

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННОМ ОБРАЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научно-методическим семинаром кафедры инженерной и
вычислительной математики).

Во многих случаях обращение преобразования Лапласа по классической схеме, т. е. путем вычисления контурного интеграла Бромвича, выполнить затруднительно. Так, в случае, когда преобразование Лапласа задано в виде рациональной дроби, обращение сводится к определению корней алгебраического уравнения, что является технически трудновыполнимой задачей, особенно при высокой степени уравнения. Кроме того, часто возникает задача аппроксимации трансцендентных операторных изображений более удобными разложениями в виде рациональных дробей.

Ниже излагаются методы приближенного решения задачи обращения и аппроксимации, практически удобные и достаточно эффективные для широкого класса операторных изображений.

1. Обращение с помощью «е»-функций Чебышева III рода

Экспоненциальные функции Чебышева III рода [4]

$$S_n(t) = 2e^{-\frac{at}{2}} \sqrt{1 - e^{-at}} U_{n-1}^*(t) \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1-1)$$

где $U_{n-1}^*(t)$ ($n=1, 2, \dots$) — «е»-полиномы Чебышева II рода, являясь собственными функциями самосопряженного дифференциального оператора, образуют на интервале $(0, \infty)$ полную ортогональную систему с весовым множителем

$$W(t) = e^{-\frac{at}{2}} (1 - e^{-at})^{-\frac{1}{2}}.$$

Другими словами, ряд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k S_k(t), \quad (1-2)$$

где

$$B_k = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{at}{2}} f(t)}{\sqrt{1 - e^{-at}}} S_k(t) dt \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1-3)$$

сходится во всякой внутренней точке, являющейся точкой непрерывности $f(t)$, если выполнено условие

$$\int_0^{\infty} W(t)[f(t)]^2 dt < \infty. \quad (1-4)$$

В точках разрыва I рода $t=t_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) ряд (1-2) сходится к значению $\frac{1}{2}[f(t_i + 0) - f(t_i - 0)]$.

Коэффициенты B_k очень просто связаны с преобразованием Лапласа разлагаемой функции $f(t)$.

Введем понятие об экспоненциальном моменте функции $f(t)$. Это вещественная величина, определяемая выражением

$$M_{k-1}^* = \int_0^{\infty} e^{-kat} f(t) dt \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1-5)$$

Пусть $F(p)$ есть преобразование Лапласа функции $f(t)$, т. е.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Сравнивая с (1-5), приходим к выводу, что

$$M_{k-1}^* = F(ka) \quad \text{или} \quad M_k^* = F[(k+1)a]. \quad (1-6)$$

Таким образом, экспоненциальный момент k -го порядка функции $f(t)$ равен преобразованию Лапласа этой функции при $p=(k+1)a$. Подставим (1-1) в (1-3), тогда получим следующую формулу для коэффициента B_k :

$$B_k = \frac{4a}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) U_{k-1}^*(t) dt. \quad (1-7)$$

Явное выражение для «е»-полинома $U_{k-1}^*(t)$ имеет вид [4]

$$U_{k-1}^*(t) = \sum_{n=0}^{k-1} \beta_{kn} e^{-nat},$$

где β_{kn} (1-8)

$$\beta_{kn} = \frac{(-1)^{n+k-1} 2^n (n+k)!}{(2n+1)(k-1-n)! n! (2n-1)!}. \quad (1-9)$$

Таким образом,

$$B_k = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \beta_{kn} M_n^* \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (1-10)$$

т. е. коэффициент B_k есть линейная комбинация « k » первых экспоненциальных моментов. (1-10) можно записать в матричной форме

$$\bar{B} = \frac{4a}{\pi} \beta \bar{M}^*, \quad (1-11)$$

где вектор $\bar{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_m, \dots\}$, а вектор $\bar{M}^* = \{M_0^*, M_1^*, \dots, M_m^*, \dots\}$.

