ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 191 1969

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ МЕТОДОМ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научно-методическим семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики).

Задача приближения функций времени или других функций, определенных на полубесконечном интервале, часто возникает в различных отраслях современной техники.

Если функция задана аналитически, то задача приближения наилучшим образом решается путем ее разложения в конечный ряд по той или иной системе ортогональных функций. В этом случае, как известно, ошибка приближения будет минимальной в смысле метрики соответствующего гильбертова пространства. Из всех систем такого рода наилучшими аппроксимирующими возможностями обладают экспоненциальные полиномы («е»-полиномы) Чебышева I рода $T_k^*(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ и «е»-функции Чебышева III рода $S_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots)$ [5]. Однако, если коэффициенты Фурье разложения по функциям $S_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots)$ можно получить с помощью экспоненциальных моментов для весьма широкого класса функций времени [6], то разложение по «е»-полиномам $T_k^*(t)$ $(k=0, 1, 2 \ldots)$, как правило, найти не удается [5]. Между тем приближенные значения коэффициентов обоих разложений, лишь незначительно отличающихся от коэффициентов Фурье, можно получить в результате интерполяционного процесса, в котором узлами интерполирования служат нули «е»-полинома $T_n^*(t)$ или функции $S_{n+1}(t)$. Такой путь определения коэффициентов разложения является наиболее простым и совершенно естественным, когда функция времени, подлежащая разложению, задана в виде некоторой эмпирической зависимости, т. е. графически.

Замечательное свойство обычных ортогональных полиномов, определенных на конечном интервале, заключающееся в том, что они ортогональны не только в смысле интегрирования, но и в смысле суммирования по узлам интерполирования [4], без всяких изменений распространяется на «е»-функции Чебышева $T_k^*(t)$ и $S_k(t)$, что существенно упрощает процедуру вычисления.

Задачи интерполирования с помощью ортогональных функций в связи с этим удобно рассматривать с точки зрения простейших понятий функционального анализа.

Возможны различные схемы интерполирования с помощью «е»-функций $T_k^*(t)$ и $S_k(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, каждой из этих схем соответствует единственный ортогональный базис, порождающий некоторое подпространство «n»-мерного эвклидова пространства R_n. Ниже рассматриваются некоторые из этих схем.

1. Ортогональные базисы некоторых подпространств

а) Подпространство R_n^{TT}

Пусть $T_0^*(t)$, $T_1^*(t)$, ... $T_{n-1}(t)$ — «n» первых «е»-полиномов Чебышева I рода [5]. Предположим, что t_i^T $(i=1, 2 \ldots n)$ — нули «е»-полинома $T_n^*(t)$. Образуем систему из «n» векторов T_k $(k=0, 1 \ldots n-1)$. «n» координат каждого вектора этой системы определяются как значения «е»-полинома $T_k^*(t)$ в нулях «е»-полинома $T_n^*(t)$, т. е.

$$T_k = \{T_k^*(t_1^T),\ T_k^*(t_2^T),\ \ldots,\ T_k^*(t_n^T)\}. \tag{1-1}$$

Построенная система векторов образует ортогональный базис некоторого подпространства R_n^{TT} эвклидова пространства R_n [1], так как [приложение 1]

$$(T_k,\ T_m)=0 \quad k\neq m$$

$$\|T_k\|^2=(T_k,\ T_k) = \frac{n}{2} \tag{1-2}$$

Любой вектор $f^T \in R_n^{TT}$ представим в форме [1]

$$f^T = \sum_{k=0}^{n-1} b_K^T T_K. \tag{1-3}$$

В частности, предположим, что задана некоторая ограниченная функция $f(t)$ $(o \leqslant t \leqslant \infty)$, удовлетворяющая условию [5]

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}}[f(t)]^2}{\sqrt{1-e^{-a}}}dt < \infty,$$

тогда она может быть разложена в сходящий ряд по «е»-полиномам $T_k^*(t)$

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_K T_K^*(t).$$

Рассмотрим отрезок ряда

$$f(t) \approx \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_K T_K^*(t). \tag{1-4}$$

Положим последовательно $t=t_i^T$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, тогда получим систему из n линейных уравнений, которую в векторной форме можно записать следующим образом:

$$f^T = \sum_{k=0}^{n-1} b_K^T T_K, \tag{1-5}$$

где вектор f^T имеет вид

$$f^T = \{f(t_1^T),\ f(t_2^T),\ \ldots,\ f(t_n^T)\}, \tag{1-6}$$

b_k^T $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — скалярные величины, несколько отличающиеся от коэффициентов b_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ в разложении (1-4); T_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — система векторов, определяемая формулой (1-1) и образующая ортогональный базис подпространства R_n^{TT}, причем вектор T_0 берется с весом $1/2$.

