}I(D) = \mathbb{P}(D)$. Тогда с учетом (2.4) и Леммы 1

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min_{\tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht) \leq x, \sigma W_t + ht \geq x) &= \\ &= \mathbb{E}\varphi(\min_{\tau \leq t} \sigma \xi_\tau, \sigma \xi_t) = \\ &= \mathbb{E} \exp\left\{\frac{h}{\sigma} W_t - \frac{h^2}{2\sigma^2} t\right\} \varphi(\min_{\tau \leq t} \sigma W_\tau, \sigma W_t) = \\ &= \mathbb{E} \exp\left\{\frac{h}{\sigma} W_t - \frac{h^2}{2\sigma^2} t\right\} I(\min_{\tau \leq t} \sigma W_\tau \leq x, \sigma W_t \geq x) = \\ &= \mathbb{E} \exp\left\{\frac{h}{\sigma} W_t^* - \frac{h^2}{2\sigma^2} t\right\} I(\min_{\tau \leq t} \sigma W_\tau^* \leq x, \sigma W_t^* \geq x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как $\sigma W_t < x$ для $t < \tau_x$, то на интервале $t \in [0, \tau_x]$, где $W_t^* = W_t$, события $\{\sigma W_t^* \geq x\}$ и $\{\min_{\tau \leq t} \sigma W_\tau^* \leq x\}$ являются несовместными. Таким образом, $\sigma W_t^* < 2x - \sigma W_t$. Тогда

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{h}{\sigma} W_t^* - \frac{h^2}{2\sigma^2} t\right\} &= \\ &= \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2} - \frac{h^2}{2\sigma^2} t\right\} \exp\left\{-\frac{h}{\sigma} W_t\right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} I(\min_{\tau \leq t} \sigma W_\tau^* \leq x, \sigma W_t^* \geq x) &= \\ &= I(\min_{\tau \leq t} \sigma W_\tau \leq x, \sigma W_t \leq x) = I(\sigma W_t \leq x), \end{aligned}$$

и из (2.10), (2.11) следует

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min_{\tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht) \leq x, \sigma W_t + ht \geq x) &= \\ &= \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2} - \frac{h^2}{2\sigma^2} t\right\} \mathbb{E} \exp\left\{-\frac{h}{\sigma} W_t\right\} I(\sigma W_t \leq x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Так как $I(\sigma W_t \leq x) = I(W_t \leq (x/\sigma))$, а $W_t \sim N(0; t)$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\left\{-\frac{h}{\sigma} W_t\right\} I(\sigma W_t \leq x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x/\sigma} \exp\left\{-\frac{h}{\sigma} y\right\} \exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\} dy. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Утверждение 1. Если

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int \exp\{cx\} \exp\{-(x-a)^2/2d\} dx, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} J &= \exp\left\{ca + \frac{c^2 d}{2}\right\} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int \exp\left\{-\frac{[x-(a+cd)]^2}{2d}\right\} dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Пусть $X \sim N(a; d)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\{cX\} I(X \leq b) &= \\ &= \exp\{ca + (c^2 d/2)\} \Phi((b-(a+cd))/\sqrt{d}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\{cX\} I(X \geq b) &= \\ &= \exp\{ca + (c^2 d/2)\} \Phi(-(b-(a+cd))/\sqrt{d}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Представление (2.15) для J следует из (2.14) в результате элементарных преобразований, (2.16) следует непосредственно из (2.14), (2.15), а (2.17) – из (2.16) с учетом того, что $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$.

