ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 168 1969

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ. I

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

Метод дискретного измерения непрерывных величин находит самое широкое распространение в измерительной технике, особенно при контроле распределенных технологических параметров. В этом методе непрерывная регистрация распределения параметра $P(l)$ по длине поля L заменяется дискретными измерениями в отдельных точках поля $l_к$. При необходимости представить непрерывное изменение параметра $P(l)$ на отрезке $[0, L]$ по дискретным отсчетам $P(l_к)$ используют интерполяционные формулы.

В статье рассматриваются основные вопросы применения тригонометрической интерполяции для решения этой задачи.

Тригонометрические интерполяционные полиномы, благодаря своей связи с рядами Фурье и гармоническим анализом, весьма наглядны и удобны для приложений.

Каноническая форма тригонометрического полинома имеет вид

$$T_n(l) = A + \sum_{m=1}^{n} \left(a_m \cos \frac{2\pi}{L} ml + b_m \sin \frac{2\pi}{L} ml \right). \tag{1}$$

При этом коэффициенты

$$A = \frac{1}{2n+1} \sum_{к=0}^{2n} P(l_к); \qquad a_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{к=0}^{2n} P(l_к) \cos \frac{2\pi}{L} ml_к;$$

$$b_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{к=0}^{2n} P(l_к) \sin \frac{2\pi}{L} ml_к \tag{2}$$

называются коэффициентами Фурье-Лагранжа [1]. В этих выражениях $N = 2n+1$ — число точек отсчета (узлов интерполирования), равномерно распределенных по длине поля L с шагом $h = L/2n+1$. Интерполяционная формула (1) может быть записана также в виде

$$T_n(l) = \sum_{к=0}^{2n} P(l_к) \frac{\sin (2n+1) \frac{2\pi}{L} \frac{l-l_к}{2}}{(2n+1) \sin \frac{2\pi}{L} \frac{l-l_к}{2}} = \sum_{к=0}^{2n} P(l_к)\, t_к^{(n)}(l). \tag{3}$$

В целях упрощения записи в дальнейшем будем пользоваться нормированной переменной $x = 2\pi l/L$, $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ и функцией действительного переменного $f(x)$.

1. Определение неустранимой погрешности интерполирования. Известно, что интерполирование по приближенным отсчетам, полученным в результате измерений, приводит к появлению так называемой неустранимой погрешности интерполирования $\sigma_н$ [2]. В отличие от устранимой погрешности $\sigma_у$ неустранимая погрешность не может быть уменьшена за счет увеличения числа узлов: она определяется погрешностью измерения отсчетов σ_0.

Под неустранимой погрешностью понимают среднеквадратичное уклонение интерполяционного полинома $T_n(x)$, вычисленного по приближенным отсчетам $f(x_{кj})$, от полинома, построенного по точным значениям $f(x_к)$. Согласно сказанному имеем

$$\sigma_н = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{к=0}^{2n}\sum_{j=1}^{q} P_j\,[f(x_к)\,t_к^{(n)}(x) - f(x_{кj})\,t_к^{(n)}(x)]^2\,dx}, \tag{1.1}$$

где

q — число измерений в точке $x_к$,

P_j — вероятность появления j-го результата измерения $f(x_{кj})$.

Величина

$$\sum_{j=1}^{q} P_j\,[f(x_к) - f(x_{кj})]^2 = \sigma_{fк}^2 \tag{1.2}$$

является среднеквадратичной погрешностью измерения параметра в точке $x_к$. Поскольку измерения во всех точках поля производятся одним и тем же прибором с погрешностью σ_0, т. е.

$$\sigma_{f^0} = \sigma_{f^1} = \ldots \sigma_{f^{2n}} = \sigma_0,$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi}[t_к^{(n)}(x)]^2\,dx = \frac{2\pi}{2n+1},$$

то окончательно

$$\sigma_н = \sigma_0. \tag{1.3}$$

Таким образом, среднеквадратичная неустранимая погрешность тригонометрической интерполяционной формулы равна среднеквадратичной погрешности измерения отсчетов σ_0. Наличие неустранимой погрешности накладывает определенное ограничение на точность приближения и выбор числа узлов.

2. Оценка коэффициентов Фурье — Лагранжа. Среднеквадратичная погрешность интерполирования определяется суммой отброшенных членов интерполяционного ряда (1), т. е. в общем случае

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{к=n+1}^{\infty}(a_к^2 + b_к^2)}. \tag{2.1}$$

При этом величина $(\sigma_n^2 - \sigma_{n+1}^2)$, на которую уменьшается общая погрешность при добавлении к ряду нового члена, равна

$$\sigma_{n,\,n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)}. \tag{2.2}$$

Для определения указанных величин необходимо оценить величину коэффициентов a_n и b_n.

Согласно (2) имеем

$$a_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{\kappa=0}^{2n} f(x_\kappa) \cos m x_\kappa. \tag{2.3}$$

Применив к этому ряду преобразование Абеля, получим

$$a_m = \frac{2}{2n+1} \left[\sum_{\kappa=0}^{2n-1} [f(x_\kappa) - f(x_{\kappa+1})] S_\kappa + f(x_{2n}) \cdot S_{2n} \right], \tag{2.4}$$

где

$$S_\kappa = \sum_{\nu=0}^{\kappa} \cos m x_\nu. \tag{2.5}$$

Так как

$$S_\kappa = \frac{1 - e^{imh(\kappa+1)}}{1 - e^{imh}}, \tag{2.6}$$

где $h = 2\pi/2n+1$ и $S_{2n} = 0$, то для оценки модуля коэффицента имеем неравенство

$$|a_m| \leqslant \frac{2}{2n+1} \max |S_\kappa| \cdot \sum_{\kappa=0}^{2n-1} |f(x_\kappa) - f(x_{\kappa+1})|. \tag{2.7}$$

Справедливо следующее неравенство

$$\max |S_\kappa| \leqslant \frac{2n+1}{4m}. \tag{2.8}$$

Тогда

$$|a_m| \leqslant \frac{V}{2m}, \tag{2.9}$$

где

$$V = \sum_{\kappa=0}^{2n-1} |f(x_\kappa) - f(x_{\kappa+1})|. \tag{2.10}$$

Соответственно

$$\sigma_n^2 = \frac{V^2}{4} \cdot \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2} \tag{2.11}$$

и

$$\sigma_{n,\,n+1}^2 = \frac{V^2}{4n^2}. \tag{2.12}$$

В полученных формулах величина V определяется только свойствами интерполируемой функции $f(x)$. Ограниченность этой величины при неограниченном возрастании n является необходимым и достаточным условием сходимости интерполяционного ряда (1).

Для проведения численных расчетов погрешности интерполирования необходимо оценить величину V. В следующей статье дается оценка этой величины для случайного параметрического поля.

Выводы

1. Определена неустранимая погрешность интерполирования тригонометрическими полиномами, построенными по приближенным отсчетам.

2. Дается выражение для расчета устранимой погрешности интерполирования, определяемой числом членов интерполяционного ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. Изд-во. «Мир», 1965.
2. И. С. Березин, И. П. Жидков. Методы вычислений, т. I, Изд-во Физматгиз, 1962.