

19. Paras A.T. Abelian groups as Noetherian modules over their endomorphism rings // Contem. Math. – 1994. – V. 171. – № 9. – P. 325–332.
20. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 688 с.
21. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Группа $\text{Hom}(A, B)$ как артинов $E(B)$ -модуль // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. – Вып. 13–14. – С. 170–184.

УДК 519.21

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ L_2 -УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛУМАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.А. Банько

Ставропольский институт управления
E-mail: norra7@yandex.ru

Получены необходимые и достаточные условия L_2 -устойчивости решения линейного дифференциального уравнения с коэффициентом, зависящим от полумарковского процесса, принимающего два состояния с заданными интенсивностями перехода из состояния в состояние.

Одним из методов исследования устойчивости в среднем, среднеквадратичном, а также L_2 -устойчивости вероятностных моделей является метод моментных уравнений [1, 2]. При этом исследование устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы детерминированных уравнений для моментов первого и второго порядка.

В работе [1] введено понятие L_2 -устойчивости решения системы линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами.

Нулевое решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\zeta(t))X(t), (t \geq 0), \quad (1)$$

называется L_2 -устойчивым, если для любого случайного решения $X(t)$ системы (1) с ограниченным начальным значением $\langle \|X(0)\|^2 \rangle$ сходится несобственный интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \langle \|X(t)\|^2 \rangle dt.$$

Для дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами L_2 -устойчивость не равносильна устойчивости по Ляпунову.

В работе [2] получены уравнения для начальных моментов первого и второго порядка систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от полумарковского процесса. Также показано, что устойчивость решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений для начальных моментов первого порядка является необходимым и достаточным условием устойчивости в среднем системы линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами (1). Устойчивость системы уравнений для начальных моментов второго порядка являются необходимым и достаточным условием устойчи-

вости в среднеквадратичном данной системы со случайными коэффициентами (1).

В работе [3] с помощью уравнений для начальных моментов первого и второго порядка получены необходимые и достаточные условия L_2 -устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений с полумарковскими коэффициентами, сформулированные в виде теоремы.

Теорема. Пусть для системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от полумарковского процесса, (1) со скачком решений выполнены условия [2, теорема 1].

Для того, чтобы нулевое решение системы было L_2 -устойчивым, необходимо и достаточно выполнения одного из условий:

1. Система уравнений

$$B_k = D_k(0) + \sum_{s=1}^n \int_0^{\infty} q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s N_s^*(t) C_{ks}^* dt \quad (k=1, \dots, n). \quad (2)$$

при любых $D_k(0) > 0$ ($k=1, \dots, n$) имела положительное решение $B_k > 0$ ($k=1, \dots, n$).

2. Система уравнений (2) при $D_k(0) = E$ ($k=1, \dots, n$) имела положительное решение $B_k > 0$ ($k=1, \dots, n$).

3. Сходился метод последовательных приближений

$$B_k^{(j+1)} = D_k(0) + \sum_{s=1}^n \int_0^{\infty} q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s^{(j)} N_s^*(t) C_{ks}^* dt, \\ B_k^{(0)} \equiv 0 \quad (k=1, \dots, n; j=0, 1, 2, \dots).$$

4. Оператор L имел спектральный радиус меньше единицы.

Кроме того, для L_2 -устойчивости решений системы достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$B_k - \sum_{s=1}^n \int_0^{\infty} q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s N_s^*(t) C_{ks}^* dt > 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

при некоторых матрицах $B_k > 0$ ($k=1, \dots, n$).

Используем полученные в работах [2, 3] результаты для исследования L_2 -устойчивости частного случая системы линейных дифференциальных уравнений (1) с полумарковскими коэффициентами.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\zeta(t))x(t), \quad A(\theta_k) \equiv a_k \quad (k=1,2). \quad (3)$$

где $\zeta(t)$ – полумарковский процесс, принимающий два состояния

$$N_1 = e^{a_1 t}, \quad N_2 = e^{a_2 t}. \quad (4)$$

Процесс $\zeta(t)$ определяется интенсивностями перехода $q_{sk}(t)$ ($s,k=1,2$) из состояния θ_k в состояние θ_s (3), где π_{sk} – одношаговые условные вероятности переходов из одного состояния в другое

$$\pi_{sk} = P\{\zeta(t_{j+1}) = \theta_s \mid \zeta(t_j) = \theta_k\} \quad (s, k = 1, 2),$$

