

**РАСЧЕТ ПОЛЯ В ТРЕХСЛОЙНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ
КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ
ПРИ ЗАДАННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛОВ
НА КРАЙНИХ ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

И. П. ГУК, В. А. ЛУКУТИН, В. С. СОКОЛОВ.

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ
электротехники)

Определение потенциала в однослойном диэлектрике кольцевого сечения (длинная труба из диэлектрического материала), при заданном распределении потенциала на окружностях граничных поверхностей, непосредственно сводится к решению внутренней задачи Дирихле для кольца. В литературе [1] этот случай рассмотрен достаточно подробно, решение записано в виде тригонометрического ряда и даны формулы для определения его коэффициентов.

Для двухслойного и трехслойного диэлектрика подобное решение задачи в литературе отсутствует и готовых формул для определения указанных коэффициентов нет, в то время как в связи с конструированием и исследованием электростатических генераторов цилиндрического типа и некоторой другой электрофизической аппаратуры, общее решение этой задачи приобретает определенный практический интерес.

В настоящей работе найдено распределение потенциала в каждом из слоев трехслойного диэлектрика кольцевого сечения в общем случае, т. е. при произвольном соотношении радиусов граничных поверхностей, электрических проницаемостей сред и произвольном виде функций распределения потенциала на крайних граничных поверхностях.

Рассмотрим диэлектрик, представляющий собой длинную трубу, состоящую из трех концентрически расположенных слоев из различных диэлектрических материалов с электрическими проницаемостями ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 . Сечение такой трехслойной трубы показано на рис. 1.

Полагаем, что осевая длина трубы достаточно большая сравнительно с внешним диаметром сечения, так что поле можно считать плоскопараллельным, свободные заряды в диэлектриках и на разделяющих их поверхностях отсутствуют, разделение потенциалов по окружностям крайних граничных поверхностей задано некоторыми функциями

$$U_1 = \varphi(r_1; \theta) \quad \text{и} \quad U_4 = \varphi(r_4; \theta) \quad (1)$$

Потенциал в каждом из слоев диэлектрика определяется уравнением Лапласа

$$\Delta \varphi^{(i)} = 0, \quad (2)$$

где $i=1, 2, 3$ — номер слоя.

Решая уравнение (2) методом разделения переменных, получаем выражение для потенциала в виде тригонометрического ряда [1]

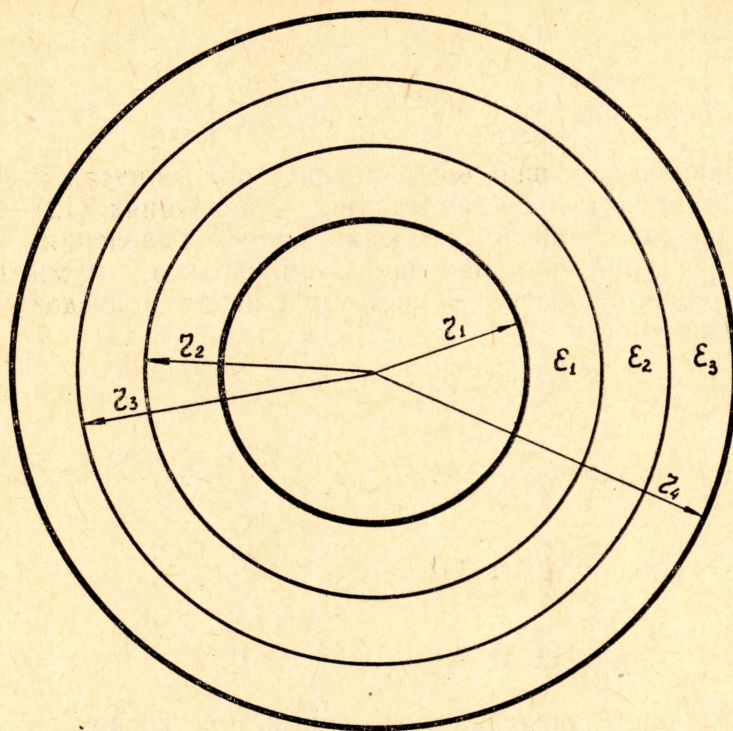


Рис. 1.

$$\varphi^{(i)}(r; \theta) = A_0^{(i)} \ln r + B_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} [(A_k^{(i)} r^k + B_k^{(i)} r^{-k}) \cos k\theta + (C_k^{(i)} r^k + D_k^{(i)} r^{-k}) \sin k\theta]. \quad (3)$$

Это решение справедливо для любого слоя.

Для нахождения постоянных в уравнении (3) разложим в ряд Фурье граничные функции

$$U_1(\theta) = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(1)} \cos k\theta + \beta_k^{(1)} \sin k\theta) \quad (4)$$

$$U_4(\theta) = \frac{\alpha_0^{(4)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(4)} \cos k\theta + \beta_k^{(4)} \sin k\theta). \quad (5)$$

Приравнявая коэффициенты при косинусах и синусах в уравнении (3), записанном для первого слоя ($i=1$), соответствующим коэффициентам тригонометрического ряда (4), а коэффициенты при косинусах и синусах в уравнении (3), записанном для третьего слоя, соответствующим коэффициентом ряда (5), получим шесть уравнений.

