

потери через наружные поверхности бруса и бревна (кривые 2) вначале резко растут, достигая при $\tau \approx 1$ ч максимальных значений, а затем уменьшаются, стремясь к своим стационарным значениям. Тепловые потери через внутренние поверхности бруса и бревна (кривые 1) с самого начала постоянно медленно растут, также асимптотически стремясь к своим стационарным значениям только снизу. После выхода процесса теплопереноса на стационарный режим тепловые потери через внутреннюю и наружную поверхности каждого из фрагментов уравниваются, что служит одним из подтверждений достоверности расчетов. При этом тепловые потери через утепленный брус ниже, чем через утепленное бревно: 6,3 Вт и 7,8 Вт соответственно.

Таким образом, на основании математического моделирования процессов нестационарного теплопереноса в неоднородных брус и бревне выявлены

закономерности распределения температур и плотностей тепловых потоков в их поперечных сечениях; проведен сравнительный анализ теплозащитной эффективности. Показано, что снижение теплопроводности утеплителя и использование деревянных фрагментов в форме утепленного бруса вместо утепленного бревна приводит к повышению теплозащитной эффективности деревянных ограждений. Разработанная численная технология позволяет проводить тепловую экспресс-диагностику наружных утепленных деревянных стен с различными теплофизическими и геометрическими характеристиками древесины и утеплителя в реальных условиях эксплуатации.

Работа выполнена по программе Федерального агентства по образованию "Развитие научного потенциала высшей школы" (Подпрограмма 2. Прикладные исследования и разработки по приоритетным направлениям науки и техники), код проекта 7756.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СНиП II-3-79*. Строительная теплотехника / Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 2000. – 29 с.
2. Пат. 38793 Россия. МПК E04C 3/292. Деревянный брус / А.Н. Хуторной, С.В. Хон, А.Г. Козырев, А.В. Колесникова, О.И. Недавний, А.Я. Кузин, Н.А. Цветков. Приоритет 22.03.2004. Зарегистрирован 10.07.2004. Бюл. № 19. – 2 с.: 1 ил.
3. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 195 с.
4. Гришин А.М., Берцун В.Н. Итерационно-интерполяционный метод и теория сплайнов // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 214. – № 4. – С. 751–754.
5. Гришин А.М., Зинченко В.И., Ефимов К.Н., Субботин А.Н., Якимов А.С. Итерационно-интерполяционный метод и его приложения. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2004. – 318 с.
6. Гришин А.М., Кузин А.Я., Миков В.Л., Сеницын С.П., Трушников В.Н. Решение некоторых обратных задач механики реагирующих сред. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1987. – 247 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
9. Богословский В.Н. Строительная теплофизика. – М.: Высшая школа, 1970. – 376 с.

УДК 621.923

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЦЕНТРАЛЬНЫМ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ С ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

Р.К. Калбиев

Азербайджанский архитектурно-строительный университет, г. Баку

E-mail: elektroset@box.az

Работа посвящена изучению напряженного состояния шестиугольной пластинки, ограниченной снаружи шестиугольным контуром, а внутри центрально расположенным отверстием, близким к круговому. На основе методов теории функции комплексного переменного и конформного отображения рассмотрено напряженное состояние для неодносвязных областей. Искомые функции ищутся в виде степенных рядов, коэффициенты которых определяются решением совокупности некоторых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Работоспособность деталей машин и элементов конструкций в виде пластин зависит от наличия в них концентраторов напряжений типа полостей, щелей, шероховатостей и т.д. Поэтому изучение распределения напряжений и деформаций около таких дефектов представляет теоретический и практический интерес.

Как известно, в отличие от идеальной, изображаемой на чертежах, реальная поверхность тел (деталей) никогда не бывает абсолютно гладкой, а всегда имеет микро- или макроскопические неровности, образующие шероховатость. Качество обработки поверхности деталей машиностроения существенно влияет на их прочность. Так, например,

повышение чистоты обработки при прочих равных условиях увеличивает статическую прочность, особенно хрупкую, и, в большей степени, предел выносливости. Эти факты объясняются влиянием микрогеометрии обработанной поверхности на напряженное поле. Таким образом, неровности, образующиеся при обработке рабочей поверхности, являются эффективными концентраторами напряжений и могут в несколько раз снижать прочность.