которые являются элементами матрицы условных вероятностей переходов

$$\Pi = \|\pi_{sk}\|_{s,k=1}^n.$$

Пусть интенсивности перехода, определяющие полумарковский процесс $\zeta(t)$ из (3), заданы соотношениями

$$q_{12} = q_{21} = \begin{cases} 2T^{-2}(T-t), & t \in [0, T], \\ 0, & t > T, \end{cases} \quad (5)$$

$$q_{11} \equiv q_{22} \equiv 0.$$

Найдем необходимые и достаточные условия L_2 -устойчивости решения линейного дифференциального уравнения (3) с коэффициентом, зависящим от полумарковского процесса $\zeta(t)$.

Пусть процесс $\zeta(t)$ имеет скачки в моменты времени t_0, t_1, t_2, \dots ($t_0=0 < t_1 < t_2 < \dots$). Предполагаем, что в момент t_j скачка процесса $\zeta(t)$ ($\zeta(t_j-0)=\theta_k$, $\zeta(t_j+0)=\theta_s$) решение системы уравнений (3) имеет скачок, определяемый уравнением

$$x(t_j+0) = cx(t_j-0).$$

Для определения условий L_2 -устойчивости решения уравнения (3) рассмотрим введенные в [3] монотонные линейные операторы L_{ks} , определяемые формулами

$$L_{ks} B_s = \int_0^\infty q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s N_s^*(t) C_{ks}^* dt \quad (k, s = 1, \dots, n).$$

Система уравнений (3), полученная в работе [3], в операторной форме имеет вид

$$B = D(0) + LB,$$

где обозначено

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_n \end{bmatrix}, \quad D(0) = \begin{bmatrix} D_1(0) \\ D_2(0) \\ \dots \\ D_n(0) \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix}.$$

Для линейного дифференциального уравнения (3) с полумарковским коэффициентом, принимающим два состояния, определяемые соотношениями (4), система (2) принимает вид

$$b_1 = D_1(0) + c^2 \sum_{s=1}^2 \int_0^\infty q_{1s}(t) N_s(t) B_s N_s^*(t) dt,$$

$$b_2 = D_2(0) + c^2 \sum_{s=1}^2 \int_0^\infty q_{2s}(t) N_s(t) B_s N_s^*(t) dt.$$

Будем рассматривать промежуток времени $t \in [0, T]$, тогда

$$\begin{aligned} b_1 &= D_1(0) + c^2 \sum_{s=1}^2 \int_0^T q_{1s}(t) N_s(t) B_s N_s^*(t) dt = D_1(0) + \\ &+ c^2 \int_0^T (q_{11}(t) N_1(t) b_1 N_1^*(t) + q_{12}(t) N_2(t) b_2 N_2^*(t)) dt = \\ &= D_1(0) + c^2 \int_0^T q_{12}(t) N_2^2(t) b_2 dt = \\ &= D_1(0) + c^2 \int_0^T 2T^{-2} (T-t) e^{2a_2 t} b_2 dt = \\ &= D_1(0) + 2T^{-2} c^2 b_2 \int_0^T (Te^{2a_2 t} - te^{2a_2 t}) dt = \\ &= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left(\frac{Te^{2a_2 t}}{2a_2} \Big|_0^T - \int_0^T te^{2a_2 t} dt \right) = \\ &= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left[\frac{Te^{2a_2 t}}{2a_2} \Big|_0^T - \left(\frac{te^{2a_2 t}}{2a_2} \Big|_0^T - \frac{1}{2a_2} \int_0^T e^{2a_2 t} dt \right) \right] = \\ &= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left[\frac{Te^{2a_2 t}}{2a_2} \Big|_0^T - \left(\frac{te^{2a_2 t}}{2a_2} - \frac{e^{2a_2 t}}{4a_2^2} \right) \Big|_0^T \right] = \\ &= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left(\frac{Te^{2a_2 t}}{2a_2} - \frac{te^{2a_2 t}}{2a_2} + \frac{e^{2a_2 t}}{4a_2^2} \right) \Big|_0^T = \\ &= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left(\frac{2a_2(T-t)e^{2a_2 t} + e^{2a_2 t}}{4a_2^2} \right) \Big|_0^T, \\ b_1 &= D_1(0) + c^2 \frac{e^{2a_2 T} - 1 - 2a_2 T}{2a_2^2 T^2} b_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично получим

$$b_2 = D_2(0) + c^2 \frac{e^{2a_1 T} - 1 - 2a_1 T}{2a_1^2 T^2} b_1. \quad (7)$$

Используя пункт 4 теоремы, доказанной в работе [3], найдем условия L_2 -устойчивости решения линейного дифференциального уравнения (3) с коэффициентом, зависящим от полумарковского процесса.