Применение (2.16) к (2.13) дает, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\{-(h/\sigma) W_t\} I(\sigma W_t \leq x) &= \\ &= \exp\{h^2 t/2\sigma^2\} \Phi((x+ht)/\sigma\sqrt{t}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Использование (2.18) в (2.12) дает, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min_{\tau \leq t} (\sigma W_\tau + ht) \leq x, \sigma W_t + ht \geq x) &= \\ &= \exp\{2hx/\sigma^2\} \Phi((x+ht)/\sigma\sqrt{t}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Подстановка (2.9), (2.19) в (2.8) приводит к (2.6), откуда непосредственно следует (2.7). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть

$$d_1(\delta, t) = \left(\frac{r-\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{T-t}, \quad (2.20)$$

$$d_2(\delta, t) = \left(\frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{T-t}. \quad (2.21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_T(\delta) &= S_0 \{e^{-\delta T} \Phi(d_1(\delta)) - e^{-rT} \Phi(d_2(\delta))\} + \\ &+ \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)} e^{-rT} [\Phi(d_2(\delta)) - e^{(r-\delta)T} \Phi(-d_1(\delta))], \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $d_1(\delta) = d_1(\delta, t)$, $d_2(\delta) = d_2(\delta, t)$ при $t=0$.

Доказательство. Из (2.1) с учетом (1.14), (2.2), (2.3), (2.5) последовательно получаем

$$\begin{aligned} C_T(\delta) &= e^{-rT} \mathbb{E}(S_T(r, \delta) - \min_{0 \leq t \leq T} S_t(r, \delta)) = \\ &= S_0 e^{-rT} \left[e^{-\delta T} \mathbb{E} \exp \left\{ \sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \exp \left\{ \min_{0 \leq t \leq T} \left(\sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \right\} \right] = \\ &= S_0 e^{-rT} [e^{-\delta T} e^{rT} - \mathbb{E} e^{m_T}]. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} C_T(\delta) &= S_0 [e^{-\delta T} - e^{-rT} \mathbb{E} e^{m_T}] = \\ &= S_0 \left[e^{-\delta T} - e^{-rT} \int_{-\infty}^0 e^x p(T, x) dx \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Используя (2.7) в (2.23), получаем

$$\begin{aligned} C_T(\delta) &= \\ &= S_0 \left\{ e^{-\delta T} - e^{-rT} \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \times \right. \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{(-x + hT)^2}{2\sigma^2 T} + x \right\} dx + \\ &\quad + \frac{2h}{\sigma^2} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ \frac{2hx}{\sigma^2} + x \right\} \Phi \left(\frac{x + hT}{\sigma \sqrt{T}} \right) dx + \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{(x + hT)^2}{2\sigma^2 T} + x + \frac{2hx}{\sigma^2} \right\} dx \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Вычисление интегралов в (2.24) (см. Приложение) приводит к (2.22). Теорема доказана.

3. Портфель и капитал

Теорема 2. Капитал $X_t(\delta)$ и портфель $\pi_t(\delta) = (\gamma_t(\delta), \beta_t(\delta))$ определяются формулами

$$\begin{aligned} X_t(\delta) &= S_t \{ e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1(\delta, t)) - \\ &\quad - e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(\delta, t)) + \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)} \times \\ &\quad \times e^{-r(T-t)} [\Phi(d_2(\delta, t)) - e^{(r-\delta)(T-t)} \Phi(-d_1(\delta, t))] \}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_t(\delta) &= e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1(\delta, t)) - \\ &\quad - e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(\delta, t)) + \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)} \times \\ &\quad \times e^{-r(T-t)} [\Phi(d_2(\delta, t)) - e^{(r-\delta)(T-t)} \Phi(-d_1(\delta, t))], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\beta_t(\delta) = 0. \quad (3.3)$$

Доказательство. Из [3] следует

$$X_t(\delta) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[f_T(S(r, \delta)) | S_t] = e^{-r(T-t)} F_{T-t}(S_t), \quad (3.4)$$

$$\gamma_t(\delta) = e^{-r(T-t)} \frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t), \quad (3.5)$$

$$\beta_t(\delta) = \frac{1}{B_r} \left[F_{T-t}(S_t) - S_t \frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t) \right]. \quad (3.6)$$

Из (2.1) и (3.4) следует, что вычисления по нахождению $F_{T-t}(s)$ аналогичны вычислениям по нахождению

$C_T(\delta)$ с заменой S_0 на s , T на $(T-t)$ и $\sqrt{T}$ на $\sqrt{T-t}$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} F_{T-t}(s) &= s \{ e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1(\delta, t)) - \\ &\quad - e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(\delta, t)) + \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)} \times \\ &\quad \times e^{-r(T-t)} [\Phi(d_2(\delta, t)) - e^{(r-\delta)(T-t)} \Phi(-d_1(\delta, t))] \}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Использование (3.7) в (3.4)–(3.6) приводит к (3.1)–(3.3). Теорема доказана.

