

### О СООТНОШЕНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ МЕЖДУ ПОЛИНОМАМИ ЛЕЖАНДРА И ЧЕБЫШЕВА

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научно-методическим семинаром кафедры инженерной и  
вычислительной математики).

Преобразование Лапласа экспоненциальных полиномов Лежандра и Чебышева («е»-полиномов) [3] позволяет получить ряд интегральных соотношений, связывающих как «е»-полиномы одного индекса, так и обыкновенные полиномы Лежандра и Чебышева, определением на интервале (0,1) или (-1,1).

Рассмотрим прежде представление для «е»-полинома Чебышева I рода  $T_n^*(t)$ .

Ранее [3] было получено соответствие

$$\frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}} T_n^*(t) \Leftrightarrow W(p) \cdot \varphi_n(p), \quad (1)$$

где

$$W(p) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{a \Gamma\left(\frac{p}{a}\right) \cdot \frac{p}{a}} \Leftrightarrow W(t) = \frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}}, \quad (2)$$

$$\varphi_n(p) = \frac{\frac{p}{a} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{p}{a} - k\right)}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{p}{a} + k\right)} = (-1)^{n-1} \frac{p \prod_{k=1}^{n-1} (ka - p)}{\prod_{k=1}^n (ka + p)} \Leftrightarrow \varphi_n(t). \quad (3)$$

Согласно теореме об изображении свертки можем написать

$$\frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}} T_n^*(t) = \int_0^t W(t - \tau) \varphi_n(\tau) d\tau,$$

откуда

$$T_n^*(t) = e^{\frac{at}{2}} \sqrt{1-e^{-at}} \int_0^t W(t - \tau) \varphi_n(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Займемся определением функции  $\varphi_n(t)$ . Ее изображение по Лапласу (3) можно представить следующим образом:

$$\varphi_n(p) = (-1)^{n-1} p \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (ka - p)}{\prod_{k=1}^n (ka + p)} = (-1)^{n-1} p [p + (n+1)a] \frac{1}{a} V_n(p)$$

или после раскрытия скобок

$$\varphi_n(p) = (-1)^{n-1} \left[ \frac{1}{a} p^2 V_n(p) + (n+1)p V_n(p) \right]. \quad (5)$$

Если теперь иметь в виду, что  $V_n(p)$  есть изображение по Лапласу интегрального «е»-полинома Лежандра  $V_n^*(t)$  [4], т. е.

$$V_n(p) = a \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (ka - p)}{\prod_{k=1}^n (ka + p)} \doteq V_n^*(t), \quad (6)$$

то легко найдем

$$\left. \begin{aligned} p V_n(p) &\doteq \frac{dV_n^*(t)}{dt} \\ p^2 V_n(p) &\doteq \frac{d^2 V_n^*(t)}{dt^2} + V_n^{*'}(0) \delta(t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Поскольку

$$V_n^{*'}(0) = -a P_n^*(0) = a(-1)^{n+1},$$

последнее соответствие можно записать в виде

$$p^2 V_n(p) \doteq \frac{d^2 V_n^*(t)}{dt^2} + a(-1)^{n+1} \delta(t).$$

Дельта-функция  $\delta(t)$  возникает вследствие разрыва производной  $V_n^{*'}(t)$  при  $t=0$ , поскольку мы считаем, что  $V_n^*(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ . Таким образом, искомая функция  $\varphi_n(t)$  имеет вид

$$\varphi_n(t) = (-1)^{n-1} \left[ \frac{1}{a} \frac{d^2 V_n^*(t)}{dt^2} + (n+1) \frac{dV_n^*(t)}{dt} \right] + \delta(t). \quad (8)$$

Выражение в скобках можно представить через «е»-полином Лежандра  $P_n^*(t)$  и его производную.

Имеем [4]

$$\frac{dV_n^*(t)}{dt} = -ae^{-at} P_n^*(t),$$

$$\frac{d^2 V_n^*(t)}{dt^2} = a^2 e^{-at} P_n^*(t) - ae^{-at} \frac{dP_n^*(t)}{dt}.$$

Подстановка дает

$$\varphi_n(t) = (-1)^n e^{-at} \left[ na P_n^*(t) + \frac{dP_n^*(t)}{dt} \right] + \delta(t). \quad (9)$$

Таким образом, формула (4) получает вид

$$T_n(t) = 1 + (-1)^n e^{\frac{at}{2}} \sqrt{1 - e^{-at}} \int_0^t W(t - \tau) e^{-a\tau} \left[ na P_n^*(\tau) + \frac{dP_n^*(\tau)}{d\tau} \right] d\tau. \quad (10)$$

Это и есть искомое соотношение.

Сделаем подстановки  $x = e^{-at}$  и  $y = e^{-a\tau}$ , тогда «е»-полином  $T_n^*(t)$  преобразуется в смещенный полином Чебышева I рода  $T_n^*(x)$ , а «е»-полином  $P_n(\tau)$  — в смещенный полином Лежандра  $P_n^*(y)$  [1, 3]. Далее, имея в виду равенства

$$W(t - \tau) = \frac{e^{-\frac{a}{2}(t-\tau)}}{\sqrt{1 - e^{-a(t-\tau)}}} = \frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\sqrt{e^{-a\tau} - e^{-at}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y-x}},$$

$$\frac{dP_n^*(\tau)}{d\tau} = -\frac{dP_n^*(y)}{dy} y \cdot a; \quad d\tau = -\frac{dy}{y \cdot a},$$

сразу получим

$$T_n^*(x) = 1 - (-1)^n \sqrt{1-x} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{y-x}} \left[ nP_n^*(y) - y \frac{dP_n^*(y)}{dy} \right] dy$$

или, поменяв местами пределы, можем написать

$$T_n^*(x) = 1 + (-1)^n \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}} \left[ nP_n^*(y) - y \frac{dP_n^*(y)}{dy} \right] dy \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (11)$$

Наконец, сделав замену [1, 3]

$$x \rightarrow \frac{1+x}{2} \quad \text{и} \quad y \rightarrow \frac{1+y}{2},$$

получим соотношение для обыкновенных полиномов

$$T_n(x) = 1 + \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{nP_n(y) - (1-y) \frac{dP_n(y)}{dy}}{\sqrt{y-x}} dy \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (12)$$

Установим аналогичную связь между полиномом Чебышева II рода и полиномом Лежандра.

Для «е»-полинома Чебышева II рода  $U_{n-1}^*(t)$ , учитывая (10), а также равенство [3]

$$U_{n-1}^*(t) = -\frac{1}{2na} e^{at} \frac{dT_n^*(t)}{dt}, \quad (13)$$

сразу получим

$$U_{n-1}^*(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{2na} e^{at} \frac{d}{dt} e^{\frac{at}{2}} \sqrt{1 - e^{-at}} \int_0^t W(t - \tau) e^{-a\tau} \left[ naP_n^*(\tau) + \frac{dP_n^*(\tau)}{d\tau} \right] d\tau \quad (14)$$

Для смещенных полиномов вместо (13) будем иметь

$$U_{n-1}^*(x) = \frac{1}{2n} \frac{dT_n^*(x)}{dx} \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (15)$$

Таким образом, дифференцируя (11) по  $x$  и подставляя в (15), найдем

$$U_{n-1}^*(x) = \frac{(-1)^n}{2n} \frac{d}{dx} \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{nP_n^*(y) - y \frac{dP_n^*(y)}{dy}}{\sqrt{y-x}} dy \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (16)$$

Для обыкновенных полиномов соотношение имеет вид

$$U_{n-1}(x) = \frac{(-1)^n}{n} \frac{d}{dx} \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{n P_n(y) - (1+y) \frac{dP_n(y)}{dy}}{\sqrt{y-x}} dy \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (17)$$

Полученные интегральные формулы можно записать более компактно. Введем систему «е»-полиномов

$$D_n^*(t) = \frac{1}{2} [P_n^*(t) - P_{n-1}^*(t)] \quad (n=1, 2, \dots), \quad (18)$$

где  $P_n^*(t)$  — «е»-полином Лежандра. Эта система является, очевидно, полной в том же гильбертовом пространстве, в каком полна система «е»-полиномов Лежандра  $P_n^*(t)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) [3]. Отметим также равенства

$$D_n^*(0) = 1 \text{ и } D_n^*(\infty) = 0.$$

Покажем теперь, что

$$e^{-at} \left[ na P_n^*(t) + \frac{dP_n^*(t)}{dt} \right] = \frac{dD_n^*(t)}{dt}. \quad (19)$$

Имеет место следующее рекуррентное соотношение для «е»-полиномов Лежандра:

$$(1-2e^{-at}) \frac{dP_n^*(t)}{dt} - \frac{dP_{n-1}^*(t)}{dt} = 2nae^{-at} P_n^*(t). \quad (20)$$

Оно получается из соотношения для обыкновенных полиномов Лежандра, определенных на интервале  $(-1, 1)$  [2], если сделать замену  $x \rightarrow 1-2e^{-at}$ . Из (20) найдем

$$e^{-at} \frac{dP_n^*(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{dP_n^*(t)}{dt} - \frac{dP_{n-1}^*(t)}{dt} \right] - nae^{-at} P_n^*(t)$$

или в другой форме

$$e^{-at} \frac{dP_n^*(t)}{dt} = \frac{dD_n^*(t)}{dt} - nae^{-at} P_n^*(t),$$

откуда непосредственно следует тождество (19). Для смещенных полиномов будем иметь ( $x=e^{-at}$ )

$$nP_n^*(x) - x \frac{dP_n^*(x)}{dx} = \frac{dD_n^*(x)}{dx} \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (21)$$

Сделав замену  $x \rightarrow \frac{1+x}{2}$ , получим для обыкновенных полиномов

$$nP_n(x) - (1+x) \frac{dP_n(x)}{dx} = 2 \frac{dD_n(x)}{dx} \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (22)$$

Вместо соотношений (10), (11) и (12) теперь можем написать:

$$\left. \begin{aligned} T_n^*(t) &= 1 + (-1)^n e^{\frac{at}{2}} \sqrt{1-e^{-at}} \int_0^t W(t-\tau) \frac{dD_n^*(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (0 \leq t \leq \infty), \\ T_n^*(x) &= 1 + (-1)^n \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}} \cdot \frac{dD_n^*(y)}{dy} dy \quad (0 \leq x \leq 1), \\ T_n(x) &= 1 + (-1)^n \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}} \frac{dD_n(y)}{dy} dy \quad (-1 \leq x \leq 1). \end{aligned} \right\} (23)$$

Аналогично могут быть записаны формулы (14), (16) и (17). Решим теперь обратную задачу, т. е. выразим полином Лежандра через полином Чебышева.

Прежде найдем преобразование Лапласа «е»-полинома  $D_n^*(t)$ . Имеем [3]

$$P_n^*(t) \doteq \prod_{k=1}^n \frac{ka - p}{ka + p} \quad \text{и} \quad P_{n-1}^*(t) \doteq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{ka - 1}{ka + p}.$$

Таким образом,

$$D_n^*(t) = \frac{1}{2} [P_n^*(t) - P_{n-1}^*(t)] \doteq - \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (ka - p)}{\prod_{k=1}^n (ka + p)} = D_n(p). \quad (24)$$

Введем обозначение

$$\frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-at}}} T_n^*(t) \doteq \psi_n(p) = W(p) \cdot \varphi_n(p). \quad (25)$$

Учитывая (2), (3) и (24), можем написать

$$\begin{aligned} \psi_n(p) &= (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (ka - p)}{\prod_{k=1}^n (ka + p)} = \\ &= (-1)^n \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} D_n(p). \end{aligned}$$

Откуда

$$D_n(p) = (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)} \psi_n(p) \quad (26)$$

Пусть

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)} \doteq f(t).$$

По теореме смещения будем иметь

$$\frac{\pi}{a} e^{-\frac{at}{2}} f(t) \doteq \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{a \Gamma\left(\frac{p}{a}\right) \cdot \frac{p}{a}}$$

Сравнивая с (2), приходим к выводу, что

$$f(t) = \frac{a}{\pi \sqrt{1 - e^{-at}}}. \quad (27)$$

Таким образом, переходя к оригиналам в операторном равенстве (26), получим согласно теореме свертки

$$D_n^*(t) = (-1)^n \int_0^t f(t - \tau) \frac{e^{-\frac{a\tau}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-a\tau}}} T_n^*(\tau) d\tau. \quad (28)$$

или в развернутом виде

$$D_n^*(t) = \frac{(-1)^n a}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-a(t-\tau)}}} \cdot \frac{e^{-\frac{a\tau}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-a\tau}}} T_n^*(\tau) d\tau \quad (29)$$

Если учесть, что [4]

$$D_n^*(t) + D_{n+1}^*(t) = \frac{1}{2} [P_{n+1}^*(t) - P_{n-1}^*(t)] = -(2n+1)V_n^*(t), \quad (30)$$

легко найдем

$$V_n^*(t) = \frac{(-1)^{n+1} a}{\pi(2n+1)} \int_0^t \frac{e^{-\frac{a\tau}{2}} [T_{n+1}^*(\tau) - T_n^*(\tau)]}{\sqrt{1 - e^{-a(t-\tau)}} \sqrt{1 - e^{-a\tau}}} d\tau \quad (31)$$

Наконец, из тождества

$$\frac{dV_n^*(t)}{dt} = -ae^{-at}P_n^*(t).$$

Следует соотношение для «е»-полиномов

$$P_n^*(t) = \frac{(-1)^n e^{at}}{\pi(2n+1)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{-\frac{a\tau}{2}} [T_{n+1}^*(\tau) - T_n^*(\tau)]}{\sqrt{1 - e^{-a(t-\tau)}} \sqrt{1 - e^{-a\tau}}} d\tau. \quad (32)$$

Для смещенных полиномов, выполнив замену  $x=e^{-at}$  и  $y=e^{-a\tau}$ , будем иметь

$$P_n^*(x) = \frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)} \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{T_{n+1}^*(y) - T_n^*(y)}{\sqrt{(y-x)(1-y)}} dy \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (33)$$

Для обыкновенных полиномов соотношение получает вид

$$P_n(x) = \frac{(-1)^{n2}}{\pi(2n+1)} \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{T_{n+1}(y) - T_n(y)}{\sqrt{(y-x)(1-y)}} dy \quad (-1 \leq x \leq y) \quad (34)$$

В заключение отметим, что все полученные соотношения легко могут быть проверены непосредственным интегрированием.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ланцош. «Практические методы прикладного анализа». Физматгиз, М., 1961.
2. Н. Н. Лебедев. «Специальные функции и их приложения». Физматгиз, М.-Л., 1963.
3. В. М. Осипов. «Экспоненциальные полиномы и разложение некоторых типовых сигналов», Изв. ТПИ, том 180, Томск, 1969.
4. В. М. Осипов. «К вопросу о приближенном обращении преобразования Лапласа». (Настоящий том).