Оператор L имеет вид

$$L = L_1 \cdot L_2,$$

где, учитывая соотношения (6) и (7),

$$L_1 = c^2 \frac{e^{2a_2 T} - 1 - 2a_2 T}{2a_2^2 T^2}, \quad L_2 = c^2 \frac{e^{2a_1 T} - 1 - 2a_1 T}{2a_1^2 T^2}, \quad (8)$$

Таким образом, используя соотношения (8) и условия теоремы, получим неравенство

$$c^4 \frac{e^{2a_1 T} - 1 - 2a_1 T}{2a_1^2 T^2} \cdot \frac{e^{2a_2 T} - 1 - 2a_2 T}{2a_2^2 T^2} < 1,$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во РУДН, 1996. – 256 с.
2. Карелова О.Л., Банько М.А. Вывод уравнений для моментов решений системы линейных дифференциальных уравнений с полумарковскими коэффициентами // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 4. – С. 14–19.

определяющее необходимые и достаточные условия L_2 -устойчивости решения линейного дифференциального уравнения (3) с коэффициентом, зависящим от полумарковского процесса $\zeta(t)$, который принимает два состояния, определяемые соотношением (4), и с заданными интенсивностями перехода из состояния в состояние (5).

3. Карелова О.Л., Банько М.А. Получение необходимых и достаточных условий L_2 -устойчивости решения системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от полумарковского процесса // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2005. – Прилож. № 4. – С. 7–12.

УДК 519.886

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА И КОРРЕЛЯЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК С ТРЕНДАМИ

В.П. Григорьев, А.В. Козловских, Д.А. Марьясов

Томский политехнический университет
E-mail: MaryasovDA@mail2000.ru

Проведено качественное исследование математической модели динамики фьючерсных рынков. Показана возможность прогнозирования моментов смены тренда на основе корреляции траектории особых точек и трендов. Предлагается новая схема адаптации модели с раздельным прогнозированием трендовой и хаотической составляющих.

Введение

Проблема прогнозирования динамики рыночных характеристик исследуется уже достаточно долго. Существуют фундаментальные теории прогнозирования экономических последовательностей, однако они имеют свои ограничения [1]. В настоящее время приоритет принадлежит математическим методам детерминированного хаоса при моделировании экономических процессов [2]. Одним из наиболее перспективных направлений применения этих методов является исследование в области прогнозирования динамики рыночных характеристик.

Авторами была предложена модель динамики фьючерсных рынков [2], одним из достоинств которой является получение прогностических реализаций экономических характеристик с учетом их взаимного влияния.

Для развития этой модели и раскрытия ее потенциальных возможностей и преимуществ в описании и прогнозировании рыночных характеристик необходимо провести математические исследования основной системы нелинейных дифференциальных уравнений модели, определить ее особенности и выявить их связь с закономерностями

рассматриваемых характеристик. Это позволит определить структуру ошибки прогноза, а также провести исследование в направлении поиска наиболее эффективных схем адаптации модели.

В данной работе на основе анализа решений системы дифференциальных уравнений модели и выделения трендовой и хаотической составляющих предлагается методика определения моментов смены направления тренда, улучшающая эффективность прогноза, а также новая схема адаптации модели.

Качественное исследование системы дифференциальных уравнений модели

В модели [2] входная информация рассматривается в виде детерминированного хаоса, т.е. хаотическое изменение параметров является нерегулярным (хаотическим), порождаемым нелинейными системами, для которых динамические законы однозначно определяют эволюцию на выбранном временном интервале Δt ($\Delta t/T \ll 1$, Δt – соответствующая торговая сессия, T – длина исследуемого временного ряда) при известной предыстории [3]. При этом основные уравнения модели, представленные в матричной форме, имеют вид [1]: