

К ВОПРОСУ О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ТЕЛ С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Г. П. БОЙКОВ, Ю. А. КОРОЛЕНКО

(Представлено проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

В электротехнике очень часто возникает вопрос о температурном поле тела с внутренним тепловыделением. Нередко эти тела имеют неодинаковые значения коэффициентов теплопроводности λ по осям координат. В ряде случаев (некоторые типы магнитопроводов, конденсаторы и др.) такие анизотропные тела имеют различные коэффициенты теплоотдачи α на различных участках поверхности тел.

Распределение температур в таком бруске при начале координат в центре симметрии тела описывается уравнениями:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 t(x; y)}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 t(x; y)}{\partial y^2} + w = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial t(0; y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial t(x; 0)}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t(R_1; y)}{\partial x} = \alpha_1 [t(R_1; y) - t_{f_1}];$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial t(x; R_2)}{\partial y} = \alpha_2 [t(R_2; x) - t_{f_2}]. \quad (3)$$

Здесь $2R_1 \ll 2R_2$ — измерения тела, x и y — текущие координаты точек сечения тела, t_{f_1} и t_{f_2} — температуры окружающей среды, w — внутреннее тепловыделение, одинаковое по всему объему тела.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 t(x; y)}{\partial x^2} \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\frac{\partial^2 t(x; y)}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 t(x; y)}{\partial x^2}} \right] = - \frac{w}{\lambda_1},$$

$$\frac{\partial^2 t(x; y)}{\partial y^2} \left[1 + \frac{1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial^2 t(x; y)}{\partial x^2}} \right] = -\frac{w}{\lambda_2}$$

Считая, согласно [1], отношение составляющих расхождения градиента температуры постоянной величиной, последние соотношения запишутся так:

$$\frac{\partial^2 t(x; y)}{\partial x^2} \xi' = -\frac{w}{\lambda_1}; \quad \frac{\partial^2 t(x; y)}{\partial y^2} \frac{\xi'}{\xi' - 1} = -\frac{w}{\lambda_2}. \quad (4)$$

Решение уравнений (4):

$$t(x; y) = -\frac{wx^2}{2\xi'\lambda_1} + f(y)x + \varphi(y),$$

$$t(x; y) = -\frac{\xi' - 1}{\xi'} \frac{wy^2}{2\lambda_2} + f(x)y + \varphi(x).$$

Из условий симметрии (2) вытекает, что

$$f(x) = f(y) = 0.$$

Учитывая это, получим при $x = 0$ или $y = 0$

$$t(0; y) = \varphi(y); \quad t(x; 0) = \varphi(x).$$

Теперь

$$t(x; y) = -\frac{wx^2}{2\xi'\lambda_1} + t(0; y), \quad (5)$$

$$t(x; y) = -\frac{\xi' - 1}{\xi'} \frac{wy^2}{2\lambda_2} + t(x; 0). \quad (6)$$

Полагая в уравнениях (4) соответственно $x=0$ и $y=0$, получим систему обычных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 t(x; 0)}{dx^2} \xi' = -\frac{w}{\lambda_1}; \quad \frac{d^2 t(0; y)}{dy^2} \frac{\xi'}{\xi' - 1} = -\frac{w}{\lambda_2}$$

Их решение

$$t(x; 0) = -\frac{wx^2}{2\xi'\lambda_1} + D_1; \quad t(0; y) = -\frac{\xi' - 1}{\xi'} \frac{wy^2}{2\lambda_2} + D_2.$$

Так как при $x=y=0$, $t(0; 0)=D$, то $D_1=D_2=D$ —температура центра тела, и выражения (5) и (6) становятся одинаковыми:

$$t(x; y) = D - \frac{wx^2}{2\xi'\lambda_1} - \frac{wy^2}{2\lambda_2} \frac{\xi' - 1}{\xi'}. \quad (7)$$

Решение (7) удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности (1) и условию симметрии (2).

Для удовлетворения граничных условий (3) необходимо соответствующим образом определить ξ' и D .

Принимаем

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial t(R_1; y)}{\partial x} &= \alpha_1 [t(R_1; y)_{cp} - t_{f_1}], \\ -\lambda_2 \frac{\partial t(x; R_2)}{\partial x} &= \alpha_2 [t(x; R_2)_{cp} - t_{f_2}], \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} t(R_1; y)_{cp} &= \frac{1}{R_2} \int_0^{R_2} t(R_1; y) dy = D - \frac{wR_1^2}{2\xi'\lambda_1} - \frac{\xi' - 1}{\xi'} \frac{wR_2^2}{6\lambda_2}, \\ t(x; R_2)_{cp} &= \frac{1}{R_1} \int_0^{R_1} t(x; R_2) dx = D - \frac{wR_1^2}{6\xi'\lambda_1} - \\ &\quad - \frac{\xi' - 1}{\xi'} \frac{wR_2^2}{2\lambda_2}. \end{aligned}$$

Подставив значения $t(R_1; y)_{cp}$ и $t(x; R_2)_{cp}$ в (8), после преобразований получим

$$\xi' = \frac{\frac{R_1}{4\alpha_1} + \frac{R_2}{4\alpha_2} + \frac{R_1^2}{3\lambda_1} + \frac{R_2^2}{3\lambda_2}}{\frac{R_2}{4\alpha_2} + \frac{R_2^2}{3\lambda_2} - \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{W}} \quad (9)$$

и температура центра тела будет

$$D = \frac{wR_1}{4\xi'\alpha_1} + \frac{wR_1^2}{2\xi'\lambda_1} + \frac{\xi' - 1}{\xi'} \frac{wR_2^2}{6\lambda_2} + t_{f_1}. \quad (10)$$

Значения температур, найденных в различных точках поперечного сечения бруса по формулам (7), (9) и (10), хорошо совпадают с данными, полученными методом элементарных балансов.

Результаты сравнения приведены в таблице 1.

При расчетах было принято:

$$2R_1 = 0,5 \text{ м}, \quad 2R_2 = 1,0 \text{ м}, \quad \lambda_1 = 1 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot ^\circ\text{C}},$$

$$\lambda_2 = 50 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot ^\circ\text{C}}, \quad \alpha_1 = 1000 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{час} \cdot ^\circ\text{C}},$$

$$\alpha_2 = 10 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{час} \cdot ^\circ\text{C}}, \quad t_{f_1} = 20^\circ\text{C}, \quad t_{f_2} = 40^\circ\text{C},$$

$$w = 500 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^3 \cdot \text{час}}.$$

Таблица 1

№	Координаты точек (м)		Температуры точек °С		Расхождение %
	x	y	по ф-лам (7)(9) и (10)	методом элементарных балансов	
1	0	0	101,3	101,3	0
2	0,1	0	88,34	88,34	0
3	0,2	0	49,46	49,65	0,38
4	0	0,2	100,34	100,34	0
5	0,1	0,2	87,38	87,38	0
6	0,2	0,2	48,50	48,79	0,6
7	0	0,4	97,44	99,70	2,2
8	0,1	0,4	84,48	86,89	2,8
9	0,2	0,4	45,60	47,40	3,8

Заключение

Изложенный приближенный метод расчета температурного поля анизотропного бруса, находящегося в сложных условиях охлаждения, отличается простотой и достаточной точностью, кроме точек, лежащих на поверхности бруса, т. е. при $x=R_1$ и $y=R_2$ и близких к ним.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойков Г. П. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла. „Известия ТПИ“, том 101, Томск, 1958.