Коэффициенты треугольной матрицы β до $k=8$ включительно даны в приложении ПІ; они же являются коэффициентами «е»-полиномов $U_{k-1}^*(t)$ ($k=1, 2, \dots, 8$). Ряд (1-2) будет сходиться значительно быстрее, если $f(0)=f(\infty)=0$. Это условие означает, что изображение $F(p)$ функции $f(t)$ не имеет полюсов в начале координат и на мнимой оси и, кроме того, существует предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p F(p) = 0.$$

Пусть $\Phi(p)$ есть изображение по Лапласу функции $\varphi(t)$. В общем случае $\varphi(0) \neq 0$ и $\varphi(\infty) \neq 0$, тогда вместо (1-2) следует писать

$$\varphi(t) = \varphi(0)e^{-\frac{at}{2}} + \varphi(\infty)(1 - e^{-\frac{at}{2}}) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k S_k(t). \quad (1-12)$$

Обозначим

$$f(t) = \varphi(t) - \varphi(0)e^{-\frac{at}{2}} - \varphi(\infty)(1 - e^{-\frac{at}{2}}) \quad (1-13)$$

или в операторной форме $[\Phi(p) \doteq \varphi(t)]$

$$F(p) = \Phi(p) - \frac{\varphi(0)}{p + \frac{a}{2}} - \frac{\frac{a}{2} \varphi(\infty)}{p \left(p + \frac{a}{2} \right)}, \quad (1-14)$$

причем $f(0) = f(\infty) = 0$. Дело свелось, таким образом, к нулевым граничным условиям.

Найдем изображение по Лапласу «е»-функции $S_k(t)$. Поскольку подстановка

$$e^{-\frac{at}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ т. е. } \alpha = 2 \arccos e^{-\frac{at}{2}},$$

превращает $S_k(t)$ в $\sin k\alpha$, а $T_k^*(t)$ — «е»-полином Чебышева I рода в $\cos k\alpha$ [4], то легко получим

$$\frac{dS_k(t)}{dt} = ka \frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-at}}} T_k^*(t). \quad (1-15)$$

Имеем [4]

$$\frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-at}}} T_k^*(t) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{a \Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \frac{\prod_{n=1}^{k-1} \left(\frac{p}{a} - n\right)}{\prod_{n=1}^k \left(\frac{p}{a} + n\right)}.$$

Таким образом,

$$S_k(t) = (-1)^{k-1} \frac{ka \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \frac{\prod_{n=1}^{k-1} (na - p)}{\prod_{n=1}^k (na + p)}, \quad (1-16)$$

причем $\prod_{n=1}^0 \equiv 1$.

Преобразуя по Лапласу ряд (1-2), можем написать

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k S_k(t) = \frac{a \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{p \Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k B_k \times \\ \times \frac{\prod_{n=1}^{k-1} (na - p)}{\prod_{n=1}^k (na + p)}. \quad (1-17)$$

Положим теперь $p=ma$ ($m=1, 2, \dots$), тогда будем иметь бесконечную систему линейных уравнений для определения B_k

$$M_{m-1}^* = F(ma) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{a m \Gamma(m)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k B_k \frac{\prod_{n=1}^{k-1} (n-m)}{\prod_{n=1}^k (n+m)},$$

которая в развернутом виде принимает удобную треугольную форму, так как $\prod_{n=1}^{k-1} (n-m) = 0$ при $m \leq k-1$. Имея в виду, что

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{a m \Gamma(m)} = \frac{\pi}{4a} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^{m-2} m!},$$

получим

$$\frac{4a}{\pi} M_0^* = B_1$$

$$\frac{4a}{\pi} M_1^* = \frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{4} B_2$$

$$\frac{4a}{\pi} M_2^* = \frac{5}{16} B_1 + \frac{1}{4} B_2 + \frac{1}{16} B_3$$

$$\frac{4a}{\pi} M_3^* = \frac{7}{32} B_1 + \frac{7}{32} B_2 + \frac{3}{32} B_3 + \frac{1}{64} B_4$$

или в матричной форме

$$\frac{4a}{\pi} \bar{M}^* = \beta^{-1} \bar{B},$$

откуда следует (1-11). Таким образом, матрица коэффициентов системы (1-18) или (1-19) есть матрица, обратная ранее введенной матрице β с элементами (1-9). Другими словами, коэффициенты Фурье ортогонального разложения (1-2) можно определить в результате интерполяционного процесса в комплексной области, в котором узлами интерполирования служат нули операторного изображения $S_m(p)$, т. е. нули первого из отброшенных членов в усеченном операторном ряде (1-17).