При $r=r_1$

$$A_0^{(1)} \ln r_1 + B_0^{(1)} = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2}, \quad (6)$$

$$A_k^{(1)} r_1^k + B_k^{(1)} r_1^{-k} = \alpha_k^{(1)}, \quad (7)$$

$$C_k^{(1)} r_1^k + D_k^{(1)} r_1^{-k} = \beta_k^{(1)}. \quad (8)$$

При $r=r_4$

$$A_0^{(3)} \ln r_4 + B_0^{(3)} = \frac{\alpha_0^{(4)}}{2}, \quad (9)$$

$$A_k^{(3)} r_4^k + B_k^{(3)} r_4^{-k} = \alpha_k^{(4)}, \quad (10)$$

$$C_k^{(3)} r_4^k + D_k^{(3)} r_4^{-k} = \beta_k^{(4)}. \quad (11)$$

Остальные двенадцать уравнений получаем из условия непрерывности потенциала и равенства нормальных составляющих вектора электрического смещения на границах раздела диэлектриков.

$$\begin{aligned} \text{При } r=r_2 \quad \varphi^{(1)}|_{r=r_2} &= \varphi^{(2)}|_{r=r_2}, & (12) \quad \text{При } r=r_3 \quad \varphi^{(2)}|_{r=r_3} &= \varphi^{(3)}|_{r=r_3}, & (14) \\ \varepsilon \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_2} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=r_2}, & (13) \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=r_3} &= \varepsilon_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial r} \Big|_{r=r_3}, & (15) \end{aligned}$$

Приравнивая почленно коэффициенты при синусах и косинусах, а также негармонические составляющие в уравнениях (12)–(15), получим остальные двенадцать уравнений для определения постоянных. Эти последние уравнения получаются простыми, и мы их здесь не приводим. Решая полученную систему и вводя приведенные электрические проницаемости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{2K}, \\ \varepsilon_{21} &= (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{2K}, \\ \varepsilon_{34} &= (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{2K}, \\ \varepsilon_{43} &= (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \left(\frac{r_4}{r_3} \right)^{2K}, \end{aligned}$$

находим следующие значения постоянных при косинусах:

$$\begin{aligned} A_K^{(1)} &= \frac{d_K^{(4)} r_4^K 4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \alpha_K^{(1)} r_1^K \left[(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\varepsilon_{43} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_{34} \left(\frac{r_4}{r_2} \right)^{2K} \right]}{r_4^{2K}\varepsilon_{12}\varepsilon_{34} - r_1^{2K}\varepsilon_{21}\varepsilon_{43}}, \\ A_K^{(3)} &= \frac{\alpha_K^{(4)} r_4^K \left[(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon_{12} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\varepsilon_{21} \left(\frac{r_1}{r_3} \right)^{2K} \right] - \alpha_K^{(1)} r_1^K 4\varepsilon_1\varepsilon_2}{r_4^{2K}\varepsilon_{12}\varepsilon_{34} - r_1^{2K}\varepsilon_{21}\varepsilon_{43}}. \end{aligned}$$

Остальные постоянные при косинусах выражены через $A_K^{(1)}$ и $A_K^{(3)}$.

$$B_K^{(1)} = \alpha_K^{(1)} r_1^K - A_K^{(1)} r_1^{2K}; \quad B_K^{(3)} = \alpha_K^{(4)} r_4^K = A_K^{(3)} r_4^{2K};$$

$$A_K^{(2)} = \frac{r_2^{-2K}}{2\varepsilon_2} \left[A_K^{(1)} r_2^{2K} (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + B_K^{(1)} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right];$$

$$B_K^{(2)} = \frac{1}{2\varepsilon_2} \left[A_K^{(1)} r_2^{2K} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + B_K^{(1)} (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \right].$$

Постоянные при негармонических составляющих записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_0^{(1)} &= \frac{\alpha_0^{(4)} - \alpha_0^{(1)}}{2 \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right]}; \\ A_0^{(2)} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} A_0^{(1)}; \quad A_0^{(3)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} A_0^{(1)}; \quad B_0^{(1)} = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2} - A_0^{(1)} \ln r_1; \\ B_0^{(2)} &= A_0^{(1)} \left(\ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln r_2 \right) + \frac{\alpha_0^{(1)}}{2}; \quad B_0^{(3)} = \frac{\alpha_0^{(4)}}{2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} A_0^{(1)} \ln r_4. \end{aligned}$$

Постоянные при синусах $C_K^{(i)}$ и $D_K^{(i)}$ записывать отдельно нецелесообразно, так как они очень просто получаются из соответствующих выражений для постоянных при косинусах $A_K^{(i)}$ и $B_K^{(i)}$. Чтобы записать формулу для $C_K^{(i)}$, достаточно в выражении постоянной $A_K^{(i)}$ (относящейся к тому же i -му слою) заменить $\alpha_K^{(1)}$ на $\beta_K^{(1)}$, а $\alpha_K^{(4)}$ на $\beta_K^{(4)}$.

Совершенно аналогично из постоянных $B_k^{(i)}$ получаются $D_k^{(i)}$.

Для двухслойного диэлектрика потенциал в каждом слое также определяется выражением (3) ($i=1, 2$).

Для определения постоянных в этом случае можно воспользоваться записанными выше формулами, заменив во всех выражениях γ_4 на γ_3 и приравняв ϵ_3 и ϵ_2 .

Необходимо отметить, что быстрота сходимости ряда (3), определяющего потенциал, зависит в основном от формы кривых, задающих распределение потенциала на крайних границах. Полученные формулы достаточно просты для расчета полей с применением математических машин. Они могут быть использованы также для оценки точности приближенных методов расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А. В. Конторович, В. И. Крылов.** Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1949.
2. **В. И. Смирнов.** Курс высшей математики. М., т. 11, 1953.