

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТЕПЛОВЫХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Д. И. САННИКОВ

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин  
и общей электротехники)

При анализе тепловых схем замещения электрических машин в ходе разработки методик теплового расчета оказываются полезными различные преобразования этих схем.

В настоящей работе рассматривается три вида преобразований схем стационарного нагрева и приводятся примеры их использования.

Тепловая схема составляется на основе теплового баланса различных элементов электрической машины или на основе решения дифференциальных уравнений теплопроводности [2] и состоит из узлов с источниками тепла  $P$ , соединенных тепловыми проводимостями  $G$ . Предполагается, что узлы, изображающие элементы охлаждающего потока, имеют фиксированную температуру и что схема линейна.

Тепловой баланс для  $i$ -го узла схемы

$$P_i = \sum_{\substack{k=a \\ k \neq i}}^n (\theta_i - \theta_k) G_{ik}, \quad (1)$$

где

$\theta$  — температуры узлов,  
 $k$  — порядковые номера узлов, изменяющиеся от  $a$  до  $n$ ,  
 $G_{ik}$  — взаимные проводимости, приводит к уравнению

$$-\theta_i \sum_{\substack{k=a \\ k \neq i}}^n G_{ik} + \sum_{\substack{k=a \\ k \neq i}}^n \theta_k G_{ik} + P_0 = 0. \quad (2)$$

Схема в целом описывается системой аналогичных уравнений [4]

$$\| G_{ik} \| \times \theta_i + P_i = 0. \quad (3)$$

Каждый диагональный член матрицы проводимостей согласно (2) равен

$$G_{ii} = - \sum_{\substack{k=a \\ k \neq i}}^n G_{ik} \quad (4)$$

и может быть назван собственной проводимостью узла, взятой со знаком минус.

### Исключение узла из схемы

Выделим из схемы узел с индексом  $0$  (рис. 1,  $a$ ). Исключая уравнение данного узла

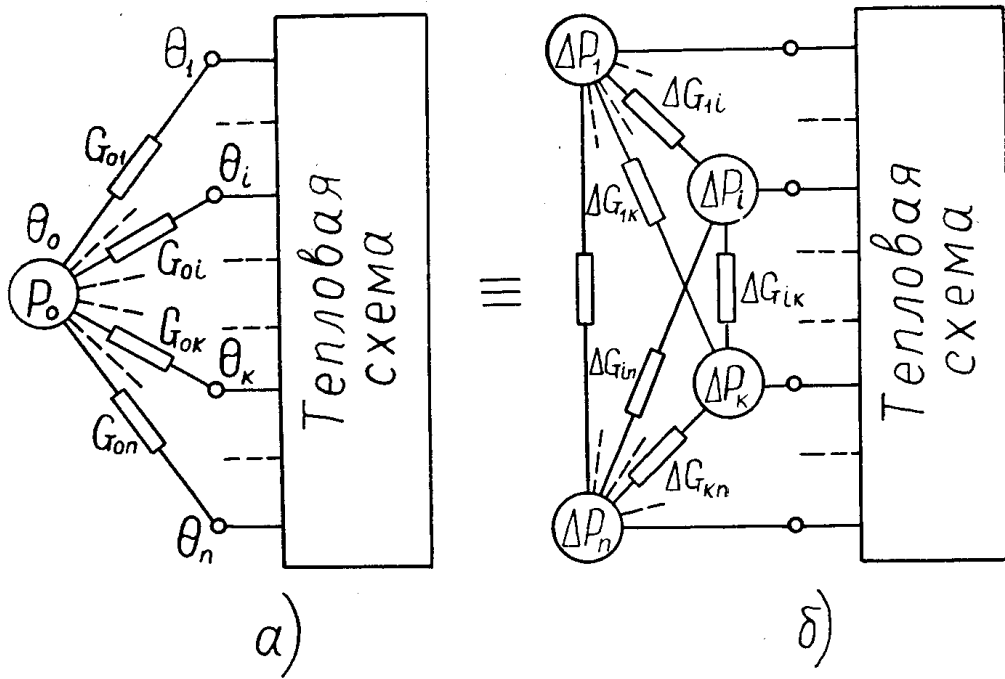


Рис. 1. Исключение узла из тепловой схемы

$$\theta_0 \sum_{i=1}^n G_{0i} = \sum_{i=1}^n \theta_i G_{0i} + P_0 \quad (5)$$

из системы (3) методом подстановок, получим систему, которая соответствует новой схеме с уменьшенным на единицу количеством узлов (рис. 1, б). Таким образом происходит преобразование звезды в эквивалентный многоугольник со следующими параметрами:

а) приращение источников остающихся узлов

$$\Delta P_i = P_0 K_{0i}, \quad (6)$$

где

$$K_{0i} = \frac{G_{0i}}{(-G_{00})} \quad (7)$$

коэффициент приведения источника исключаемого узла к остающемуся узлу,

$$(-G_{00}) = \sum_{k=1}^n G_{0k} \quad (8)$$

собственная проводимость исключаемого узла;

б) приращение проводимостей между остающимися узлами

$$\Delta G_{ik} = \frac{G_{0i} G_{0k}}{(-G_{00})}; \quad (9)$$

в) приращение собственных проводимостей

$$\Delta G_{ii} = - \frac{G_{0i}^2}{(-G_{00})}. \quad (10)$$

Следует отметить, что суммарная мощность источников тепла схемы не меняется, так как

$$\sum_{i=1}^n \Delta P_i = P_0 \frac{\sum_{k=1}^n G_{0k}}{(-G_{00})} = P_0, \quad (11)$$

то есть

$$\sum_{i=1}^n k_{oi} = 1. \quad (12)$$

Данное преобразование находит применение при упрощении тепловых схем, однако до сих пор оно не было четко сформулировано в литературе. Кроме того, на его основе могут быть разработаны другие виды преобразования, как, например, включение в схему нового узла и объединение двух узлов схемы.

В отличие от метода [1] предлагаемые способы преобразования являются принципиально точными, однако применимы только к стационарному процессу.

### Включение в схему нового узла

Если к имеющейся схеме с  $n$  узлами ( $1 \leq i \leq n$ ) нужно добавить еще один узел, для которого известна мощность источника  $P_o$  и зависимость температуры от температур других узлов

$$\theta_o = \sum_{i=1}^n k_{oi} \theta_i + C_o, \quad (13)$$

(причем должно соблюдаться условие  $\sum_{i=1}^n k_{oi} = 1$ , что всегда может быть достигнуто использованием узла с нулевой температурой), то прежде всего необходимо привести эту зависимость к виду (5) путем умножения (13) на масштабный коэффициент

$$k_m = \frac{P_o}{C_o}, \quad (14)$$

В результате будет получено уравнение узла, то есть звезды проводимостей

$$G_{oi} = k_{oi} \cdot k_m = k_{oi} \cdot \frac{P_o}{C_o} \quad (15)$$

с источником при вершине —  $P_o$  и собственной проводимостью

$$(-G_{oo}) = k_m. \quad (16)$$

Непосредственное присоединение этой звезды к узлам схемы приводит к нарушению существующих связей, которое может быть компенсировано одновременным присоединением второй звезды с измененным знаком параметров, то есть с проводимостями  $(-G_{oi})$  и источником  $(-P_o)$ . Правильность такого преобразования доказывается тем, что исключение обоих присоединенных узлов по ранее рассмотренному методу приводит к исходной схеме.

Вторую присоединенную звезду целесообразно преобразовать в многоугольник для устранения лишнего узла. Таким образом, включение в схему нового узла осуществляется путем присоединения звезды с параметрами  $G_{oi}$  и  $P_o$  и одновременного прибавления к источникам схемы компенсирующих приращений

$$\Delta P_i = - \frac{P_o G_{oi}}{(-G_{oo})} = - P_o k_{oi}, \quad (17)$$

а к проводимостям — компенсирующих приращений.

$$\Delta G_{ik} = - \frac{G_{oi} G_{ok}}{(-G_{oo})} = - k_{oi} \cdot k_{ok} \cdot k_m. \quad (18)$$

Использование данного преобразования может быть проиллюстрировано следующим примером. Пусть требуется учесть сток тепла с торцевой поверхности сердечника якоря или статора, не имеющего радиальных каналов рис. 2, а). Ввиду низкой теплопроводности пакета в направлении поперек листа ( $\lambda'_{cm}$ ) аксиальный тепловой поток в сердечнике имеет заметную величину только в непосредственной близости от торца, создавая здесь значительный перепад температуры сердечника  $\theta_c$  вдоль оси якоря (рис. 2, б). По сравнению с изменением  $\theta_c$  в данной зоне можно принять

