

К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ФУНКЦИИ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДАХ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

Известно, что под импульсной функцией объекта (системы, цепи и т. п.) понимают реакцию этого объекта на возмущение в виде импульса бесконечно большой амплитуды и бесконечно малого по длительности (энергия такого импульса равна единице). Математически такое возмущение описывается δ -функцией. Однако практически оно не может быть реализовано при экспериментальном определении импульсной функции. Для этих целей приходится прибегать к импульсам конечной амплитуды и конечной длительности δ , поэтому выходной сигнал будет описываться временной функцией $g(t)$, отличной от импульсной $\gamma(t)$.

Обычно считается, что если $\delta \ll \tau$, где τ — постоянная объекта, то выходной сигнал $g(t)$ мало отличается от импульсной функции $\gamma(t)$, и изменением формы можно пренебречь. Однако в ряде случаев, в частности при экспериментальном методе определения реакции объекта на внешнее возмущение, для которого δ сравнимо с τ и особенно в измерительных системах, использующих кодоимпульсную модуляцию, учет этого факта становится необходимым.

В данной работе исследуется изменение формы выходного сигнала объекта по сравнению с импульсной характеристикой, когда длительность входного сигнала δ сравнима с постоянной объекта τ .

Ниже будем считать, что импульсная функция объекта $\gamma(t)$ известна, и требуется определить реакцию этого объекта на импульс прямоугольной формы длительностью δ и амплитудой $1/\delta$, т. е. импульс единичной энергии. Аналитически такой сигнал записывается в следующем виде:

$$x(t) = \frac{1}{\delta} [\sigma(t) - \sigma(t - \delta)], \quad (1)$$

где

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

— функция единичного скачка.

Решение поставленной задачи, как известно, дается интегралом Дюамеля:

$$g(t) = \int_0^t x(t - \lambda) \gamma(\lambda) d\lambda. \quad (2)$$

Считая $\gamma(t)$ четной функцией и учитывая (1), (2), запишется

$$g(t) = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \gamma(t + \xi) d\xi. \quad (3)$$

Соотношение (3) можно истолковать следующим образом: функция $g(t)$ получается из $\gamma(t)$ путем локального усреднения последней вокруг точки t на интервале $[-\delta/2, \delta/2]$. Иными словами, функция $g(t)$ в точке t равна среднему значению функции $\gamma(t)$ на интервале $[-\delta/2, \delta/2]$ с центром в точке t . Такое усреднение придает функции $g(t)$ более плавный характер изменения, причем это „сглаживание неровностей“ сказывается тем сильнее, чем больше величина интервала δ , на который распространяется усреднение [1].

Выяснив характер связи функций $g(t)$ и $\gamma(t)$, нетрудно определить величину отклонения одной функции от другой. С этой целью представим функцию $\gamma(t)$ рядом Тейлора в окрестности точки t :

$$\gamma(t + \xi) = \gamma(t) + \xi \gamma'(t) + \frac{\xi^2}{2} \gamma''(t) + \dots \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) и рассматривая ξ как переменную, проинтегрируем по промежутку $[-\delta/2, \delta/2]$. Получим

$$g(t) = \gamma(t) + \frac{\delta^2}{24} \gamma''(t). \quad (5)$$

Отсюда определяем отклонение $g(t)$ от $\gamma(t)$:

$$g(t) - \gamma(t) = \Delta(t) = \frac{\delta^2}{24} \gamma''(t). \quad (6)$$

Из полученного соотношения видно, что при $\delta \rightarrow 0$ $g(t) \rightarrow \gamma(t)$, т. е., когда длительность входного сигнала уменьшается, реакция объекта стремится к импульсной характеристике в каждой точке t . С помощью соотношения (6) можно оценить максимальное отклонение функции $g(t)$ от $\gamma(t)$ при данном δ . Обозначая через

$$M_2 = \max |\gamma''(t)|,$$

имеем

$$\Delta = \frac{\delta^2}{24} M_2. \quad (7)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим один из наиболее распространенных элементов информационных систем, использующих принцип кодоимпульсной модуляции, фильтр низкой частоты [2]. Импульсная функция фильтра

$$\gamma(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{\tau} t}{\frac{\pi}{\tau} \cdot t}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (3), находим

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau}{\delta} \left[Si \frac{\pi}{\tau} \left(t + \frac{\delta}{2} \right) - Si \frac{\pi}{\tau} \left(t - \frac{\delta}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

Функция (9) при малых значениях δ незначительно отличается от функции (8), однако, при возрастании δ это отличие становится

существенным. В частности, это сопровождается некоторым снижением амплитуды центрального максимума и его уширением вокруг точки $t=0$, а также резким снижением амплитуд вторичных максимумов функции (9) и их быстрым затуханием. Учет этого факта весьма существен при проектировании систем дискретной выборки [3].

Формула (9) справедлива для любых значений δ и τ . В частности, при $\delta = \tau$

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \left[\text{Si} \pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \right) - \text{Si} \pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (10)$$

В измерительных системах часто бывает важно знать изменение сигнала $g(t)$ в зависимости от δ в области центрального максимума (в момент взятия отсчета). Для функции (9)

$$\gamma''(0) = -\frac{1}{3} \frac{\pi^2}{\tau^2} \quad (11)$$

и, подставляя в (6), находим

$$\Delta(0) = -\frac{\pi^2}{72} \frac{\delta^2}{\tau^2}, \quad (12)$$

откуда видно, что в точке $t=0$ происходит снижение амплитуды в зависимости от отношения δ/τ . Для функции (10) это снижение равно $\pi^2/72 = 0,137$. Совершенно аналогично определяется отклонение для всех остальных интересующих точек.

Выводы

1. Рассмотрена связь между импульсной характеристикой объекта и его реакцией на прямоугольный сигнал любой длительности.
2. Дана методика расчета отклонения указанных величин (п. 1) друг от друга при любых соотношениях параметров объекта и входного возмущения. Применение методики показано на примере анализа фильтра низкой частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа, стр. 237, Физматгиз, 1961.
2. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике, стр. 415, изд-во ИЛ, 1963.
3. С. Мэзон, Г. Циммерман. Электронные цепи, сигналы и системы, стр. 537, изд-во ИЛ, 1962.