2. Обращение с помощью интегральных «е»-полиномов Лежандра

Обращение в виде отрезка ряда по экспоненциальным функциям Чебышева III рода содержит иррациональный множитель вида $\sqrt{1-e^{at^x}}$, что затрудняет аналитические операции с этим выражением. Применение для целей обращения «е»-полиномов Лежандра $P_n^*(t)$ [4] с этой точки зрения оказывается более удобным. Однако разложение по «е»-полиномам $P_n^*(t)$ сходится значительно медленнее, чем разложение (1-2). Этот недостаток может быть заметно ослаблен, если воспользоваться так называемыми интегральными «е»-полиномами Лежандра $V_n^*(t)$, которые позволяют значительно точнее восстановить функцию по заданному числу экспоненциальных моментов, так как граничные условия удовлетворяются независимо от коэффициентов разложения.

Интегральные полиномы Лежандра, рассмотренные нами в [3],

определены для интервала $(0, 1)$, однако простой подстановкой $x = e^{-at}$ они преобразуются в «е»-полиномы $V_n^*(t)$

$$V_n^*(x) \rightarrow V_n^*(e^{-at}) = V_n^*(t) \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Основные функциональные соотношения сохраняют свой вид, однако необходимо учитывать, что

$$\frac{dV_n^*(t)}{dt} = \frac{dV_n^*(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Big|_{x=e^{-at}}$$

В частности, будем иметь [3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_n^*(t)}{dt} &= -ae^{-at}P_n^*(t) \\ V_n^*(t) &= -a \int_0^t e^{-at}P_n^*(t)dt \end{aligned} \right\}, \quad (2-1)$$

$$2(2n+1)V_n^*(t) = P_{n-1}^*(t) - P_{n+1}^*(t), \quad (2-2)$$

$$V_n^*(t) = e^{-at}(1 - e^{-at})F(-n+1, n+2; 2; e^{-at}), \quad (2-3)$$

$$V_n^*(t) = \frac{1 - e^{-at}}{an(n+1)} \frac{dP_n^*(t)}{dt}, \quad (2-4)$$

где $P_n^*(t)$ — «е»-полином Лежандра [4].

Полиномы $V_n^*(t)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$(1 - e^{-at}) \left[\frac{d^2 V_n^*(t)}{dt^2} + a \frac{dV_n^*(t)}{dt} \right] + a^2 n(n+1)e^{-at}V_n^*(t) = 0 \quad (2-5)$$

и образуют на интервале $(0, \infty)$ полную ортогональную систему с весом $\frac{1}{1 - e^{-at}}$, т. е.

$$\int_0^\infty \frac{V_n^*(t)V_m^*(t)}{1 - e^{-at}} dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m, \end{cases} \quad (2-6)$$

причем $V_n^*(0) = V_n^*(\infty) = 0$.

Явное выражение для «е»-полиномов $V_n^*(t)$ можно получить, развертывая гипергеометрический ряд в (2-3),

$$V_n^*(t) = \frac{e^{-at}(1 - e^{-at})}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n+k+1)!}{(n-k-1)!k!(k+1)!} e^{-kat}, \quad (2-7)$$

Для нескольких первых значений «n» будем иметь

$$\left. \begin{aligned} V_1^*(t) &= e^{-at}(1 - e^{-at}), \\ V_2^*(t) &= e^{-at}(1 - e^{-at})(1 - 2e^{-at}), \\ V_3^*(t) &= e^{-at}(1 - e^{-at})(1 - 5e^{-at} + 5e^{-2at}), \\ V_4^*(t) &= e^{-at}(1 - e^{-at})(1 - 9e^{-at} + 21e^{-2at} - 14e^{-3at}), \\ V_5^*(t) &= e^{-at}(1 - e^{-at})(1 - 14e^{-at} + 56e^{-2at} - 84e^{-3at} + 42e^{-4at}) \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

Найдем преобразование Лапласа полинома $V_n^*(t)$. Введем обозначения: $V_n(p) \doteq V_n^*(t)$ и $P_n(p) \doteq P_n^*(t)$. Согласно (2-2) можем написать

$$2(2n+1)V_n(p) = P_{n-1}(p) - P_{n+1}(p) \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (2-9)$$

Имеем [4]

$$P_{n-1}(p) = \frac{1}{p} \prod_{k=0}^{n-2} \frac{(k+1)a - p}{(k+1)a + p},$$

$$P_{n+1}(p) = \frac{1}{p} \prod_{k=0}^n \frac{(k+1)a - p}{(k+1)a + p}.$$

Формула (2-9) дает после преобразований

$$V_n(p) = a \frac{\prod_{k=0}^{n-2} [(k+1)a - p]}{\prod_{k=0}^n [(k+1)a + p]} = \frac{a(a-p)(2a-p) \cdots [(n-1)a-p]}{(a+p)(2a+p) \cdots [(n+1)a+p]},$$

причем $\prod_{k=0}^{n-2} [k+1)a - p] = 1$ при $n=1$.

Рассмотрим вопрос о разложении произвольной функции $f(t)$ в ряд по интегральным полиномам $V_n^*(t)$. Предположим, что

$$f(0) = f(\infty) = 0. \quad (2-11)$$

В силу полноты системы $V_n^*(t)$ ($n=1, 2, \dots$) можем написать

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n V_n^*(t). \quad (2-12)$$

Умножим обе стороны (2-12) на $\frac{V_m^*(t)}{1 - e^{-at}}$ и проинтегрируем в пределах $(0, \infty)$. Учитывая свойства (2-6), будем иметь

$$C_n = n(n+1)(2n+1)a \int_0^{\infty} \frac{f(t) V_n^*(t)}{1 - e^{-at}} dt,$$

или, подставляя выражение (2-4),

$$C_n = (2n+1) \int_0^{\infty} f(t) \frac{dP_n^*(t)}{dt} dt. \quad (2-13)$$

Наконец, если учесть развернутое представление (2-7), получим

$$\frac{C_n}{n(n+1)(2n+1)a} = \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{nk} M_k^* \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2-14)$$

где M_k^* — экспоненциальный момент « k »-го порядка функции $f(t)$, а

$$\eta_{nk} = (-1)^k \frac{(n+k+1)!}{(n-k-1)! k! (k+1)! n(n+1)}. \quad (2-15)$$

Или в матрично-векторной форме

$$\bar{C} = \eta \bar{M}^*, \quad (2-16)$$

где η — треугольная матрица с компонентами (2-15), причем $\eta_{nk}=0$ при $k > n-1$, а \bar{C} и \bar{M}^* — вектора коэффициентов и моментов соответственно, т. е.

$$\bar{C} = \left\{ \frac{C_1}{6a}, \frac{C_2}{30a}, \dots, \frac{C_n}{n(n+1)(2n+1)a}, \dots \right\},$$

$$\bar{M}^* = \{M_0^*, M_1^*, \dots, M_{n-1}^*, \dots\}.$$

В приложении приведена матрица η для $n=8$ включительно. Ко-

коэффициенты Фурье в разложении (2-12) могут быть найдены в результате интерполирования в области операторных изображений аналогично тому, как это делалось для коэффициентов разложения (1-2).

Отметим, что если функция $\varphi(t)$, подлежащая определению по своему операторному изображению $\varphi(p)$, не обращается в нуль на границах интервала, т. е. $\varphi(0) \neq 0$ и $\varphi(\infty) \neq 0$, то она ищется в виде

$$\varphi(t) = \varphi(0)e^{-at} + \varphi(\infty)(1 - e^{-at}) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n V_n^*(t). \quad (2-17)$$

Коэффициенты разложения C_n ($n=1, 2, \dots$) в этом случае определяются для функции

$$f(t) = \varphi(t) - \varphi(0)e^{-at} - \varphi(\infty)(1 - e^{-at}),$$

изображение по Лапласу, которой имеет вид

$$F(p) = \varphi(p) - \frac{\varphi(0)}{p+a} - \frac{a\varphi(\infty)}{p(p+a)}.$$

Другими словами, экспоненциальные моменты в этом случае должны определяться по формуле

$$M_{n-1}^* = F(na) = \frac{\varphi(0)}{(n+1)a} - \frac{\varphi(\infty)}{n(n+1)a} \quad (n=1, 2, \dots)^3 \quad (2-18)$$

а $\varphi(0)$ и $\varphi(\infty)$ могут быть найдены по теоремам о начальном и предельном значениях.

Практически для целей обращения преобразования Лапласа удобнее пользоваться нормированными интегральными «е»-полиномами Лежандра $\bar{V}_n^*(t)$ [3]:

$$\bar{V}_n^*(t) = \frac{2^n(n+1) \left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right]^2}{(n-1)!} V_n^*(t). \quad (2-19)$$

Для этих полиномов имеет место оценка

$$|\bar{V}_n^*(t)| \leq 1 \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Если разложение по «е»-полиномам $V_n^*(t)$ представить в виде

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^m A_n \bar{V}_n^*(t), \quad (2-20)$$

то коэффициенты A_n будут связаны с коэффициентами C_n следующей формулой:

$$A_n = \frac{(n-1)!}{2^n(n+1) \left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right]^2} C_n. \quad (2-21)$$

Преобразуя по Лапласу (2-20), получим, учитывая (2-10) и (2-19),

$$F(p) \approx \sum_{n=1}^m A_n \frac{2^n(n+1) \left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right]^2 a}{(n-1)!} \frac{\prod_{k=0}^{n-2} [(k+1)a - p]}{\prod_{k=0}^n [(k+1)a + q]},$$

т. е. операторное изображение $F(p)$ аппроксимируется конечным разложением, каждый член которого есть рациональная дробь.

3. Определение параметра «а»

До сих пор мы совершенно не касались вопроса о величине вещественного параметра «а». Можно строго показать, что бесконечные ряды вида (1-2) или (2-20) будут сходиться и представлять искомую функцию при любом конечном значении параметра «а». Обращение преобразования Лапласа с помощью экспоненциальных функций при $a=1$ рассмотрено в [1, 2]. Между тем значение параметра «а» оказывает существенное влияние на точность аппроксимации искомого оригинала отрезком ряда по функциям $S_k(t)$ или «е»-полиномам $V_n^*(t)$. Поэтому значение $a=1$ не может, в общем случае, обеспечить нужную точность аппроксимации оригинала конечным числом членов ряда. Для этого потребовалось бы практически неприемлемое число членов. Ряды (1-2) и (2-12) асимптотически (т. е. при больших значениях t) с точностью до постоянного множителя стремятся к нулю как экспоненты $e^{-\frac{at}{2}}$ или e^{-at} соответственно, следовательно, параметр «а» должен быть определен таким образом, чтобы скорость затухания оригинала $f(t)$ при больших значениях t приблизительно равнялась скорости затухания экспоненты $e^{-\frac{at}{2}}$ или e^{-at} .

Если преобразование Лапласа задано в виде рациональной дроби, то соответствующий оригинал представляется в виде суммы экспонент с комплексными показателями в общем случае. Скорость затухания такого оригинала определяется членом, у которого показатель имеет наименьшую вещественную часть (α). Этот показатель может быть выделен по методу, описанному в [5]. Параметр «а» в этом случае равен, очевидно, 2α или α в зависимости от того, какие функции используются для представления оригинала. Сущность упомянутого метода состоит в том, что моменты оригинала, т. е. величины

$$m_k = \int_0^{\infty} t^k f(t) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

с ростом k все в большей степени определяются конечным участком кривой $f(t)$, причем характер изменения моментной последовательности позволяет судить о характере кривой $f(t)$ при больших значениях t [5]. Эта идея с успехом может быть применена для определения параметра «а» в том случае, когда заданное изображение не является рациональной дробью. Пусть заданное изображение $F(p)$ некоторого оригинала $f(t)$ является аналитической функцией во всей правой полуплоскости, включая и мнимую ось, тогда в окрестностях начала координат существуют все производные. Предположим, что все они отличны от нуля.

В этом случае

$$\lim_{p \rightarrow 0} p F(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Учитывая, что

$$F^{(k)}(0) = (-1)^k \int_0^{\infty} t^k f(t) dt = (-1)^k m_k. \quad (3-1)$$

Можем найти последовательность моментов m_k ($k=1, 2, \dots, n$) или последовательность величин

$$M_k = \frac{1}{k!} m_k = \frac{(-1)^k}{k!} F^{(k)}(0). \quad \text{Если}$$

эта последовательность монотонно изменяется без перемены знака, то это означает, что оригинал $f(t)$ при больших значениях t стремится к нулю приблизительно по закону экспоненты e^{-at} . В этом случае для достаточно больших значений k

$$\alpha \approx \frac{M_k}{M_{k+1}}. \quad (3-2)$$

Если же моментная последовательность M_k ($k=1, 2, \dots$) меняет знак, то стремление к нулю оригинала имеет колебательный характер, причем огибающая этого колебательного процесса приблизительно меняется по экспоненциальному закону. В этом случае [5]

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{|M_{k+2} \cdot M_{k-1} - M_{k+1} \cdot M_k|}{M_{k+1}^2 - M_k \cdot M_{k+2}}. \quad (3-3)$$

Таким образом, $a=2\alpha$, если для целей обращения используются «е»-функции $S_n(t)$ и $a=\alpha$, если применяются «е»-полиномы $V_n^*(t)$.

Иногда значение α , определяемое формулой (3-2), не стабилизируется с ростом k . Это означает, что искомый оригинал при больших значениях t заметно отличается от экспоненты. В этом случае параметр «а» может быть найден следующим приемом. В ряде (1-17) ограничимся всего двумя членами, т. е. положим

$$F(p) \approx B_1 S_1(p) + B_2 S_2(p). \quad (3-4)$$

При $p=0$ будем иметь

$$F(0) \approx \frac{\pi}{a} (B_1 - B_2).$$

Учитывая, что

$$B_1 = \frac{4a}{\pi} F(a) \text{ и } B_2 = \frac{4a}{\pi} [-2F(a) + 4F(2a)],$$

получим

$$\frac{1}{4} F(0) = 3F(a) - 4F(2a). \quad (3-5)$$

Решая любым приближенным методом уравнение (3-5), найдем некоторое значение «а», которое и следует принять за расчетное.

Идея, лежащая в основе этого приема, состоит в том, что поведение оригинала при больших значениях t определяется поведением его изображения по Лапласу в окрестностях начала координат, поэтому, определив параметры отрезка разложения (3-4) из условия равенства значениям $F(p)$ при $p=0, a, 2a$, мы сформируем в основном те значения оригинала, которые соответствуют большим значениям t .

Заметим, что найденное значение «а» следует уменьшить в два раза, если для целей обращения используются интегральные «е»-полиномы Лежандра $V_n^*(t)$. В качестве примера рассмотрим обращение преобразования Лапласа, являющегося трансцендентной функцией переменного p .