$$\theta_M = \text{const}, \theta_f = \text{const}$$

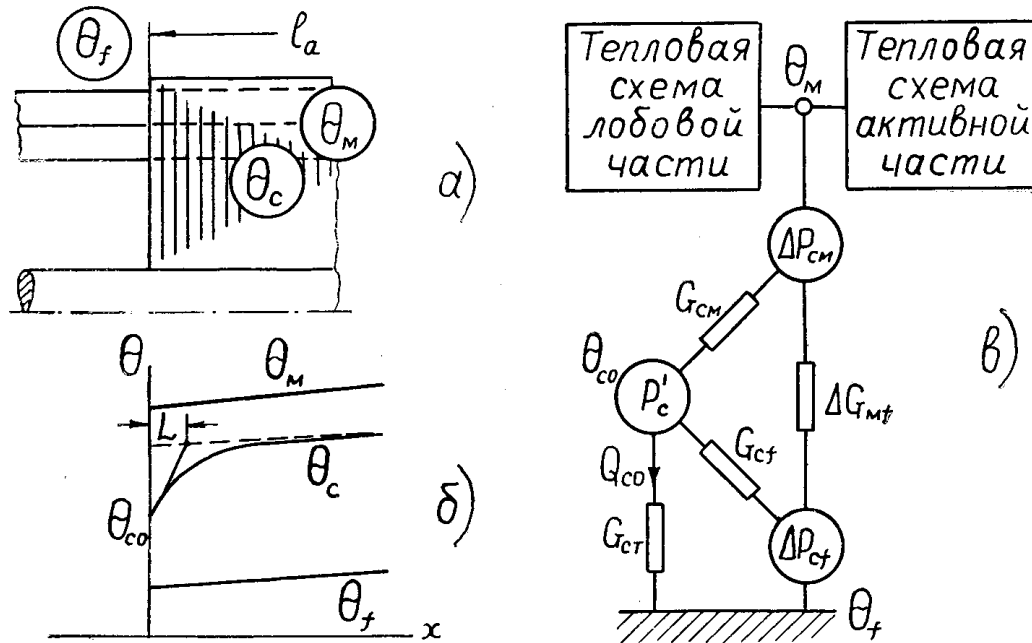


Рис. 2. Включение в тепловую схему якоря узла, учитывающего охлаждение торцов сердечника.

и, рассматривая сердечник как теплопроводящий стержень, ориентированный вдоль оси  $x$ , связанный с обмоткой и воздухом проводимостями  $\Lambda_{cm}$  и  $\Lambda_{cf}$  на единицу длины и имеющий распределенные по длине потери с плотностью  $p_c$ , получить экспоненциальный характер распределения  $\theta_c$  вдоль якоря.

Поскольку постоянная распространения экспоненты

$$L = \frac{1}{\sqrt{(\Lambda_{cm} + \Lambda_{cf})r_c}} \ll l_a,$$

где  $r_c$  — аксиальное тепловое сопротивление на единицу длины пакета, можно пренебречь влиянием противоположного торца.

Выражение для теплового потока, переходящего из торца пакета в воздух

$$Q_{co} = \frac{1}{r_c} \frac{d\theta_c}{dx}(x=0) = (\theta_{co} - \theta_f)G_{cr}$$

приводит к уравнению вида (5) для температуры торца

$$\theta_{co}(\Lambda_{cm} + \Lambda_{cf})L = \theta_M \Lambda_{cm}L + \theta_f \Lambda_{cf}L + p_cL - Q_{co}.$$

Таким образом, на основании полученного выражения и разработанного ранее способа преобразования схем нужно для учета теплового

потока  $Q_{co}$  в исходную тепловую схему якоря включить узел с температурой  $\theta_{co}$  (рис. 2, в), источником

$$P'_c = p_c L$$

и проводимостями

$$G_{cm} = \Lambda_{cm} L; \quad G_{cf} = \Lambda_{cf} L,$$

затем присоединить компенсирующие источники и проводимости

$$\Delta P_{cm} = -P'_c \frac{\Lambda_{cm}}{\Lambda_{cm} + \Lambda_{cf}}; \quad \Delta P_{cf} = -P'_c \frac{\Lambda_{cf}}{\Lambda_{cm} + \Lambda_{cf}}$$

$$\Delta G_{mf} = -\frac{G_{cm} G_{cf}}{G_{cm} + G_{cf}},$$

после чего ввести проводимость  $G_{ст}$ , учитывающую условия теплоотдачи с торца сердечника.