Исследуем однородную изотропную пластинку, состоящую из двухсвязной области S , ограниченной снаружи шестиугольным контуром L_1 , а изнутри центрально расположенным отверстием, близким к круговому L_2 (рис. 1).

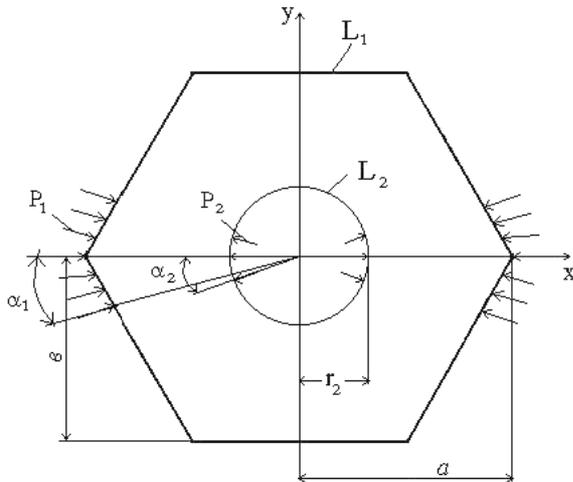


Рис. 1. Шестиугольная пластинка, ослабленная центральным круглым отверстием с шероховатостью

Введем полярную систему координат. Представим границу внутреннего контура пластинки в следующем виде (рис. 2):

$$\rho(\theta) = r_2 + \delta(\theta),$$

где θ – аргумент точки контура L_2 .

Запишем второе слагаемое в правой части уравнения в виде $\delta(\theta) = \varepsilon H(\theta)$. Здесь ε – малый параметр, равный отношению высоты наибольшего выступа профиля к радиусу отверстия или отношению глубины наибольшего отступа профиля к радиусу отверстия; $H(\theta)$ – функция, независимая от малого параметра.

Компоненты тензора напряжений ищем в виде разложений по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^{(0)} + \varepsilon \sigma_r^{(1)} + \dots, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta^{(0)} + \varepsilon \sigma_\theta^{(1)} + \dots, \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{r\theta}^{(0)} + \varepsilon \tau_{r\theta}^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

в которых для упрощения задачи пренебрегаем членами, содержащими малый параметр ε в степени выше первой. В соотношениях (1) $\sigma_r^{(0)}$, $\sigma_\theta^{(0)}$ и $\tau_{r\theta}^{(0)}$ – напряжения нулевого приближения, а $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\theta^{(1)}$ и $\tau_{r\theta}^{(1)}$ – напряжения первого приближения. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений равновесия.

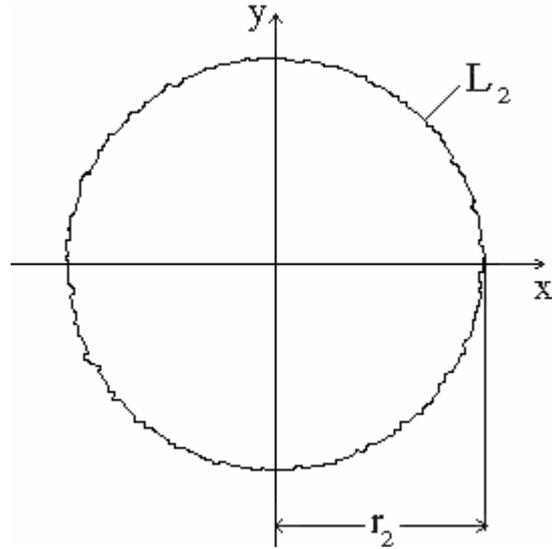


Рис. 2. Шероховатость внутреннего контура

Граничные условия на внешнем шестиугольном контуре будут [1] в нулевом приближении такие же, как в исходной задаче

$$f_i^{(0)}(t) = f_i(t)$$

и в первом приближении будут нулевыми

$$f_i^{(1)}(t) = 0.$$

Значения компонент напряжений ($\sigma_r^{(0)}$, $\sigma_\theta^{(0)}$, $\tau_{r\theta}^{(0)}$, $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\theta^{(1)}$, $\tau_{r\theta}^{(1)}$) при $r = \rho(\theta)$ найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = r_2$.