Пусть операторное изображение некоторой функции $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(p) = \frac{\exp\left(\frac{b}{p + \beta}\right)}{p + \beta}. \quad (1-1)$$

Найдем приближенное выражение для оригинала. (1-1), запишем в виде

$$(p + \beta)\varphi(p) = \exp\left(\frac{b}{p + \beta}\right).$$

Дифференцирование этого выражения с учетом (1-1) дает тождество

$$(p+b+\beta) \varphi(p) + (p+\beta)^2 \varphi'(p) = 0. \quad (1-II)$$

Продифференцируем его k раз и положим $p=0$. Учитывая, что

$$\frac{d^k}{dp^k} (p+b+\beta) \varphi(p) = (p+b+\beta) \varphi^{(k)}(p) + k \varphi^{(k-1)}(p),$$

$$\frac{d^k}{dp^k} (p+\beta)^2 \varphi'(p) = (p+\beta)^2 \varphi^{(k+1)}(p) + 2k(p+\beta) \varphi^{(k)}(p) + k(k-1) \varphi^{(k-1)}(p),$$

получим следующее рекуррентное соотношение для производных в начале координат:

$$k^2 \varphi^{(k-1)}(0) + [(2k+1)\beta + b] \varphi^{(k)}(0) + \beta^2 \varphi^{(k+1)}(0) = 0. \quad (I-III)$$

Положим для определенности $b=\beta=1$, тогда соотношение получит вид

$$k^2 \varphi^{(k-1)}(0) + 2(k+1) \varphi^{(k)}(0) + \varphi^{(k+1)}(0) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Последовательно легко найдем $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ..., а затем и величины

$$M_k = \frac{(-1)^k \varphi^{(k)}(0)}{k!}.$$

Расчеты дают:

$M_1=2 \varphi(0)$; $M_2=3,5 \varphi(0)$; $M_3=8,5 \varphi(0)$; $M_4=8,7 \varphi(0)$; $M_5=12,8 \varphi(0)$; $M_6=18,5 \varphi(0)$; $M_7=26 \varphi(0)$; $M_8=35,9 \varphi(0)$; $M_9=48,5 \varphi(0)$; $M_{10}=64,8 \varphi(0)$. Моментная последовательность монотонно изменяется без перемены знака, следовательно, можем воспользоваться формулой (3-2). Для различных значений k формула дает

$$\frac{M_4}{M_5} = 0,68; \quad \frac{M_5}{M_9} = 0,69; \quad \frac{M_6}{M_7} = 0,71; \quad \frac{M_7}{M_8} = 0,725.$$

$$\frac{M_8}{M_9} = 0,74; \quad \frac{M_9}{M_{10}} = 0,75.$$

Таким образом, с ростом k значение α не стабилизируется. Найдем «а» из уравнения (3-5). Поскольку

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \varphi(p) = 1,$$

будем иметь

$$F(p) = \varphi(p) - \frac{1}{p + \frac{a}{2}} = \frac{1}{p+1} e^{\frac{1}{p+1}} - \frac{2}{2p+a},$$

откуда легко получим

$$F(0) = e - \frac{2}{a},$$

$$F(a) = \frac{1}{a+1} e^{\frac{1}{a+1}} - \frac{2}{3a},$$

$$F(2a) = \frac{1}{2a+1} e^{\frac{1}{2a+1}} - \frac{2}{5a}.$$

Уравнение (3-5) получает вид

$$\frac{1}{4} e - \frac{1}{10a} = \frac{3}{a+1} e^{\frac{1}{a+1}} - \frac{4}{2a+1} e^{\frac{1}{2a+1}}.$$

Приближенное значение положительного корня этого уравнения, т. е. параметра «а», равно 1,09 (расчет производился на счетной линейке). Расчет первых 6 экспоненциальных моментов приведен в табл. 1. Там же приводятся значения коэффициентов B_n для разложения по «е»-функциям Чебышева III рода $S_n(t)$. Если ограничиться 4 членами, то искомый оригинал запишется в виде

$\varphi(t) \approx e^{-0,545 t} + 0,22266 S_1(t) - 0,0917 S_2(t) + 0,00565 S_3(t) + 0,0054 S_4(t)$,
причем максимальная абсолютная ошибка будет не более 0,0015.