### Объединение двух узлов схемы

Пусть в схеме имеется два узла  $a$  и  $b$  (рис. 3, а), дающих средние температуры  $\theta_a$  и  $\theta_b$  двух элементов машины, имеющих объем соответственно  $V_a$  и  $V_b$ , причем

$$a = \frac{V_a}{V_a + V_b}; \quad b = \frac{V_b}{V_a + V_b}, \quad (19)$$

$$(a + b = 1).$$

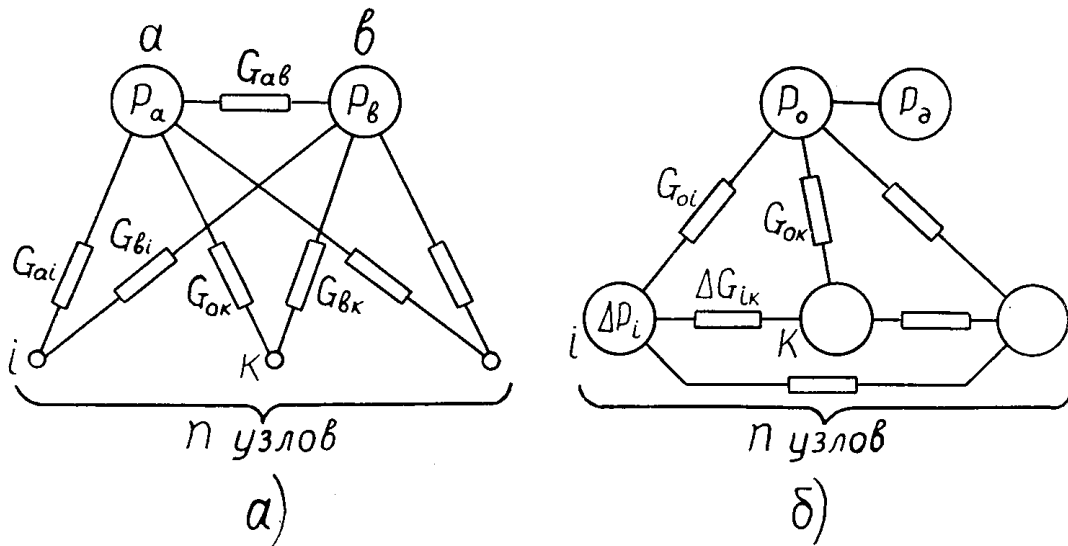


Рис. 3. Объединение двух узлов тепловой схемы

Распределение источников тепла между узлами в общем случае не пропорционально объему

$$P_a = P_o(a + \Delta); \quad P_b = P_o(b - \Delta) \quad (20)$$

$$P_o = P_a + P_b \quad (21)$$

Требуется заменить оба узла одним, имеющим среднюю температуру

$$\theta_o = a\theta_a + b\theta_b \quad (22)$$

и источник  $P_o$  (рис. 3, б).

Уравнения узлов  $a$  и  $b$  могут быть представлены в виде системы

$$\begin{cases} \theta_a(G_a + G_{ab}) - \theta_b G_{ab} = \sum_{i=1}^n \theta_i G_{ai} + P_a \\ -\theta_a G_{ab} + \theta_b(G_b + G_{ab}) = \sum_{i=1}^n \theta_i G_{bi} + P_b, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$G_a = \sum_{i=1}^n G_{ai}; \quad G_b = \sum_{i=1}^n G_{bi}. \quad (24)$$

Решая (23) относительно  $\theta_a$  и  $\theta_b$  и подставляя полученные выражения в (22), имеем

$$\theta_o = \sum_{i=1}^n \theta_i \frac{A_i}{D} + P_o \frac{C}{D} + P_o \frac{\Delta(aG_b - bG_a)}{D} \quad (25)$$

Здесь

$$D = (G_a + G_{ab})(G_b + G_{ab}) - G_{ab}^2 \quad (26)$$

— определитель системы (23)

$$A_i = G_{ai}(aG_b + G_{ab}) + G_{bi}(bG_a + G_{ab}) \quad (27)$$

$$C = a^2 G_b + G_{ab} + b^2 G_a. \quad (28)$$

Умножая (25) на  $D/C$ , получаем уравнение объединенного узла «О»

$$\frac{D}{C} \theta_o = \sum_{i=1}^n \theta_i \frac{A_i}{C} + P_o + P_\partial. \quad (29)$$

Ввиду наличия дополнительного источника тепла

$$P_\partial = P_o \frac{\Delta}{C} (aG_b - bG_a), \quad (30)$$

первоначально сформулированное условие преобразования выполняется не полностью. Причиной этого является непропорциональное распределение источников, характеризующееся коэффициентом  $\Delta$ . Попытка во что бы то ни стало избавиться от  $P_\partial$  путем замены множителя  $D/C$  множителем

$$\frac{D}{C + \Delta(aG_b - bG_a)}$$

приводит к зависимости проводимостей схемы от источников тепла и чрезмерно усложняет расчет. Поэтому следует принять окончательное выражения (29, 30).