Равенство (1-5) совпадает с (1-3). Оно означает, что существует оператор $\tilde{I}_n^{TT}$, осуществляющий изометрическое отображение подпространства R_n^{TT} на n-мерное эвклидово пространство R_n, т. е.

$$\tilde{I}_n^{TT} \cdot f^T = b^T, \tag{1-7}$$

где

$$b^T = (b_0^T,\ b_1^T,\ \ldots,\ b_{n-1}^T). \tag{1-8}$$

Выясним структуру оператора $\tilde{I}_n^{\tau\tau}$. Умножим (1-5) скалярно на вектор T_m, тогда в силу (1-2) будем иметь

$$b_m^\tau = \frac{(f^\tau, T_m)}{\| T_m \|^2} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i^\tau) T_m^*(t_i^\tau) (m = 0,1,2...n-1). \qquad (1\text{-}9)$$

Совокупность этих уравнений можно записать в форме (1-7). Следовательно, оператор $\tilde{I}_n^{\tau\tau}$ определяется матрицей $n \times n$ с элементами

$$a_{ki} = \frac{T_k^*(t_i^\tau)}{\| T_k \|^2} = \frac{2}{n} T_k^*(t_i^\tau)(k = 0,1..n-1)(i = 1,2...n).$$

Формула (1-9) определяет приближенное значение коэффициентов в разложении (1-4), полученное в результате интерполяционного процесса по нулям первого из отброшенных «е»-полиномов в (1-4), т. е. по нулям $T_n^*(t)$. Если произвести нормирование векторов T_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, то получим ортонормированный базис подпространства $R_n^{\tau\tau}$, который можно рассматривать как совокупность собственных векторов некоторого самосопряженного оператора A^τ. Система уравнений для нормированных векторов $\overline{T}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot T_k$ имеет вид

$$A^\tau \cdot \overline{T}_k = \lambda_k \cdot \overline{T}_k \quad (k=0, 1, \ldots, n-1), \qquad (1\text{-}10)$$

λ_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — собственные значения оператора A^τ. Введем матрицу $n \times n$ U_n^τ, столбцы которой есть координаты векторов $\overline{T}_k$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$.

Очевидно,

$$U_n^\tau \cdot \tilde{U}_n^\tau = E, \qquad (1\text{-}11)$$

где E — единичная матрица, а символ $(\sim)$ означает транспонирование. Можно видеть также, что

$$\tilde{U}_n^\tau = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \tilde{I}_n^{\tau\tau}, \qquad (1\text{-}12)$$

и следовательно,

$$I_n^{\tau\tau} \cdot \tilde{I}_n^{\tau\tau} = \frac{2}{n} E. \qquad (1\text{-}13)$$

Умножим уравнение (1-7) на $I_n^{\tau\tau}$, тогда получим

$$f^\tau = \frac{n}{2} I_n^{\tau\tau} b^\tau \qquad (1\text{-}14)$$

Это уравнение эквивалентно векторному уравнению (1-5), полученному в результате интерполирования, поэтому матрицу $\frac{n}{2} I_n^{\tau\tau}$ естественно назвать интерполяционной матрицей. Столбцами этой матрицы служат векторы T_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, умноженные на $\frac{2}{n}$.

Найдем структуру оператора A^τ, собственные векторы которого образуют ортонормированный базис рассматриваемого подпространства. Введем диагональную матрицу λ

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}15)$$

и напишем матричное уравнение

$$A^\tau \cdot U_n^\tau = U_n^\tau \lambda. \qquad (1\text{-}16)$$

Оно эквивалентно всей совокупности уравнений вида (1-10) [4]. Умножим (1-16) справа на транспонированную матрицу $\widetilde{U}_n^т$. Учитывая (1-11), будем иметь следующее представление для матричного оператора

$$A^т = U_n^т \lambda \cdot \widetilde{U}_n^т = \frac{n}{2} I_n^{тт} \cdot \lambda \cdot \widetilde{I}_n^{тт}. \qquad (1\text{-}17)$$

б) Подпространство R_n^{SS}

Ортогональный базис, порождающий подпространство R_n^{SS}, можно получить аналогично предыдущему.
Возьмем n первых «е»-функций Чебышева III рода $S_1(t), \ldots, S_n(t)$ [5]. Пусть t_i^S $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть нули функции $S_{n+1}(t)$, т. е. нули «е»-полинома Чебышева II рода $U_n^*(t)$, так как

$$S_{n+1}(t) = 2 \cdot e^{-\frac{at}{2}} \sqrt{1 - e^{-at}} \cdot U_n^*(t).$$

Образуем n векторов по формуле

$$S_k = \{S_k(t_1^S), S_k(t_2^S), \ldots, S_k(t_n^S)\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1\text{-}18)$$

Можно показать [приложение 1], что

$$\left.\begin{aligned} (S_k, S_m) &= 0 \qquad k \neq m \\ (S_k, S_k) &= \| S_k \|^2 = \frac{n+1}{2} \end{aligned}\right\}, \qquad (1\text{-}19)$$

поэтому система векторов $S_1, S_2, \ldots, S_n$ может быть принята в качестве ортогонального базиса некоторого подпространства, которое мы обозначим через R_n^{SS}.

Рассмотрим задачу интерполирования с помощью функций $S_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Функцию $f(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$ подчиним дополнительному условию

$$f(0) = f(\infty) = 0. \qquad (1\text{-}20)$$

Задача состоит в определении коэффициентов частной суммы

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^{n} \beta_k S_k(t), \qquad (1\text{-}21)$$

которая имеет векторный аналог

$$f^S = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^S S_k \qquad (1\text{-}22)$$

Смысл равенства (1-22) состоит в том, что вектор f^S, принадлежащий подпространству R_n^{SS}, раскладывается по ортогональному базису этого подпространства, поэтому

$$\beta_k^S = \frac{(f^S, S_k)}{\| S_k \|^2} = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^{n} f(t_i^S) S_k(t_i^S) \quad (k = 1, 2 \ldots n), \qquad (1\text{-}23)$$

где $f(t_i^S)$ — значения функции $f(t)$ в узлах интерполирования, т. е. координаты вектора f^S. Аналогично предыдущему мы можем ввести интерполяционную матрицу $\frac{n+1}{2} I_n^{SS}$, столбцы которой есть координаты соответствующих векторов ортогонального базиса, умноженные на $\frac{2}{n+1}$.
С помощью этой матрицы (1-22) можно записать в форме (1-14)

$$f^S = \frac{n+1}{2} I_n^{SS} \beta^S, \qquad (1\text{-}24)$$

где $\beta^S = (\beta_1{}^S, \beta_2{}^S, \ldots, \beta_n{}^S)$ — вектор n-мерного эвклидова пространства R_n. Таким образом, $\frac{n+1}{2} I_n{}^{SS}$ есть матрица, осуществляющая изоморфное соответствие между пространством R_n и его подпространством $R_n{}^{SS}$.