4. Свойства решения

I. Утверждение 2 [5]. В случае стандартного опциона купли, когда $f_t(S) = \max(S_t - K, 0)$, где K – оговоренная цена продажи владельцем опциона рисковом актива в момент исполнения T , решение имеет вид:

$$\tilde{C}_T(\delta) = S_0 e^{-\delta T} \Phi(\tilde{d}_1(\delta)) - K e^{-rT} \Phi(\tilde{d}_2(\delta)), \quad (4.1)$$

$$\tilde{X}_t(\delta) = S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi(\tilde{d}_1(\delta, t)) - K e^{-r(T-t)} \Phi(\tilde{d}_2(\delta, t)), \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_t(\delta) &= e^{-\delta(T-t)} \Phi(\tilde{d}_1(\delta, t)), \\ \tilde{\beta}_t(\delta) &= -(K/B_r) \Phi(\tilde{d}_2(\delta, t)), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1(\delta, t) &= [\ln(S_t/K) + \\ &\quad + (r - \delta + (\sigma^2/2))(T-t)] / \sigma \sqrt{T-t}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_2(\delta, t) &= [\ln(S_t/K) + \\ &\quad + (r - \delta + (\sigma^2/2))(T-t)] / \sigma \sqrt{T-t}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сравним $C_T(\delta)$ и $\tilde{C}_T(\delta)$ при $K=S_0$, когда цена исполнения в случае стандартного опциона равна начальной цене рисковом актива. Из (2.20), (2.21), (4.4) и (4.5) следует, что в этом случае $\tilde{d}_1(\delta) = d_1(\delta)$, $\tilde{d}_2(\delta) = d_2(\delta)$ и формула (4.1) принимает вид

$$\tilde{C}_T(\delta) = S_0 [e^{-\delta T} \Phi(d_1(\delta)) - e^{-rT} \Phi(d_2(\delta))]. \quad (4.6)$$

Тогда согласно (2.22), (4.8)

$$\begin{aligned} C_T(\delta) &= \tilde{C}_T(\delta) + S_0 \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)} \times \\ &\quad \times e^{-rT} [\Phi(d_2(\delta)) - e^{(r-\delta)T} \Phi(-d_1(\delta))] = \tilde{C}_T(\delta) + \Delta C_T(\delta). \end{aligned}$$

Из (2.20), (2.21) и свойства $\Phi(y_2) > \Phi(y_1)$ при $y_2 > y_1$ следует, что $\Delta C_T(\delta) > 0$, т.е. $C_T(\delta) > \tilde{C}_T(\delta)$. Следовательно, при $K=S_0$ цена опциона купли с последствием всегда больше цены стандартного опциона купли. Очевидно, что при цене исполнения опциона, равной $\min_{0 \leq t \leq T} S_t$, риск его неисполнения ниже, нежели при цене исполнения $K=S_0$. Поскольку за меньший риск необходимо больше платить, то этим и объясняется полученное свойство.

II. Если в случае стандартного опциона капитал формируется из рисковом и безрисковом активов ($\tilde{\gamma}_t(\delta) \neq 0, \tilde{\beta}_t(\delta) \neq 0$), см. (4.3), причем безрисковом активы берутся в долг ($\beta_t(\delta) < 0$), то в случае опциона с последствием капитал формируется только на основе рисковом актива $\beta_t(\delta) = 0$. Последнее объясняется тем, что платежная функция зависит только от цены рисковом актива.