В соответствии с вышеизложенным преобразование схемы заключается в следующих трех операциях:

1) исключение узлов «а» и «в», которое приводит к изменению источников и взаимных проводимостей остальных узлов на  $\Delta P_1'$  и  $\Delta G_{ik}'$ ;

2) присоединение узла «О» (29) с источником  $(P_o + P_\partial)$  и проводимостями

$$G_{oi} = \frac{A_i}{C}, \quad (31)$$

собственная проводимость которого

$$G_o = \frac{D}{C}; \quad (32)$$

3) присоединение компенсирующего многоугольника, имеющего, в соответствии с правилами включения в схему нового узла, параметры  $\Delta P_i''$  и  $\Delta G_{ik}''$  (17, 18).

Общее изменение источников и взаимных проводимостей узлов схемы в результате первой и третьей операции составляет

$$\Delta P_i = \Delta P'_i + \Delta P''_i = P_o \frac{\Delta}{C} (bG_{ai} - aG_{bi}), \quad (33)$$

$$\Delta G_{ik} = \Delta G'_{ik} + \Delta G''_{ik} = \frac{(bG_{ai} - aG_{bi})(bG_{bk} - aG_{ak})}{C}. \quad (34)$$

При этом соблюдается баланс источников тепла

$$\sum_{i=1}^n \Delta P_i = P_o.$$

Данный вид преобразования, несмотря на некоторую сложность формул, оказывается эффективным в тех случаях, когда параметры исключаемых узлов являются взаимозависимыми.

В качестве примера может быть рассмотрена тепловая схема замещения лобовой части обмотки якоря машины постоянного тока. Если обмотка выполнена из мягких секций, не имеет при этом решетки в лобовых частях и обмоткодержатели не охлаждаются воздухом (рис. 4, а), то практически все тепло, выделяемое в нижнем слое ло-

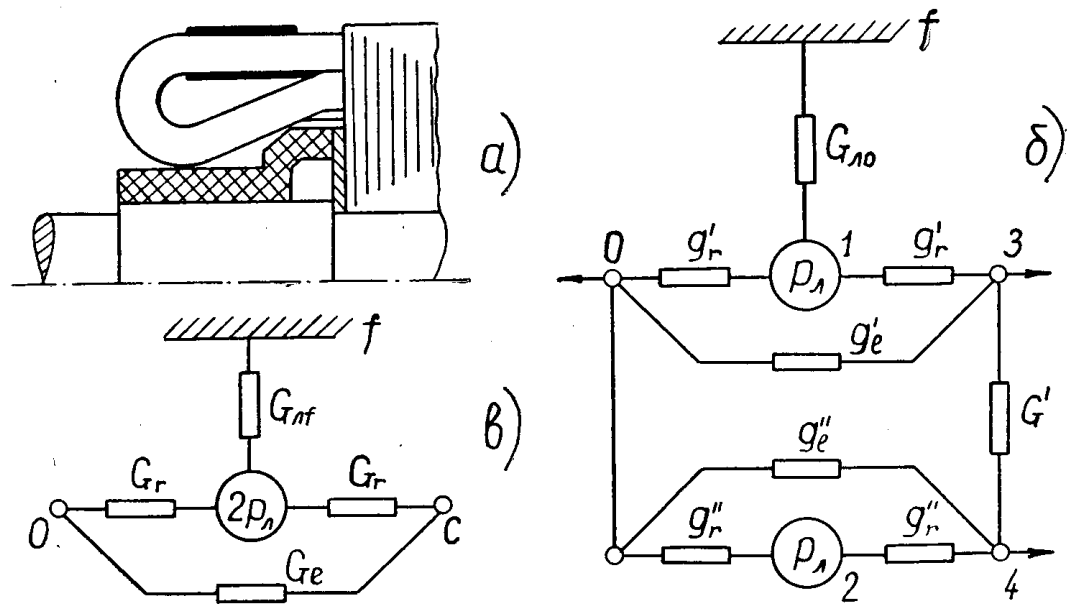


Рис. 4. Объединение верхнего и нижнего слоя лобовых частей при преобразовании тепловой схемы якоря

бовых частей, передается в верхний слой, распространяясь вдоль проводников. Можно показать, что передача тепла через междуслойную изоляцию при этом пренебрежимо мала.