Учитывая, что

$$\frac{n+1}{2} I_n{}^{ss} \cdot \tilde{I}_n{}^{ss} = E,$$

можно получить решение уравнения (1-24) относительно вектора β^S

$$\beta^S = I_n{}^{SS} \cdot f^S, \qquad (1\text{-}25)$$

которое объединяет всю совокупность скалярных уравнений (1-23). Отметим также, что ортонормированный базис $S_1, S_2, \ldots, S_n$ рассматриваемого подпространства есть особенные векторы матричного оператора A^S, структура которого определяется формулой

$$A^s = \frac{n+1}{2} I_n{}^{ss} \cdot \lambda \cdot \tilde{I}_n{}^{ss}.$$

в) Подпространство $R_n{}^{ST}$

Пусть имеет место конечное разложение (1-21). В качестве узлов интерполирования выберем не нули «е»-полинома $U_n{}^*(t)$, как в предыдущем случае, а нули «е»-полинома $T_n{}^*(t)$. Векторное разложение получит вид

$$f^T = \sum_{\kappa=1}^{n} \beta_\kappa{}^T \cdot S_\kappa{}^T, \qquad (1\text{-}26)$$

где f^T есть (1-6), а вектор $S_k{}^T$ определяется формулой

$$S_k{}^T = \{S_k(t_1{}^T), S_k(t_2{}^T), \ldots, S_k(t_n{}^T)\}. \qquad (1\text{-}27)$$

Система векторов $S_k{}^T$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ также обладает свойством ортогональности [приложение 1]

$$\left.\begin{aligned} &(S_\kappa{}^T, S_m{}^T) = 0 \quad k \neq m \\ &(S_\kappa{}^T, S_\kappa{}^T) = \| S_\kappa{}^T \|^2 = \frac{n}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}28)$$

и, следовательно, может служить ортогональным базисом порождающим некоторое подпространство $R_n{}^{ST}$. Все ранее полученные формулы сохраняют свой вид. В частности, если ввести интерполяционную матрицу $\frac{n}{2} I_n{}^{ST}$, столбцы которой есть координаты соответствующих векторов ортогонального базиса, умноженные на $\frac{n}{2}$, то (1-26) можно записать в форме

$$f^T = \frac{n}{2} I_n{}^{ST} \cdot \beta^T, \qquad (1\text{-}29)$$

где

$$\beta^T = (\beta_1{}^T, \beta_2{}^T, \ldots, \beta_n{}^T). \qquad (1\text{-}30)$$

Будем также иметь

$$\beta_\kappa{}^T = \frac{(f^T, S_\kappa{}^T)}{\| S_\kappa \|^2} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i{}^T) \cdot S_\kappa(t_i{}^T) \quad (k = 1, 2 \ldots n) \qquad (1\text{-}31)$$

или более компактно

$$\beta^T = \tilde{I}_n{}^{ST} \cdot f^T \qquad (1\text{-}32)$$

Совместное решение (1-29) и (1-14) дает

$$\beta^{T} = \frac{n}{2} \cdot \widetilde{I}_n^{ST} \cdot I_n^{TT} \cdot b^{T},$$

$$b^{T} = \frac{n}{2} \widetilde{I}_{\mathbf{n}}^{TT} \cdot I_{\mathbf{n}}^{ST} \cdot \beta^{T}. \qquad (1\text{-}33)$$

Эти векторные равенства связывают коэффициенты разложений (1-4) и (1-21), найденные интерполированием по одним и тем же узлам для одной и той же функции. Матрицы $\frac{n}{2} \widetilde{I}_n^{ST} \cdot I_n^{TT}$ и $\frac{n}{2} \widetilde{I}_n^{TT} \cdot I_n^{ST}$ есть матрицы преобразования вектора β^{T} в вектор b^{T} и наоборот.

2. Связь с численным интегрированием

Целью рассматриваемых интерполяционных процессов является получение приближенных значений коэффициентов Фурье в конечных разложениях по «е»-функциям $T_k^*(t)$ и $S_k(t)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$. Коэффициенты Фурье этих разложений есть определенные интегралы [5], поэтому полученные интерполяционные формулы есть формулы численных квадратур. Покажем, что они относятся к группе квадратурных формул наивысшей точности, т. е. к так называемым гауссовым квадратурам [3].

Рассмотрим интеграл

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)\, e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-at}}}\, dt. \qquad (2\text{-}1)$$

Сделаем подстановку $x = e^{-at}$, тогда получим

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{1} \frac{\varphi^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \cdot dx. \qquad (2\text{-}2)$$

Весовая функция $P(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ есть частный случай весовой функции Якоби $P^{(\gamma, \delta)}(\mathbf{x}) = x^{\gamma}(1-x)^{\delta}$, соответствующий значениям $\gamma = \delta = -\frac{1}{2}$. Этот частный случай характеризуется тем, что полиномы Якоби преобразуются в смещенные полиномы Чебышева $T_n^*(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, которые образуют полную ортогональную систему функций на $(0,1)$ с весом $P^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x)$ [3, 4]. Согласно общей теории гауссовых квадратур [3] приближенное значение интеграла (2-2) можно получить по n ординатам функции $\varphi^*(x)$ в точках x_i^{T} $(i=1, 2, \ldots, n)$, где

$$x_i^{T} = \cos^2 \frac{(2i-1)\pi}{4n} \quad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad (2\text{-}3)$$

есть нули полинома $T_n^*(x)$ [приложение 1].