III. Теорема 3. Асимптотические свойства решения заключаются в следующем:

1. $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \gamma_i(\delta) = e^{-\delta(T-t)} - e^{-r(T-t)}$; $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \gamma_i(\delta) = e^{-\delta(T-t)}$;
2. $\lim_{\sigma \rightarrow 0} X_i(\delta) = S_i(e^{-\delta(T-t)} - e^{-r(T-t)})$; $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} X_i(\delta) = S_i e^{-\delta(T-t)}$;
 $\lim_{S_i \rightarrow 0} X_i(\delta) = 0$; $\lim_{S_i \rightarrow \infty} X_i(\delta) = \infty$;
3. $\lim_{\sigma \rightarrow 0} C_T(\delta) = S_0(e^{-\delta T} - e^{-rT})$; $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} C_T(\delta) = S_0 e^{-\delta T}$;
 $\lim_{S_0 \rightarrow 0} C_T(\delta) = 0$; $\lim_{S_0 \rightarrow \infty} C_T(\delta) = \infty$.

Доказательство сформулированных результатов проводится непосредственно с использованием свойств функции Лапласа: $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$; $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$; $\Phi(x)$ — непрерывна справа по x .

Экономическая интерпретация этих свойств очевидна: стоимость опциона равна нулю в ситуации, когда предъявлять его к исполнению не имеет смысла; стоимость опциона резко возрастает, когда он всегда будет предъявлен к исполнению.

Обозначения и терминология соответствуют принятым [1–5].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть

$$J_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(x-hT)^2}{2\sigma^2 T} + x\right\} dx. \quad (\text{П.1})$$

Из сравнения (П.1) с (2.14), (2.17), следует: $b=0$, $c=1$, $a=hT$, $d=\sigma^2 T$. Тогда согласно (2.17) с учетом (2.3) из (П.1) следует

$$J_1 = e^{(r-\delta)T} \Phi(-\sqrt{T}(((r-\delta)/\sigma) + (\sigma/2))). \quad (\text{П.2})$$

Пусть

$$J_2 = \frac{2h}{\sigma^2} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2} + x\right\} \Phi\left(\frac{x+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right) dx.$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$. Возьмем

$$u = \Phi\left(\frac{x+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad dv = \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2} + x\right\} dx.$$

Тогда

$$du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx,$$

$$v = \frac{\sigma^2}{2h + \sigma^2} \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2} + x\right\}$$

и следовательно

$$J_2 = \frac{2h}{(2h + \sigma^2)} \left[\Phi\left(\frac{h\sqrt{T}}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2} + x - \frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx \right]. \quad (\text{П.3})$$

Как и при нахождении J_1 для вычисления интеграла в (П.3) применим Утверждение 1. Из сравнения (П.3) с (2.14), (2.17) следует: $b=0$, $c=(2h/\sigma^2)+1$, $a=-hT$, $d=\sigma^2 T$. Тогда согласно (П.2) с учетом (2.3) из (П.3) следует

$$J_2 = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)}\right) \times$$

$$\times \left[-e^{(r-\delta)T} \Phi\left(-\sqrt{T}\left(\frac{r-\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \Phi\left(\sqrt{T}\left(\frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\right) \right]. \quad (\text{П.4})$$

Пусть

$$J_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T} + x + \frac{2hx}{\sigma^2}\right\} dx. \quad (\text{П.5})$$

Из сравнения (П.5) с (П.3) следует, что вычисление J_1 аналогично вычислению интеграла в (П.3), т.е., согласно (П.4),

$$J_3 = e^{(r-\delta)T} \Phi(-\sqrt{T}((r-\delta)/\sigma + \sigma/2)). \quad (\text{П.6})$$

Использование (П.2), (П.4), (П.6) в (2.24) с учетом (2.20), (2.21) и свойства $1=\Phi(z)+\Phi(-z)$ приводит к (2.22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974. — 696 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
3. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. — 1994. — Т. 39 (Вып. 1). — С. 80–129.
4. Ширяев А.Н. Стохастические проблемы финансовой математики // Обзорные прикладной и промышленной математики. — 1994. — Т. 1 (Вып. 5). — С. 780–820.
5. Аникина А.В., Демин Н.С. Нахождение и анализ свойств цены, капитала и портфеля в случае непрерывных опционов купли и продажи с выплатой дивидендов // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: Труды Междунар. конф. — Минск: БГУ, 2005. — С. 27–35.