ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 187 1974

НЕУСТРАНИМАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории)

Известно, что наличие неопределенности в исходной совокупности данных приводит в задачах приближения функций к возникновению дополнительных погрешностей, которые получили название неустранимых [1]. При этом различают неустранимую погрешность первого рода, обусловленную неопределенностью в отсчетах функции $f(x_i)$, и второго рода, обусловленную неточностью фиксации узлов, т. е. абсцисс отсчетов x_i $(i=0, 1 ...)$. Определить среднеквадратичную неустранимую погрешность первого рода тригонометрической интерполяции не составляет особого труда в предположении аддитивности погрешностей измерения и значений функции $f(x)$. В частности, для тригонометрических полиномов на дискретном множестве точек $\{x_i\}$ $(i=0, 1 ... 2n)$ неустранимая погрешность первого рода σ_1 равна среднеквадратичной погрешности измерения σ_0 значений функции [2].

Целью настоящей работы является построение оценки для неустранимой погрешности второго в задачах приближения тригонометрическими полиномами.

Пусть дана последовательность значений некоторой функции $f(x)\{y_i\}(i=0,1....2n)$ в системе точек $\{x_i\}$, положение которых на интервале $[0,2\pi]$ известно с квадратичной погрешностью d. При этом будем считать, что на множестве p реализаций (p измерений по определению положения узлов интерполирования) точки $\{x_i\}$ в среднем образуют систему равноотстоящих узлов. Тогда систему $\{x_i\}$ на множестве реализаций можно представить как систему случайных величин вида

$$x_{iq}=x_{i0}+\varepsilon_{iq}, \tag{1}$$

где

x_{iq} — значение абсциссы x_i в q-ом измерении $(q = 1,2....p)$,

x_{i0} — равностоящие точки на отрезке $(0,2\pi)$,

ε_{iq} — случайное смещение x_{iq} от x_{i0} в q-ом измерении.

Поскольку в рассматриваемом случае неопределенность в положении абсцисс x_i связана с погрешностью измерения, то естественно предположить, что система $N(N = 2n+1)$ случайных величин ε_i на множестве p измерений (выборки объема p) обладает следующими свойствами:

$$M[\varepsilon_i]=0,$$

$$M[\varepsilon_i\cdot\varepsilon_j]=\begin{cases} d_i^2 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j \end{cases} \tag{2}$$

для всех i и j $(i,j = 0,1...2n)$.

В дальнейшем будем считать, что измерение значений всех абсцисс осуществляется одними и теми же средствами и поэтому $d_0=d_1...=d_{2n}=$ $=d$. (3)

Величина характеризует среднеквадратичное отклонение абсцисс $x_i (i=0,1...2n)$ от равноотстоящей (фундаментальной) системы узлов x_{i0}.

Рассмотрим следующую задачу: оценить среднеквадратичное отклонение тригонометрических интерполяционных полиномов, построенных по отсчетам $y_i (i=0,\ 1 \dots 2n)$ и системе узлов (1), от полинома, построенного по тем же отсчетам и системе равноотстоящих узлов $\{x_{i0}\}$.

Величина отклонения полинома $T_{nq}(x)$, построенного по узлам x_q^i, от полинома $T_n(x)$ по узлам x_{i0} определится как разность

$$\Delta_{nq}(x)=T_{nq}(x)-T_n(x). \tag{4}$$

Отклонение $\Delta_{nq}(x)$ на выборке случайных величин x_i $(i = 0,1...2n)$ является случайной функцией по x на отрезке приближения. Полагая число узлов нечетным, т. е. $N = 2n + 1$, выражение (4) приведем к виду

$$\Delta_{nq}(x)=\frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} y_i\left[\sum_{k=1}^{n}(\cos k(x-x_{i0}-\varepsilon_{iq})-\cos k(x-x_{i0}))\right]. \tag{5}$$

Далее будем считать, что значения отклонений ε_i достаточно малы по сравнению с шагом интерполирования

$$h=x_{i0}-x_{(i-1)0}=\frac{2}{2n+1}$$

для всех q и i. Тогда можно принять приближенное равенство

$$\cos k(x-x_{i0}-\varepsilon_{iq})-\cos k(x-x_{i0})=-\varepsilon_{iq}\cdot k\cdot\sin k(x-x_{i0}). \tag{6}$$

С учетом (6) (5) перепишется в виде

$$\Delta_{nq}(x)=\frac{2}{2n+1}\cdot\sum_{i=0}^{2n} y_i\cdot\varepsilon_{iq}\left(-\sum_{k=1}^{n} k\sin k(x-x_{i0})\right). \tag{7}$$

Из выражений (2) и (7) следует, что

$$M[\Delta_n(x)]=0. \tag{8}$$

Таким образом, полином $T_n(x)$ является математическим ожиданием для полиномов $T_{nq}(x)$ в первом приближении.