Таким образом,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{1} \frac{\varphi^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi^*(x_i^{T}) + R_n(\varphi^*), \qquad (2\text{-}4)$$

где $R_n(\varphi^*)$ — остаточный член, имеющий вид [3]

$$R_n(\varphi^*) = \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \frac{\varphi^{*(2n)}(\xi)}{(2n)!} \qquad 0 < \xi < 1. \tag{2-5}$$

Вернемся к прежней переменной, тогда, очевидно,

$$\frac{2a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} \cdot \varphi(t)}{\sqrt{1 - e^{-at}}} dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(t_i{}^T) + R_n{}^T(\varphi). \tag{2-6}$$

Здесь $t_i{}^T$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ есть нули «е»-полинома Чебышева I рода $T_n^*(t)$ [приложение 1]. Положим

$$\varphi(t) = \varphi_T(t) = f(t)\, T_k^*(t) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{2-7}$$

тогда интеграл (2-1) будет определять коэффициенты Фурье функции $f(t)$

$$b_k = \frac{2a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} f(t) T_k^*(t)}{\sqrt{1 - e^{-at}}} dt \quad (k=0,1 \ldots n-1), \tag{2-8}$$

т. е. коэффициенты в конечном разложении функции $f(t)$ по «е»-полиномам Чебышева I рода [5]

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k T_k^*(t), \tag{2-9}$$

Согласно (2-6), учитывая (2-7) и (2-8), получим

$$b_k = \frac{2a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} \cdot f(t)}{\sqrt{1 - e^{-at}}} \cdot T_k^*(t) dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i{}^T) T_k^*(t_i{}^T) + R_n{}^T(\varphi_T). \tag{2-10}$$

Если иметь в виду (1-9), то можно написать

$$b_k = b_k{}^T + R_n{}^T(\varphi_T), \tag{2-11}$$

где

$$b_k{}^T = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i{}^T) T_k^*(t_i{}^T) \tag{1-9}$$

есть приближенное значение коэффициента Фурье в разложении (2-9), полученное в результате интерполирования по нулям «е»-полинома $T_n^*(t)$.

Остаточный член $R_n{}^T(\varphi_T)$ имеет вид

$$R_n{}^T(\varphi_T) = \frac{\frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}}[f(t) T_k^*(\tau)]}{(2n)!} \qquad 0 < \tau < \infty. \tag{2-12}$$

Положим теперь

$$\varphi(t) = \varphi_S(t) = f(t) \cdot S_k(t) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2-13}$$

причем будем считать, что $f(0) = f(\infty) = 0$. Это требование не уменьшает общности, так как при $f(0) \neq 0$ и $f(\infty) \neq 0$ можно рассматривать функцию

$$f_1(t) = f(t) - f(0) e^{-\frac{at}{2}} - f(\infty)(1 - e^{-\frac{at}{2}}).$$

Случай $f(0) = \infty$ и $f(\infty) = \infty$ исключается.

$S_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ «е»-функции Чебышева III рода [5]. Подставим (2-13) в (2-1), тогда значения интегралов

$$\beta_k = \frac{2a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} f(t)}{\sqrt{1 - e^{-at}}} S_k(t) dt \quad (k = 1,\ 2 \ldots n) \tag{2-14}$$

будут давать коэффициенты Фурье разложения функции $f(t)$ в конечный ряд по ортогональным функциям $S_k(t)$ [5]

$$f(t) \cong \sum_{k=1}^{n} \beta_k S_k(t). \tag{1-21}$$

Если подставить (2-13) в квадратурную формулу (2-6), то будем иметь

$$\beta_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i^T)\cdot S_k(t_i^T) + R_n^T(\varphi_s) \quad (k = 1, 2 \ldots n).$$

Согласно (1-31)

$$\beta_k^T = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i^T)\cdot S_k(t_i^T) \quad (k = 1, 2 \ldots n) \tag{1-31}$$

есть приближенное значение коэффициентов Фурье в разложении (1-21), полученное в результате интерполирования по нулям «е»-полинома $T_n^*(t)$.

Квадратурная формула (2-6) позволяет получить приближенное значение интеграла по n ординатам функции $\varphi(t)$, взятым в нулях «е»-полинома $T_n^*(t)$. Этот результат является следствием ортогональности полиномов $T_k^*(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ с весом

$$\frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\sqrt{1-e^{-at}}} = P(t),$$

но с таким же весом ортогональны «е»-функции Чебышева III рода $S_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots)$, которые являются также собственными функциями соответствующего дифференциального оператора Штурма-Лиувилля [1, 4]. Это обстоятельство позволяет, ничего не меняя по существу, получить квадратурную формулу по ординатам функции $\varphi(t)$, взятым в нулях функции $S_{n+1}(t)$, т. е. в точках t_i^S $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ [приложение 1]. Будем иметь $n+2$ ординаты $\varphi(t_i^S)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n+1)$, включая значения на границах интервала. Если выполняется естественное требование $\varphi(0)=\varphi(\infty)=0$, то квадратурная формула принимает вид