Тепловая схема, составленная на основе [2], изображена на рис. 4, б. Длина участков секции, расположенных в верхнем и нижнем слое, считается одинаковой, поэтому источники тепла  $P_n$  для обоих слоев и аксиальные тепловые сопротивления  $R$  равны.

$G_{lo}$  — проводимость от верхнего слоя к воздуху.

Аксиальные проводимости с достаточной точностью выражаются формулами:

для верхнего слоя

$$g'_r = \frac{6}{R} \left(1 + \frac{m}{60}\right); \quad g'_l = -\frac{2}{R} \left(1 - \frac{m}{60}\right), \quad (35)$$

где

$$m = RG_{\text{ло}} \quad (36)$$

для нижнего слоя

$$g''_r = \frac{6}{R}; \quad g''_l = -\frac{2}{R}, \quad (37)$$

$G'$  — проводимость, учитывающая связь между слоями обмотки в активной части якоря.

При тепловом расчете якоря нецелесообразно разделять обмотку на два слоя, но следует в то же время учитывать влияние плохо охлаждаемого нижнего слоя лобовых частей на среднюю температуру обмотки. Попарное объединение узлов 1 и 2, представляющих среднюю температуру слоев, и узлов 3 и 4, которые соответствуют граничным сечениям между лобовой и пазовой частью, позволяет достаточно просто решить данный вопрос.

При замене узлов 1 и 2 одним узлом «Л»

$$a = b = 0,5; \quad \Delta = 0; \quad G_{ab} = G_{12} = 0, \quad (38)$$

$$G_a = G_1 = G_{\text{ло}} + 2g'_r = \frac{12}{R} \left(1 + \frac{m}{10}\right),$$

$$G_b = G_2 = 2g''_r = \frac{12}{R}, \quad (39)$$

$$C = 0,25(G_1 + G_2) = \frac{6}{R} \left(1 + \frac{m}{20}\right), \quad (40)$$

$$P_L = 2P_L; \quad P_D = 0; \quad \Delta P_i = 0. \quad (41)$$

Используя при расчете по (31) формулы упрощенного умножения и деления, благодаря малости вторых членов в выражениях (35—40), получаем

$$G'_{\text{лф}} = G_{\text{ло}} \left(1 - \frac{m}{20}\right), \quad (42)$$

$$G_{\text{лз}} = \frac{6}{R} \left(1 - \frac{m}{30}\right); \quad G_{\text{л4}} = \frac{6}{R} \left(1 + \frac{m}{20}\right); \quad G_{\text{ло}} = \frac{12}{R} \left(1 + \frac{m}{20}\right). \quad (43)$$

Подобный вид приобретают и выражения для взаимных проводимостей остальных узлов.

Аналогичным образом узлы 3 и 4 объединяются в узел «С», и схема приобретает окончательный вид (рис. 4, в), причем для упрощения схемы проводимости  $G_{\text{of}}$  и  $G_{\text{cf}}$ , имеющие незначительную величину, добавляются к проводимости  $G_{\text{лф}}$ .

Параметры схемы:

$$G_{\text{лф}} = G_{\text{ло}} \left[1 - \frac{m}{24} \left(1 + \frac{2,85}{1 + 2G'R}\right)\right], \quad (44)$$

$$G_r = \frac{12}{R}; \quad G_l = -\frac{4}{R}. \quad (45)$$

Проводимость  $G_{\text{лф}}$  учитывает с достаточной точностью влияние различных условий охлаждения верхнего и нижнего слоя обмотки на среднюю температуру лобовых частей и может быть рекомендована для использования в различных методиках теплового расчета якоря.



## Выводы

1. При составлении и анализе тепловых схем замещения и разработке методов их расчета могут эффективно использоваться такие виды преобразования, как исключение узла из схемы, включение в схему нового узла и объединение двух узлов схемы.

2. Данные преобразования являются принципиально точными, однако применение различных способов упрощения формул существенно повышает их эффективность, то есть, в конечном счете, способствует повышению точности тепловых расчетов без существенного их усложнения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Боляев. Повышение точности теплового расчета электрической машины методом эквивалентных тепловых схем при малом числе элементов. «Электромеханика», № 1, 1965.

2. Д. И. Санников. Эквивалентные тепловые схемы тел с одномерным температурным полем. Известия ТПИ, т. 138, 1965.