

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПОЛЯ РОТОРА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

И. П. ГУК, В. А. ЛУКУТИН.

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ  
электротехники)

В предыдущей статье предлагается раздельное рассмотрение поля статора и ротора электростатической машины и дается расчет электрического поля статора. Ниже приводится возможный вариант определения потенциальной функции поля ротора. Прежде чем приступить к рассмотрению поля, следует коротко пояснить конструкцию цилиндрической электростатической машины (ЭСМ), подробное описание которой дано, например, в [1].

В полости, образованной двумя концентрическими цилиндрами и заполненной определенным газом, помещается ротор. Ротор представляет собой цилиндр из диэлектрика, в котором в осевом направлении закреплены стержни (транспортёры) из проводящего материала. Таких стержней, удаленных на равные расстояния друг от друга, может быть 2  $m$  штук, причем транспортёры в области от  $0 \leq \theta < \pi$  несут заряды  $q_1$ , а транспортёры, помещенные в области  $\pi \leq \theta < 2\pi$ , имеют заряды  $q_1'$ , где  $l$  — длина стержней.

Если пренебречь краевым эффектом на торцах ротора, то поле, созданное заряженными транспортёрами, можно рассматривать как двухмерное.

Таким образом, задача сводится к отысканию потенциальной функции в кольцевой области с многослойным диэлектриком. В рассматриваемой области в общем случае имеется три диэлектрические среды с проницаемостями  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ , границы раздела которых имеют форму окружностей с радиусами  $r_2$  и  $r_3$ .

Крайние окружности ( $r=r_1$  и  $r=r_4$ ) имеют нулевой потенциал.

Если для этой области определить нормированную функцию Грина  $G(r; \theta)$ , то распределение потенциала от заряда  $q$ , расположенного в области, может быть найдено по формуле

$$\varphi(r; \theta) = qG(r; \theta). \quad (1)$$

Заряженную нить будем рассматривать как предел равномерно заряженной по объёму призмы, сечение которой в плоскости чертежа ограничено двумя дугами окружностей радиуса  $r_0$  и  $(r_0 + \delta)$  и двумя радиусами  $\theta = \pm \Delta$ , где  $\delta$  и  $\Delta$  — весьма малые величины, в пределе стремящиеся к нулю. Объёмная плотность равномерно распределённого внутри призмы заряда определяется соотношением



$$\rho_0 = \frac{q}{2r_0\Delta\sigma}. \quad (2)$$

Согласно [2] в области, заполненной средой с  $\varepsilon = \varepsilon_i$ , потенциал должен удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi^{(i)} = -\frac{\rho^{(i)}}{\varepsilon_i} \equiv f^{(i)}(r) \quad (3)$$

( $i=1, 2, 3$ ),

а на границе двух сред должны выполняться условия:

$$\varphi^{(1)}|_{r=r_2} = \varphi^{(2)}|_{r=r_2}; \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=r_2}, \quad (4)$$

$$\varphi^{(2)}|_{r=r_3} = \varphi^{(3)}|_{r=r_3}; \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=r_3} = \varepsilon_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial r} \Big|_{r=r_3}. \quad (5)$$

Используя метод частных решений [2], запишем решение уравнения (3) в цилиндрической системе координат в виде ряда

$$\varphi^{(i)} = \frac{1}{2} a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(i)} \cos k\theta + b_k^{(i)} \sin k\theta), \quad (6)$$

где коэффициенты  $b_k^{(i)}=0$ , так как распределение потенциальной функции симметрично относительно диаметра  $\theta=0$ , а коэффициенты  $a_0^{(i)}$  и  $a_k^{(i)}$  имеют следующий вид в первой и третьей областях ( $f_k^{(1)} = f_k^{(3)} = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(1)} &= A_0^{(1)} \ln r + B_0^{(1)} \\ a_k^{(1)} &= A_k^{(1)} r^k + B_k^{(1)} r^{-k} \end{aligned} \right\} r_1 \leq r \leq r_2, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(3)} &= A_0^{(3)} \ln r + B_0^{(3)} \\ a_k^{(3)} &= A_k^{(3)} r^k + B_k^{(3)} r^{-k} \end{aligned} \right\} r_3 \leq r \leq r_4. \quad (8)$$

Для второй области ( $r_2 \leq r \leq r_3$ )

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(2)} &= A_0^{(2)} \ln r + B_0^{(2)} + \int_{r_2}^r f_0^{(2)}(\zeta) \zeta \ln \frac{r}{\zeta} d\zeta, \\ a_k^{(2)} &= A_k^{(2)} r^k + B_k^{(2)} r^{-k} + \int_{r_2}^r \frac{1}{2k} f_k^{(2)}(\zeta) \zeta \left[ \left( \frac{r}{\zeta} \right)^k - \left( \frac{\zeta}{r} \right)^k \right] d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где интегралы в пределе ( $\delta \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow 0$ ) от любой функции  $F(\zeta)$ , конечной и непрерывной в интервале  $r_2 \leq \zeta \leq r_3$ , определяются следующим образом [2]:

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \Delta \rightarrow 0}} \int_{r_2}^r f_k^{(2)}(\zeta) F(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0, & \text{при } r_2 \leq r < r_0 \\ -\frac{q}{\pi \varepsilon_2 r_0} F(r_0), & \text{при } r_0 \leq r \leq r_3 \end{cases} \quad (10)$$

где

$$f_k^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(2)} \cos k\theta d\theta.$$

Для определения постоянных  $A_0^{(i)}$ ,  $B_0^{(i)}$ ,  $A_k^{(i)}$  и  $B_k^{(i)}$  запишем си-



стему уравнений в соответствии с (4), (5) и условием равенства нулю потенциала при  $r=r_1$ ,  $r=r_4$  и, помня о единственности разложения функции в ряд Фурье, приравниваем коэффициенты у соответствующих  $\cos k\theta$  и  $\sin k\theta$ :

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(1)} \ln r_1 + B_0^{(1)} &= 0; \\ A_0^{(1)} \ln r_2 + B_0^{(1)} &= A_0^{(2)} \ln r_2 + B_0^{(2)}; \\ A_0^{(1)} \varepsilon_1 &= A_0^{(2)} \varepsilon_2; \\ A_0^{(2)} \ln r_3 + B_0^{(2)} - \frac{q}{\pi \varepsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_0} &= A_0^{(3)} \ln r_3 + B_0^{(3)}; \\ A_0^{(2)} \frac{\varepsilon_2}{r_3} - \frac{q}{\pi} &= A_0^{(3)} \frac{\varepsilon_3}{r_3}; \\ A_0^{(3)} \ln r_4 + B_0^{(3)} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} A_K^{(1)} r_1^K + B_K^{(1)} r_1^{-K} &= 0; \\ A_K^{(1)} r_2^K + B_K^{(1)} r_2^{-K} &= A_K^{(2)} r_2^K + B_K^{(2)} r_2^{-K}; \\ (A_K^{(1)} r_2^{-K-1} k - B_K^{(1)} r_2^{-K-1} k) \varepsilon_1 &= (A_K^{(2)} r_2^{K-1} k - B_K^{(2)} r_2^{-K-1} k) \varepsilon_2; \\ A_K^{(2)} r_3^K + B_K^{(2)} r_3^{-K} - \frac{q}{\pi \varepsilon_2 k} \operatorname{sh} \left( k \ln \frac{r_3}{r_0} \right) &= A_K^{(3)} r_3^K + B_K^{(3)} r_3^{-K}; \\ \left[ A_K^{(2)} r_3^{K-1} k - B_K^{(2)} r_3^{-K-1} k - \frac{q}{\pi \varepsilon_2 r_3} \operatorname{ch} \left( k \ln \frac{r_3}{r_0} \right) \right] \varepsilon_2 &= (A_K^{(3)} r_3^{K-1} k - \\ &\quad B_K^{(3)} r_3^{-K-1} k) \varepsilon_3; \\ A_K^{(3)} r_4^K + B_K^{(3)} r_4^{-K} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Решение системы уравнений (11) относительно  $A_0^{(i)}$  и  $B_0^{(i)}$  дает:

$$A_0^{(1)} = \frac{q}{\pi \varepsilon_1} \Lambda_0, \quad (13) \quad B_0^{(1)} = -\ln r_1 A_0^{(1)}, \quad (14)$$

$$A_0^{(2)} = \frac{q}{\pi \varepsilon_2} \Lambda_0, \quad (15) \quad B_0^{(2)} = \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} - \ln r_2 A_0^{(2)} \quad (16)$$

$$A_0^{(3)} = \frac{q}{\pi \varepsilon_2} (\Lambda_0 - 1), \quad (17) \quad B_0^{(3)} = -\ln r_4 A_0^{(3)}, \quad (18)$$

где

$$\Lambda_0 = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \ln \frac{r_4}{r_3} + \ln \frac{r_3}{r_0}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \ln \frac{r_4}{r_3} + \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

А решая систему уравнений (12) и вводя обозначения

$$\varepsilon_{12} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^{2K},$$

$$\varepsilon_{21} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{2K},$$

$$\varepsilon_{34} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \left( \frac{r_3}{r_4} \right)^{2K},$$

$$\varepsilon_{43} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \left( \frac{r_4}{r_3} \right)^{2K},$$



получаем, что

$$A_K^{(1)} = \frac{q}{\pi k r_0^K} \frac{r_4^{2K} \varepsilon_{34} - r_0^{2K} \varepsilon_{48}}{r_4^{2K} \varepsilon_{12} \varepsilon_{34} - r_1^{2K} \varepsilon_{21} \varepsilon_{43}}, \quad (19)$$

$$B_K^{(1)} = -r_1^{2K} A_K^{(1)}, \quad (20)$$

$$A_K^{(2)} = \frac{\varepsilon_{12}}{2\varepsilon_2} A_K^{(1)}, \quad (21)$$

$$B_K^{(2)} = -\frac{\varepsilon_{21}}{2\varepsilon_2} r_1^{2K} A_K^{(1)}, \quad (22)$$