Т а б л и ц а 1

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{1,09 n+1}$	0,478468	0,314465	0,234192	0,186567	0,155038	0,132625
$\frac{1}{e^{1,09 n+1}}$	1,613601	1,369527	1,263886	1,2051050	1,1677032	1,141822
$\varphi(na)$	0,772057	0,430668	0,295992	0,224833	0,1810392	0,151435
$\frac{2}{1,09(2n+1)}$	0,611620	0,366972	0,262123	0,203873	0,166805	0,141143
M_{n-1}^*	0,160437	0,063696	0,033868	0,020959	0,014233	0,010292
B_n	0,222659	-0,091720	0,005652	-0,005428	-0,001328	-0,000215

Т а б л и ц а 2

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{0,545 n+1}$	0,647249	0,47846	0,37950	0,31446	0,26845	0,23419
$\frac{1}{e^{0,545 n+1}}$	1,91027	1,61360	1,46156	1,36952	1,30794	1,26388
$\varphi(na)$	1,23642	0,77205	0,55467	0,43066	0,35112	0,29599
$\frac{1}{0,545(n+1)}$	0,91743	0,61162	0,45871	0,36697	0,30381	0,26212
M_{n-1}^*	0,318995	0,1604372	0,09595	0,06369	0,04531	0,03386
A_n	0,2615	-0,00325	-0,00974	-0,00708	-0,0044	-0,0035

В табл. 2 приведены результаты расчета коэффициентов для представления оригинала в виде отрезка ряда по нормированным интегральным «е»-полиномам $\bar{V}_n^*(t)$. Значение параметра «а» в этом случае равно 0,545. Приближенное представление имеет вид

$$\varphi(t) \approx e^{-0,545 t} + 0,26156 \bar{V}_1^*(t) - 0,00325 \bar{V}_2^*(t) - 0,00974 \bar{V}_3^*(t) - 0,00708 \bar{V}_4^*(t) - 0,0044 \bar{V}_5^*(t).$$

В заключение отметим, что точное значение оригинала равно

$$\varphi(t) = e^{-t} I_0(2\sqrt{t}).$$

где $I_0(2\sqrt{t})$ — модифицированная цилиндрическая функция нулевого порядка. Отметим также, что вычисление экспоненциальных моментов M_{n-1}^* должно производиться с весьма высокой степенью точности в связи с быстрым ростом элементов матриц β и η , в то время как для определения параметра «а» достаточно точности обычной счетной линейки.

1. Матрица β

$$\beta_{kn} = \frac{(-1)^{n+k-1} 2^n (n+k)!}{(2n+1)(k-n-1)!n!(2n-1)!!}$$

1								
-2	4							
3	-16	16						
-4	40	-96	64					
5	-80	336	-512	256				
-6	140	-896	2304	-2560	1024			
7	-224	2016	-7680	14080	-12288	4096		
-8	336	-4032	21120	-56320	79872	-57344	16384	

2. Матрица η

$$\eta_{nk} = (-1)^k \frac{(n+k+1)!}{(n-k-1)!k!(k+1)!n(n+1)}$$

1								
1	-2							
1	-5	5						
1	-9	21	-14					
1	-14	56	-84	42				
1	-20	120	-300	330	-132			
1	-27	225	-825	1485	-1287	429		
1	-35	385	-1925	5005	-7007	5005	-1430	

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Дёч. «Руководство к практическому применению преобразования Лапласа». «Наука», М., 1965.
2. К. Ланцош. «Практические методы прикладного анализа». Физматгизд., М., 1961.
3. В. М. Осипов. «Интегральные полиномы Лежандра и приближение функций». (Настоящий том).
4. В. М. Осипов. «Экспоненциальные полиномы и разложение некоторых типовых сигналов». Изв. ТПИ, том 180, Томск, 1969.
5. В. М. Осипов. «Определение нулей и полюсов передаточной функции минимально-фазового типа методом моментальных последовательностей». Изв. ТПИ, том 192, Томск, 1969.