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{at}{2}}\varphi(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}}dt = \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_i^S) + R_n^S(\varphi). \tag{2-15}$$

Пусть $\varphi(t)$ определяется формулой (2-13), тогда слева получим точное значение коэффициента Фурье β_k. Таким образом,

$$\beta_k = \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(t_i^S)\cdot S_k(t_i^S) + R_n^S(\varphi_s) \tag{2-16}$$

или по-другому

$$\beta_k = \beta_k^S + R_n^S(\varphi_s),$$

где β_k^S есть приближенное значение коэффициента Фурье, определяемое формулой (1-23)

$$\beta_k^S = \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(t_i^S)\cdot S_k(t_i^S). \tag{1-23}$$

3. Погрешности и сравнение интерполяционных процессов

Точность рассматриваемых интерполяционных процессов определяется абсолютным значением остаточных членов в соответствующих квадратурных формулах. Однако сравнение точности на такой основе провести практически невозможно, так как требуется значение $2n$ производной разлагаемой функции в некоторой неизвестной точке, расположенной в интервале $(0, \infty)$.

Ниже рассматривается другой подход к этой проблеме, очень удобный для целей сравнения.

Пусть $f(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$ есть непрерывная и ограниченная функция во всем интервале, тогда ее разложение в бесконечный ряд по «е»-полиномам Чебышева $T_m^*(t)$ будет сходиться равномерно и точно представлять $f(t)$ в каждой точке

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m T_m^*(t), \tag{3-1}$$

Первые n коэффициентов этого разложения мы можем приближенно определить, интерполируя по нулям «е»-полинома $T_n^*(t)$, т. е. по формуле (1-9)

$$b_\kappa^T = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i^T) \cdot T_\kappa^*(t_i^T) \quad (k = 0,1, \ldots n - 1). \tag{1-9}$$

Положим в (3-1) $t = t_i^T$ и подставим в (1-9), тогда получим

$$b_\kappa^T = \frac{b_0}{n} \sum_{i=1}^{n} T^*_\kappa(t_i^T) + \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sum_{i=1}^{n} T_m^*(t_i^T) \cdot T_\kappa^*(t_i^T).$$

Если иметь в виду [приложение 1], что

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} T_m^*(t_i^T) \cdot T_\kappa^*(t_i^T) = \frac{1}{2n} \left[\frac{\sin(m-\kappa)\pi}{\sin\frac{(m-\kappa)\pi}{2n}} + \frac{\sin(m+\kappa)\pi}{\sin\frac{(m+\kappa)\pi}{2n}} \right] \tag{3-2}$$

то можем написать

$$b_\kappa^T = \frac{b_0}{2} \sum_{i=1}^{n} T_\kappa^*(t_i^T) + \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left[\frac{\sin(m-\kappa)\pi}{\sin\frac{(m-\kappa)\pi}{2n}} + \frac{\sin(m+\kappa)\pi}{\sin\frac{(m+\kappa)\pi}{2n}} \right]. \tag{3-3}$$

Раскрывая неопределенности при $m = \nu 2n \pm k$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, будем иметь (при любых других значениях m (3-3) равно нулю)

$$b_\kappa^T = b_\kappa + \sum_{\nu=1}^{\infty} (b_{\nu 2n-\kappa} + b_{\nu 2n+\kappa}) \quad (\kappa = 0,1 \ldots n-1) \tag{3-4}$$

или в развернутой форме

$$b_k^T = b_k + b_{2n-k} + b_{4n-k} + \ldots + b_{2n+k} + b_{4n+k} + \ldots \tag{3-5}$$

Выражение

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (b_{\nu 2n-\kappa} + b_{\nu 2n+\kappa}). \tag{3-6}$$

есть, очевидно, ошибка рассматриваемой интерполяции. При малых k (по сравнению с $n-1$) ошибка невелика, однако с ростом k ошибка растет и при значениях k, близких к $n-1$, она может быть соизмерима со значением b_k^T. Так, при $n=7$ получим следующую картину:

$$b_0^T = b_0 + 2\,b_{14} + 2\,b_{28} + \ldots,$$
$$b_1^T = b_1 + b_{13} + b_{15} + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_5^T = b_5 + b_9 + b_{19} + \ldots,$$
$$b_6^T = b_6 + b_8 + b_{20} + \ldots.$$

Если функция $f(t)$ достаточно гладкая, т. е. ряд (3-1) сходится быстро, то погрешность интерполяции будет мала. Наложим дополнительное ограничение на разлагаемую функцию $f(t)$. Потребуем выполнения равенства

$$f(0)=f(\infty)=0, \tag{3-7}$$

тогда разложение по ортогональной системе $S_m(t)$ $(m=1, 2, \ldots)$ будет сходиться равномерно

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m S_m(t). \tag{3-8}$$

Если воспользоваться интерполированием по нулям «е»-полинома $T_n^*(t)$, то приближенное значение первых n коэффициентов разложения (3-8) можем определить по формуле (1-31)

$$\beta_\kappa^T = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i^T)S_\kappa(t_i^T) \quad (\kappa = 1, 2 \ldots n). \tag{1-31}$$

Поступая аналогично предыдущему, получим

$$\beta_\kappa^T = \frac{2}{n}\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sum_{i=1}^{n} S_m(t_i^T)\cdot S_\kappa(t_i^T).$$

Учитывая, что [приложение 1]

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} S_m(t_i^T)S_\kappa(t_i^T) = \frac{1}{2n}\left[\frac{\sin(m-\kappa)\pi}{\sin\frac{(m-\kappa)\pi}{2n}} - \frac{\sin(m+\kappa)\pi}{\sin\frac{(m+\kappa)\pi}{2n}}\right].$$