$$\sigma_r^{(0)}|_{r=\rho} = \sigma_r^{(0)}|_{r=r_2} + \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r}|_{r=r_2} \varepsilon H(\theta) + \dots$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)}|_{r=\rho} = \tau_{\theta r}^{(1)}|_{r=r_2} + \frac{\partial \tau_{\theta r}^{(1)}}{\partial r}|_{r=r_2} \varepsilon H(\theta) + \dots$$

Граничные условия на контуре L_2 представим в виде

$$\sigma_n = \sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_\theta \sin^2 \varphi - 2\tau_{r\theta} \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

$$\tau_{tn} = (\sigma_\theta - \sigma_r) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{r\theta} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) = 0. \quad (3)$$

Если взять $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ с точностью до величин первого порядка малости и подставить выражения (2) в граничные условия (3), то после преобразования краевые условия при $r = r_2$ получим в следующем виде:

$$\sigma_r^{(0)} = 0; \tau_{r\theta}^{(0)} = 0,$$

$$\sigma_r^{(1)} + H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} - 2\tau_{r\theta}^{(0)} \frac{1}{r_2} \frac{dH(\theta)}{d\theta} = 0,$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)} + H(\theta) \frac{\partial \tau_{\theta r}^{(0)}}{\partial r} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \frac{1}{r_2} \frac{dH(\theta)}{d\theta} = 0. \quad (4)$$

Решение в нулевом приближении является известным. При этом на контуры пластинки действуют кусочно-равномерно распределенные нагрузки с интенсивностями P_1 и P_2 соответственно под углом $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ (рис. 1).

Перейдем далее к представлению компонент напряжения при помощи функций φ, ψ . С этой целью найдем выражение для усилия, действующего на элемент какого-либо профиля, проведенного в плоскости Oxy .

Рассмотрим на этой плоскости какую-либо дугу AB . Для определенности припишем ей некоторое положительное направление, а именно от A к B , и будем проводить нормаль n к ней вправо по отношению к наблюдателю, движущемуся в положительном направлении. Иными словами, предположим, что положительные направления нормали и касательной расположены друг относительно друга так же, как направления осей Ox, Oy (рис. 3). Под усилием $(X_n ds, Y_n ds)$, действующим на элемент ds дуги контура, будем, как всегда, подразумевать усилие, действующее со стороны положительной нормали [1].

Найдем выражение для главного вектора усилий, приложенных к данной дуге AB , расположенной в области S , занятой телом. Обозначим через (X, Y) главный вектор.

Если считать точку A зафиксированной, а точку B – переменной, и обозначить ее аффикс через $z=x+iy$, получим:

$$\begin{aligned} \phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} &= i \int_{AB} (X_n + iY_n) ds + \text{const} = \\ &= i(X + iY) + \text{const}, \end{aligned} \quad (5)$$

где (X, Y) представляет собой главный вектор усилий, приложенных со стороны положительной нормали к произвольной дуге, соединяющей фиксированную точку A с переменной точкой $B(x, y)$, причем положительная нормаль считается обращенной вправо по отношению к наблюдателю, движущемуся по рассматриваемой дуге от A к B (рис. 3).

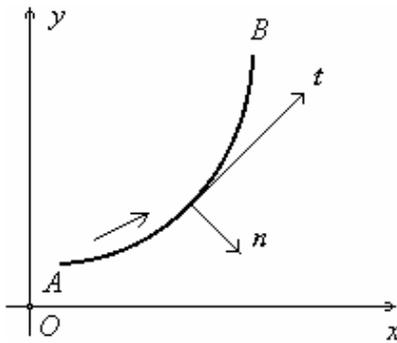


Рис. 3. Представление компоненты напряжений

В случае задачи I граничное условие можно выразить двумя различными способами. Мы укажем только один из них. Способ, на котором мы остановимся, заключается в следующем. Пусть $X_n(t), Y_n(t)$ или, при иных обозначениях, $X_n(s), Y_n(s)$, – заданные значения компонент внешнего напряжения в данной точке t контура; через s обозначена, как всегда, дуга контура, соответствующая точке t , отсчитываемая в положительном направлении от некоторой фиксированной точки t_0 . За положительное направление на L примем то, что остается в области S слева.