$$A_K^{(3)} = \frac{q}{\pi k r_0^K} \frac{r_1^{2K} \varepsilon_{21} - r_0^{2K} \varepsilon_{12}}{r_4^{2K} \varepsilon_{12} \varepsilon_{34} - r_1^{2K} \varepsilon_{21} \varepsilon_{43}}, \quad (23)$$

$$B_K^{(3)} = -r_4^{2K} A_K^{(3)}. \quad (24)$$

Теперь, подставляя значения постоянных в уравнение (6), получим выражение для нормированной функции Грина:

$$G(r; \theta) = \begin{cases} A_0^{(1)} \ln \frac{r}{r_1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_K^{(1)} \frac{r^{2K} - r_1^{2K}}{r^K} \cos k\theta \\ \quad (r_1 \leq r \leq r_2), \\ A_0^{(2)} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} - \ln \frac{r}{r_2} \right) - v \frac{1}{\pi \varepsilon_2} \ln \frac{r}{r_0} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_K^{(2)} r^K + B_K^{(2)} r^{-K} - \frac{v \operatorname{sh} \left[ k \ln \frac{r}{r_0} \right]}{2\pi \varepsilon_2 k r_0^K} \right) \cos k\theta \\ \quad (r_2 \leq r \leq r_3), \\ A_0^{(3)} \ln \frac{r}{r_4} + \sum_{k=1}^{\infty} A_K^{(3)} \frac{r^{2K} - r_4^{2K}}{r^K} \cos k\theta \\ \quad (r_3 \leq r \leq r_4), \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{где } v = \begin{cases} 0 & \text{при } r_2 \leq r < r_0, \\ 1 & \text{при } r_0 \leq r \leq r_3. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что выражение (25) имеет свойства, которыми должна обладать функция Грина. Внутри кольца она имеет единственную особенность  $r=r_0$  и  $\theta=0$  и равна нулю на внутренней и внешней окружностях.

Применим теперь приведенное выражение (25) к расчету электрического поля электростатической машины с транспортерами-проводниками, устройство которой мы пояснили выше. Поперечное сечение генератора данного типа при кондукционной схеме возбуждения в режиме короткого замыкания будет соответствовать рис. 1, в котором нужно взять не один, а 2  $m$  заряженных проводников, причем координаты  $n$ -го транспортера будут

$$r = r_0 \text{ и } \theta = \frac{n-1}{m} \pi.$$

Распространим теперь соотношение (25) на последовательность 2  $m$  линейных зарядов, помня, что транспортеры от первого до  $m$ -го несут



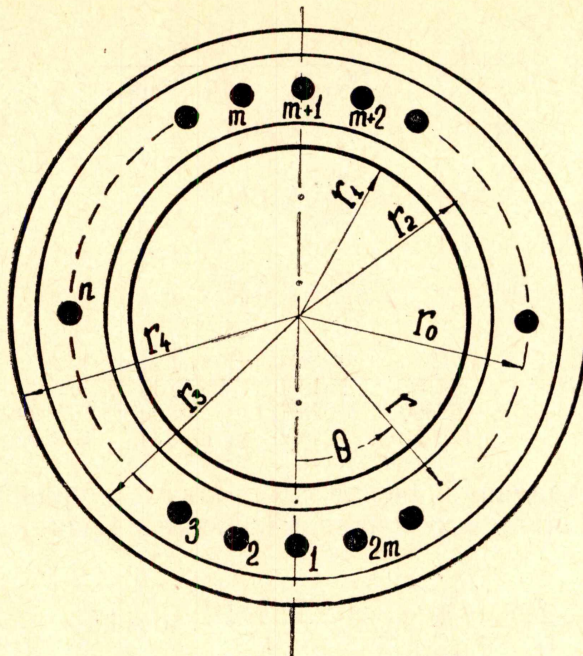


Рис. 1.

заряд  $q$ , а остальные —  $q^1$ . И пользуясь методом наложения, получим формулу для определения потенциала

$$\varphi(r; \theta) = q \sum_{n=1}^m G_n(r; \theta) + d^1 \sum_{n=m+1}^{2m} G_n(r; \theta), \quad (26)$$

где  $G_n(r; \theta)$  — нормированная функция Грина для  $n$ -го транспортера, определенная по выражению (25), в котором нужно  $\theta$  заменить на  $(\theta - \frac{n-1}{m}\pi)$ . Используя граничные условия в режиме короткого замыкания

$\varphi(r_0; \pi) = 0$  и  $\varphi(r_0; 0) = U_B$ ,  
(где  $U_B$  — напряжение источника возбуждения), получим, что потенциал в любой точке поля

$$\varphi(r; \theta) = \left[ \frac{\sum_{n=1}^{2m} G_n(r; \theta)}{\sum_{n=1}^{2m} G_n(r_0; 0)} + \frac{\sum_{n=1}^m G_n(r; \theta) - \sum_{n=m+1}^{2m} G_n(r; \theta)}{G_1(r_0; 0)} \right] \frac{U_B}{2}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Левитов, А. Г. Ляпин. Электростатические генераторы с жестким ротором. ч. I, М., 1963.
2. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. §§ 15, 18, М., 1948.