будем иметь

$$\beta_\kappa^T = \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \left[\frac{\sin(m-\kappa)\pi}{\sin\frac{(m-\kappa)\pi}{2n}} - \frac{\sin(m+\kappa)\pi}{\sin\frac{(m+\kappa)\pi}{2n}}\right]. \tag{3-9}$$

Все члены этого ряда, у которых $m \neq \nu 2n \pm k$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, будут равны нулю. Раскрывая неопределенности при $m=\nu 2n \pm k$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, получим

$$\beta_k^T = \beta_k + \beta_{2n-k} - \beta_{4n-k} + \ldots - \beta_{2n+k} + \beta_{4n+k} - \ldots . \tag{3-10}$$

Все замечания, высказанные ранее, остаются справедливыми и для этого случая. Имеется, однако, одна особенность, заключающаяся в том, что последний коэффициент, соответствующий $k=n$, может быть определен в результате интерполирования весьма точно. В самом деле, положим в (3-10) $k=n$, тогда

$$\beta_n^T = 2\beta_n - 2\beta_{3n} + \ldots ,$$

откуда с большой точностью можно считать $\frac{1}{2}\beta_n^T = \beta_n$.

Таким образом, если последний коэффициент взять с весом $\frac{1}{2}$, то полученное значение будет весьма мало отличаться от коэффициента Фурье β_n. Другими словами, искомое разложение следует писать в форме

$$f(t) \cong \beta_1^T S_1(t) + \beta_2^T S_2(t) + \ldots + \frac{1}{2}\beta_n^T S_n(t), \tag{3-11}$$

если коэффициенты определять по формуле (1-31).

Найдем связь между коэффициентом β_k^S, полученным при интерполировании по нулям функции $S_{n+1}(t)$, и коэффициентами Фурье в разложении (3-8).

Имеем

$$\beta_k^s = \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(t_i^s) S_\kappa(t_i^s) \quad (\kappa = 1, 2 \ldots n). \qquad (1\text{-}23)$$

Повторяя ту же процедуру, получим [см. приложение 1]

$$\beta_k^s = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \left[\frac{\sin(m-\kappa)\pi\cdot\cos\frac{(m-\kappa)\pi}{2(n+1)}}{\sin\frac{(m-\kappa)\pi}{2(n+1)}} - \frac{\sin(m+\kappa)\pi\cdot\cos\frac{(m+\kappa)\pi}{(n+1)}}{\sin\frac{(m+\kappa)\pi}{2(n+1)}} \right], \qquad (3\text{-}12)$$

откуда, раскрывая неопределенности при $m=\nu 2(n+1)\pm k$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, найдем искомое соотношение

$$\beta_k^S = \beta_k - \beta_{2(n+1)-k} - \beta_{4(n+1)-k} - \ldots + \beta_{2(n+1)+k} + \beta_{4(n+1)+k} + \ldots . \qquad (3\text{-}13)$$

Максимальная абсолютная ошибка при такой интерполяции будет равна

$$|\beta_k^S - \beta_k| = |\beta_{2(n+1)-k}| + |\beta_{4(n+1)-k}| + \ldots + |\beta_{2(n+1)+k}| + \ldots \qquad (3\text{-}14)$$

В то время как при интерполировании по нулям «е»-полинома $T_n^*(t)$ она имеет вид

$$|\beta_k^T - \beta_k| = |\beta_{2n-k}| + |\beta_{4n-k}| + \ldots + |\beta_{2n+k}| + \ldots . \qquad (3\text{-}15)$$

Если коэффициенты разложения (3-8), начиная с $m>n$, монотонно убывают по абсолютной величине, то

$$|\beta_k^S - \beta_k| < |\beta_k^T - \beta_k|,$$

т. е. коэффициенты, определяемые по формуле (1-23), меньше отличаются от соответствующих коэффициентов Фурье, чем коэффициенты β_k^T, определяемые интерполяционной формулой (1-31), при одном и том же количестве ординат. Другими словами, интерполирование по нулям $S_{n+1}(t)$ заметно точнее, чем интерполирование по нулям $T_n^*(t)$.

Для получения той же точности коэффициенты β_k^T следует вычислять уже по $n+1$ ординатам функции $f(t)$, так как замена n на $n+1$ в (3-15) дает (3-14).

Что касается коэффициентов b_k^T, определяемых интерполяционной формулой (1-9), то их отличие от соответствующих коэффициентов Фурье в разложении (3-1) будет определяться формулой типа (3-15), однако последний коэффициент b_{n-1}^T будет иметь значительную погрешность, поэтому такое интерполирование будет, вообще говоря, менее точным, чем при использовании функций $S_k(t)$.

Последнее можно объяснить тем, что при использовании этих функций нулевые граничные условия удовлетворяются заранее, независимо от коэффициентов разложения, поэтому равенство в (3-11) фактически достигается не в n точках интервала $(0, \infty)$, а в $n+2$ точках, что не может не повлечь за собой некоторое увеличение точности.

Таким образом, из всех рассмотренных интерполяционных процессов наибольшей точностью обладает процесс, по которому определяются коэффициенты β_k^S $(k=1, 2, \ldots, n)$, т. е. квадратурная формула (2-15).

Отметим, кроме того, что из равномерной сходимости разложений (3-1) и (3-8) следует $b_m \to 0$ и $\beta_m \to 0$ при $m \to \infty$. Учитывая это, можно видеть из (3-5), (3-10) и (3-13), что при $n \to \infty$ приближенные значения коэффициентов Фурье стремятся к точным, т. е. интерполяционные процессы сходятся.