На основании формулы (5) имеем:

$$\begin{aligned} \phi(t) + t\overline{\phi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= i \int_{t_0}^t (X_n + iY_n) ds = \\ &= i \int_0^s (X_n + iY_n) ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение в левой части формулы (6) следует понимать как граничное значение выражения

$$\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}$$

при стремлении z к точке t контура L . Это граничное значение, как легко видеть, существует вследствие принятого нами условия относительно непрерывности компонент напряжения вплоть до контура L . Заметим еще, что формулу (6) мы написали, опираясь на формулу (5), которая была выведена в предположении, что дуга, обозначенная через AB , целиком расположена в S . Однако, как легко видеть, в нашем случае последняя формула применима и тогда, когда дуга AB принадлежит границе L ; это вытекает из того же условия непрерывности компонент напряжения вплоть до границы [1].

Таким образом, граничное условие задачи I выражается формулой (6), понимаемой в указанном выше смысле.

Как известно [1], определение напряженного состояния в данной области приводится к нахождению двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексных переменных, удовлетворяющих определенным граничным условиям на L_j :

$$\phi(t) + \overline{\phi(t)} + \overline{\psi(t)} = f_j(t) + C_j, \quad t \in L_j, \quad (j = 1, 2). \quad (7)$$

Здесь t – аффикс точек контура L_j ; C_j – вещественные постоянные (одну из которых, например C_1 , примем равной нулю, а C_2 подлежит определению). $f_j(t)$ примем в виде степенного ряда, т.е.

$$f_1(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} H_{\nu}^{(1)} \tau^{\nu}, \quad f_1(t) = 0, \quad (8)$$

где $\tau = e^{i\theta}$, τ – аффикс, а θ – аргумент точки контура единичной окружности, определяются из условия непрерывности функций $f_j(t)$ на контуре L_1 .

Аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в трехсвязной области S ищем в виде

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{\kappa=0}^N a_{\kappa}^{(1)} \left(\frac{z}{A}\right)^{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} e_{\kappa}^{(1)} \left(\frac{r_2}{z}\right)^{\kappa}, \\ \psi(z) &= \sum_{\kappa=0}^N A_{\kappa}^{(1)} \left(\frac{z}{A}\right)^{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} E_{\kappa}^{(1)} \left(\frac{r_2}{z}\right)^{\kappa}. \end{aligned} \quad (9)$$

На основе геометрических и силовых симметрий (это есть условие равенства нулю главного момента внешних усилий) коэффициенты $a_{\kappa}^{(1)}, e_{\kappa}^{(1)}, A_{\kappa}^{(1)}, E_{\kappa}^{(1)}$ ($\kappa=0, \infty$) будут вещественными [1]. N – верхний предел суммы. Выбирается в зависимости от точности, с которой желательно получить искомое решение. Формально, лишь с целью несколько облегчить математические выкладки, верхний предел возьмем равным бесконечности, в последующем, для иллю-

страции решения фактически будем рассматривать лишь укороченные системы; $A = \frac{a + \epsilon}{2}$.

Внешность правильного многоугольника L_1 , как известно, отображается на внешность единичного круга в плоскости ξ с помощью следующей функции [3]

$$z = A\tau \left(1 + \frac{m}{\tau^q} \right), \quad (10)$$

где $|m| = \frac{a - \epsilon}{a + \epsilon}$, a и ϵ соответственно радиусы окружностей, описанных вокруг многоугольника и вписанных в многоугольник L_1 ; q – число осей симметрии (число сторон), $q=6$.

Знак m определяет форму расположения контура L_1 в плоскости $z=x+iy$.

Когда $m>0$, большая ось симметрии многоугольника совпадает с осью абсцисс, а когда $m<0$, то малая ось симметрии многоугольника совпадает с осью абсцисс. Очевидно, что в (4) при $m=0$ контур L_0 превращается в окружность, а при $q=2$ в эллипс. При $q>2$ абсолютное значение m может быть определено по формуле:

$$|m| = \frac{1}{(q-1)^2},$$

и для шестиугольника $q=6$; $m=1/25$.

Далее, принимая во внимание (8), (9) и (10) в граничных условиях (7) на L_j ($j=1, 2$), производятся математические выкладки с таким расчетом, чтобы из преобразованных краевых условий можно было бы сравнить коэффициенты при одинаковых степенях соответствующих переменных.