Определим величину дисперсии для отклонения $\Delta_n(x)$, т. е.

$$D[\Delta_n(x)]=M(\Delta_n^2(x)]. \tag{9}$$

Используя (2) и выполнив соответствующие вычисления, получим

$$D[\Delta_n(x)]=\frac{4d^2}{(2n+1)^2}\sum_{i=0}^{2n} y_i^2\left(\sum_{k=1}^{n} k\sin k(x-x_{i0})\right)^2. \tag{10}$$

В дальнейшем будем считать, что последовательность отсчетов $\{y_i\}$ ограничена в своей совокупности, т. е. имеется такое число M, что для всех i справедливо неравенство

$$|y_i| \leqslant M. \tag{11}$$

Тогда для $D[\Delta_n(x)]$ можно записать

$$D[\Delta_n(x)] \leqslant \frac{4d^2M^2}{(2n+1)^2} \cdot \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{k=1}^{n} k \sin k(x - x_{i0}) \right)^2. \tag{12}$$

Поскольку узлы x_{i0} образуют систему равноотстоящих точек, то

$$\sum_{i=0}^{2n} \cos k\, x_{i0} = \sum_{i=0}^{2n} \sin k x_{i0} = 0.$$

Используя эти равенства, можно показать, что

$$\sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{k=1}^{n} k \sin k(x - x_{i0}) \right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)^2}{12}, \tag{13}$$

и для дисперсии величины $\Delta_n(x)$ получим оценку

$$D[\Delta_n(x)] \leqslant \frac{n(n+1)}{3} d^2M^2. \tag{14}$$

Интересно отметить, что $D[\Delta_n(x)]$ не зависит от x, т. е. неустранимая погрешность второго рода σ_2 равномерно распределена по отрезку интерполирования. Это свойство является следствием равномерного распределения узлов x_{i0}.

Принимая в качестве неустранимой погрешности второго рода верхнюю грань значений величины $D[\Delta_n(x)]$, получим

$$\sigma_2 = dM \sqrt{\frac{n(n+1)}{3}}. \tag{15}$$

При $n \gg 1$

$$\sigma_2 = \frac{dMn}{\sqrt{3}}. \tag{16}$$

Из (16) можно получить значение относительной погрешности

$$\xi_2 = \frac{\sigma_2}{M} = \frac{dn}{\sqrt{3}}. \tag{17}$$

Полученные результаты приводят к следующему выводу: неустранимая погрешность второго рода, обусловленная неточностью фиксации узлов, в тригонометрической интерполяции возрастает с увеличением числа отсчетов (соответственно порядку полинома). Иными словами, в то время как погрешность интерполирования (метода приближения) уменьшается с увеличением числа N (тоже n), общая погрешность приближения с учетом неустранимых погрешностей не может быть сделана сколь угодно малой, если при этом существенно не уменьшать неопределенности, связанной с заданием исходных данных. Поэтому при интерполировании по совокупности приближенных данных необходимо весьма осторожно подходить к оценке требуемого числа отсчетов. Объем данных определяется не только требуемым значением погрешности приближения, но и погрешностью, с которой известны эти данные. Это особенно относится к абсциссам интерполирования, поскольку при увеличении N процесс интерполирования становится неустойчивым, если при этом d не стремится к нулю.

По всей видимости, аналогичные выводы будут справедливы и для произвольного расположения узлов интерполирования на отрезке приближения, однако в настоящее время этот вопрос мало исследован [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. 1. Физматгиз. М., 1962.

2. И. Э. Наац. Применение тригонометрической интерполяции в задачах дискретного измерения 1. Изв. ТПИ, том 168, 1967.

3. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 2. «Мир». М., 1965.