В приложении 2 приведены значения нулей «е»-полинома $T_n^*(t)$ и функции $S_{n+1}(t)$ до $n=8$. За недостатком места не приводятся интерполяционные матрицы. Их элементы могут быть найдены с помощью таблиц для тригонометрических функций. Так, элементами матрицы $\frac{n}{2} I_n^{TT}$ будут величины [приложение 1]

$$T_k^*(t_i^T) = \cos k\alpha_i^T = \cos k \frac{(2i-1)\pi}{2n} \quad (k=0, 1 \ldots n-1) \quad (i=1, 2 \ldots n)$$

Для элементов матриц $\frac{n}{2} I_n^{ST}$ и $\frac{n+1}{2} I_n^{SS}$ соответственно будем иметь формулы

$$S_k(t_i^T) = \sin k\alpha_i^T = \sin k \frac{(2i-1)\pi}{2n},$$

$$S_k(t_i^S) = \sin k\alpha_i^S = \sin k \frac{i\pi}{n+1}.$$

Столбцы этих матриц есть координаты ортогональных векторов, образующих базисы соответствующих подпространств. Что касается параметра «а», то он должен выбираться из условий, указанных в [6]. Необходимо, однако, помнить, что если $f(0) \neq 0$ и $f(\infty) \neq 0$, то коэффициенты разложения по функциям $S_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ следует искать для новой функции вида

$$f_1(t) = f(t) - f(0)e^{-\frac{at}{2}} - f(\infty)(1 - e^{-\frac{at}{2}}),$$

тогда для заданной функции получим представление

$$f(t) \simeq f(o)e^{-\frac{at}{2}} + f(\infty)(1 - e^{-\frac{at}{2}}) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k S_k(t).$$

В качестве примера найдем приближенные значения коэффициентов Фурье b_k^T, β_k^T и β_k^S для функции

$$f(t) = e^{-t} \cdot \cos 3t. \tag{3-16}$$

Эта функция имеет довольно сильно выраженный колебательный характер, однако мы попытаемся найти приближенное значение нескольких первых коэффициентов, взяв всего лишь восемь ординат. Результаты расчета по рассмотренным схемам приведены в табл. 1 $(a=1)$.

Таблица 1.

к	0	1	2	3	4	5	6
b^T_k	0,5159	0,5224	0,3480	—0,0390	—0,1400	0,0390	0,3969
β^T_k	—	—0,6550	0,1204	0,2307	—0,0304	—0,0785	0,0415
β^S_k	—	—0,6509	0,1137	0,2385	—0,0355	—0,0805	0,0547
β_k	—	—0,6529	0,1175	0,2335	—0,0304	—0,0839	0,0544

Расчет приводился по шестизначным математическим таблицам Чемберса, однако взято лишь четыре знака, в некоторых случаях произведено округление. В последней строке приведены значения коэффициентов Фурье β_k $(k=1, 2, \ldots, 6)$, полученные по точным формулам [6]. Несмотря на столь малое число ординат для такой функции, как (3-16), погрешность для технических приложений вполне приемлема.

Доказательство ортогональности базисных векторов

Подстановка $e^{-at}=\cos^2\frac{\alpha}{2}$ или $t=-\frac{2}{a}\ln\cos\frac{\alpha}{2}$ (П1-1) преобразует последовательности «е»-полиномов Чебышева I рода $T_k^*(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ и «е»-функций $S_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots)$ в последовательности тригонометрических функций $\cos k\alpha$ и $\sin k\alpha$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ соответственно [5].

Корни уравнения $\cos n\alpha=0$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$ определяются формулой

$$\alpha_i^T = (2i-1)\frac{\pi}{2n} \quad (i = 1, 2 \ldots n), \qquad \text{(П1-2)}$$

поэтому нули «е»-полинома $T_n^*(t)$ располагаются в точках

$$t_i^T = -\frac{2}{a}\ln\cos(2i-1)\frac{\pi}{4n} \quad (i = 1, 2 \ldots n). \qquad \text{(П1-3)}$$

Для уравнения $\sin(n+1)\alpha=0$ на открытом интервале $(0, \pi)$ будем иметь n корней:

$$\alpha_i^S = \frac{i\pi}{n+1} \quad (i = 1, 2 \ldots n). \qquad \text{(П1-4)}$$

В соответствии с этим нули «е»-функции Чебышева $S_{n+1}(t)$, совпадающие с нулями «е»-полинома $U_n^*(t)$, располагаются в точках

$$t_i^S = -\frac{2}{a}\ln\cos\frac{i\pi}{2(n+1)} \quad (i = 1, 2 \ldots, n). \qquad \text{(П1-5)}$$

а) Покажем, что

$$(T_k, T_m) = \sum_{i=1}^{n} T_k^*(t_i^T)T_m^*(t_i^T) = \begin{matrix} 0 & m \neq k \\ \frac{n}{2} & m = k \end{matrix} \qquad \text{(П1-6)}$$

Поскольку

$$T_k^*(t_i^T)=\cos k\alpha_i^T, \text{ а } T_m^*(t_i^T)=\cos m\alpha_i^T,$$

задача сводится к доказательству соотношения

$$\sum_{i=1}^{n}\cos k\alpha_i^T\cdot\cos m\alpha_i^T = \begin{matrix} 0 & m \neq k \\ \frac{n}{2} & m = k \end{matrix}$$