Таким образом, в конечном итоге, определение коэффициентов $a_k^{(1)}$, $e_k^{(1)}$, $A_k^{(1)}$, $E_k^{(1)}$, ($k=0, N$) разложений в (9), сведено к решению четыре групп взаимосвязанных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

После этого по формуле Колосова-Мухселешвили определяются компоненты напряжений σ_r , σ_θ в точках произвольно взятых центральных сечений пластинки:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)} &= 4 \operatorname{Re}[\phi'(z)], \\ \sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)} + 2i\tau_{\theta r}^{(0)} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)]e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Перейдем к решению задачи в первом приближении [2].

Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_1(t) + \overline{\phi_1(t)} + \overline{\psi_1(t)} &= f_j^{(1)}(t) + C_j^{(1)}, \quad t \in L_j, \quad (j=1, 2), \\ f_1(t) = 0, \quad f_2^{(1)}(t) &= -ir_2 \int_0^\theta (X_n + iY_n) d\theta, \quad (j=1, 2), \end{aligned}$$

где $t=r_2 e^{i\theta}$.

$$X_n + iY_n = -(N + iT)e^{i\theta}.$$

Будем считать заданными нормальную и касательную компоненты N и T внешнего напряжения,

действующего на границу L_2 (если заданы X_n , Y_n , то тем самым будут заданы N , T , и наоборот). Мы будем считать, что N представляет собой проекцию напряжения, приложенного к дуге границы, на внешнюю нормаль n , а T – проекцию того же напряжения на касательную к границе, направленную влево, если смотреть вдоль n .

При $r=r_2$, из выражения (4)

$$N = \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_2} = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}^{(0)} \frac{1}{r_2} \frac{dH(\theta)}{d\theta},$$

$$T = \tau_{\theta r}^{(1)} \Big|_{r=r_2} = -(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \frac{1}{r_2} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \tau_{\theta r}^{(0)}}{\partial r}.$$

Для каждого профиля обработанной поверхности (реализация шероховатой поверхности) внутреннего контура пластинки функцию $H(\theta)$ можно разложить в степенной ряд на отрезке $[0; 2\pi]$. Используя формулы (11), разложение функции $H(\theta)$, представим правую часть краевого условия $f_2^{(1)}(t)$ в виде степенного ряда при $r=r_2$

$$f_2^{(1)}(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} H_v^{(2)} \tau^v; \quad \tau = e^{i\theta}.$$

Исследование распределения напряжений возле границ пластинки с неровностями на контуре можно проводить в детерминистической и случайной постановке. Для расчетов и был принят следующий закон распределения шероховатости:

$$H(\theta) = d \cos \frac{2\pi\theta}{l}, \quad (12)$$

d – высота выступов, а l – шаг.

Дальнейший ход решения задачи аналогичен нулевому приближению. Для удобства в первом приближении сохранены обозначения для искоемых коэффициентов. Таким образом, в первом приближении для определения коэффициентов $a_k^{(1)}$, $e_k^{(1)}$, $A_k^{(1)}$, $E_k^{(1)}$, ($k=0, N$) получены 4 группы бесконечных систем линейно алгебраических уравнений, отличающихся от нулевого (что очень удобно при расчетах на ПЭВМ) правых частей системы.

Полученные решения в зависимости от параметров шероховатости (12), геометрических (r_2/ϵ) и силовых факторов (P_1 , P_2 , α_1 , α_2) можно распространить на решение многочисленных частных задач.

В случае, когда пластинка подвержена наружному давлению при $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=90^\circ$, $P_1=P$, $P_2=0$, $\epsilon=0$ (в нулевом приближении), $\epsilon=0,04$, $r_2/\epsilon=0,5$ (рис. 4) определены компоненты напряжений σ_r , σ_θ в сечении $x=0$. В характерных точках проверены граничные условия и выяснено, что наибольшее отклонение не превышает 1 %.

Нами были рассмотрены следующие конкретные примеры:

$\alpha_1=90^\circ$, $P_1=P$, $P_2=0$, $\epsilon=0,04$, $r_2/\epsilon=0,5$ (рис. 4, а).

$\alpha_1=30^\circ$, $P_1=P$, $P_2=0$, $\epsilon=0,04$, $r_2/\epsilon=0,5$ (рис. 4, б).

$\alpha_1=30^\circ$, $P_1=P$, $P_2=0$, $\epsilon=0$, $r_2/\epsilon=0,5$ (рис. 4, в).

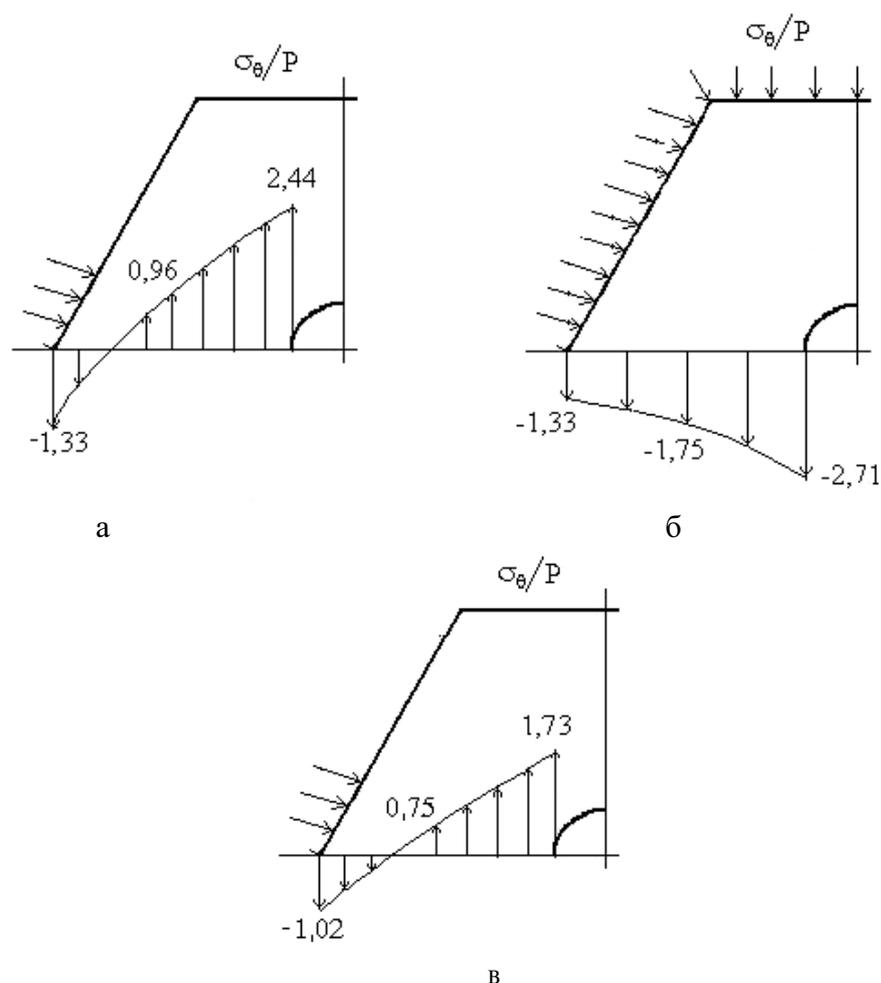


Рис. 4. Эпюры касательных напряжений

Выводы

Анализ численных примеров показывает, что влияние шероховатости сказывается на увеличении коэффициентов концентрации напряжений, это влияние имеет место в поверхностном слое, не превышающем утроенного размера максимальной впадины или выступа. Отношения кратчайшего расстояния от центра отверстий до наружного контура

к радиусу отверстий (θ/r_2) имеют существенное влияние на концентрацию напряжений. Когда отношение r_2/θ увеличивается, показатели шероховатости ε существенно влияют на концентрации напряжений. Показано, что с увеличением показателя шероховатости ε концентрация напряжений вначале постепенно, а в дальнейшем резко увеличивается. Это на внутреннем контуре более существенно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 648 с.
2. Калбиев Р.К. Исследование напряженного состояния в квадратной пластинке, ослабленной двумя круглыми отверстиями

с шероховатостью, под действием кусочно-равномерно распределенных контурных нагрузок // Ученые записки АзИСУ (Баку). – 2000. – № 1, 2. – С. 240–244.

3. Кулиев С.А. Двумерные задачи теории упругости. – М.: Стройиздат, 1991. – 351 с.