Имеем

$$\cos k\alpha_i^T\cdot\cos m\alpha_i^T = \frac{1}{2}[\cos(k-m)\alpha_i^T + \cos(k+m)\alpha_i^T] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2i-1)\frac{(k-m)\pi}{2n} + \frac{1}{2}\cos(2i-1)\frac{(k+m)\pi}{2n}.$$

Если учесть, что [2]

$$\sum_{i=1}^{n}\cos(2i-1)x = \frac{1}{2}\,\frac{\sin nx}{\sin x},$$

то можно написать

$$\sum_{i=1}^{n}\cos k\alpha_i^T\cdot\cos m\alpha_i^T = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(k-m)\pi}{\sin\frac{(k-m)\pi}{2n}} + \frac{\sin(k+m)\pi}{\sin\frac{(k+m)\pi}{2n}}\right].$$

При любых неравных k и m это выражение равно нулю ($k+m\neq 2n$ и $k-m\neq 2n$). При $k=m$, раскрывая неопределенность, получим $\frac{n}{2}$. Таким образом, соотношение (П1-6) доказано.

б) Покажем, что

$$(S_k,S_m) = \sum_{i=1}^{n} S_k(t_i^s)S_m(t_i^s) = \begin{cases} 0 & k\neq m \\ \frac{n+1}{2} & k=m \end{cases}. \qquad (\text{П1- })$$

Аналогично предыдущему задача сводится к доказательству соотношения

$$\sum_{i=1}^{n}\sin k\alpha_i^s\cdot\sin m\alpha_i^s = \begin{cases} 0 & k\neq m \\ \frac{n+1}{2} & k=m. \end{cases}$$

Используя (П1-4) и выполняя преобразование, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\sin k\alpha_i^s\cdot\sin m\alpha_i^s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos i\frac{(k-m)\pi}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos i\frac{(k+m)\pi}{n+1}.$$

Для любого x имеет место тождество [2]

$$\sum_{i=1}^{n}\cos ix = \frac{\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin n\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2(n+1)x\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \cos^2\frac{n+1}{2}x.$$

Подставляя $x\to\frac{(k-m)\pi}{n+1}$ и $x\to\frac{(k+m)\pi}{n+1}$ получим после простых преобразований

$$\sum_{i=1}^{n}\sin k\alpha_i^s\cdot\sin m\alpha_i^s = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{2}\sin(k-m)\pi\cdot\cos\frac{(k-m)\pi}{2(n+1)}}{\sin\frac{(k-m)\pi}{2(n+1)}} - \frac{\frac{1}{2}\sin(k+m)\pi\cdot\cos\frac{(k+m)\pi}{2(n+1)}}{\sin\frac{(k+m)\pi}{2(n+1)}} - \sin k\pi\cdot\sin m\pi.\right]$$

При $k \neq m$ это выражение равно нулю; при $k=m$, раскрывая неопределенность, получим $\frac{n+1}{2}$, что и доказывает (П1-7).

в) Покажем, что

$$(S_k^T, S_m^T) = \sum_{i=1}^{n} S_k(t_i^T) \cdot S_m(t_i^T) = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \frac{n}{2} & k=m. \end{cases} \qquad (\text{П1-8})$$

Замена (П1-3) дает

$$(S_k^T, S_m^T) = \sum_{i=1}^{n} \sin k\alpha_i^T \cdot \sin m\alpha_i^T - \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(k-m)\pi}{\sin\frac{(k-m)\pi}{2n}} - \frac{\sin(k+m)\pi}{\sin\frac{(k+m)\pi}{2n}}\right]$$

откуда и следует (П1-8).

Приложение 2.

Нули полинома $T_n^*(t)$

n	at_1	at_2	at_3	at_4	at_5	at_6	at_7	at_8
1	0,69315							
2	0,15835	1,92108						
3	0,06934	0,69315	2,7022					
4	0,0388	0,3691	1,1755	3,2686				
5	0,02678	0,23080	0,69315	1,5794	3,71024			
6	0,01628	0,15835	0,45764	1,00171	1,9380	4,12610		
7	0,01261	0,11550	0,33275	0,69315	1,2613	2,21560	4,3786	
8	0,01065	0,08803	0,25130	0,51492	0,91017	1,50411	2,47379	4,64615

Нули $S_{n+1}(t)$ $0<t<\infty$

n	at_1	at_2	at_3	at_4	at_5	at_6	at_7	at_8
1	0,69315							
2	0,28768	1,38629						
3	0,15835	0,69315	1,92108					
4	0,10036	0,42387	1,06279	2,3487				
5	0,06934	0,28768	0,69315	1,38629	2,70325			
6	0,0508	0,20857	0,59223	0,94485	1,76996	3,05836		
7	0,03880	0,15835	0,36912	0,69315	1,1755	1,92108	3,26859	
8	0,03062	0,12440	0,28768	0,53313	0,88388	1,38629	2,14577	3,50145

ЛИТЕРАТУРА

1. **Б. З. Вулих.** «Введение в функциональный анализ». Физматгиз, М., 1958.
2. **И. С. Градштейн. И. М. Рыжик.** «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», Физматгиз, М., 1962.
3. **В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина.** «Справочная книга по численному интегрированию», «Наука», М., 1966.
4. **К. Ланцош.** «Практические методы прикладного анализа». Физматгиз, М., 1961.
5. **В. М. Осипов.** «Экспоненциальные полиномы и разложение некоторых типовых сигналов». Изв. ТПИ, т. 180, Томск, 1969.
6. **В. М. Осипов.** «К вопросу о приближенном обращении преобразования Лапласа». (Настоящий том).