

К ВОПРОСУ ОБ УЧЕТЕ ПОТЕРЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ИЗДЕЛИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТОКОВИХРЕВЫХ ДАТЧИКОВ ЩЕЛЕВОГО ТИПА

Д. В. МИЛЯЕВ, В. К. ЖУКОВ

(Представлена научно-техническим семинаром факультета автоматики
и вычислительной техники)

В статье [1], помещенной в данном сборнике, рассмотрены часть вопросов по теории щелевого датчика. В случае контроля размеров или электропроводности изделий необходимо иметь связь между параметрами датчика и измеряемым параметром. Чаще всего находится зависимость полного сопротивления датчика от параметров изделия и датчика, а также и от частоты возбуждающего поля. Данная задача подробно рассмотрена многими авторами для датчиков проходного типа (длинный соленоид). Для решения аналогичной задачи для щелевого датчика необходимо определить: а) потери электромагнитной энергии в контролируемом цилиндрическом изделии; б) потери энергии в воздушном зазоре.

При этом полагаем:

1. Поле в зазоре однородно.

2. Магнитопровод у зазора имеет прямоугольное сечение с длинной стороной параллельной оси изделия, $b \gg a$.

Для решения данной задачи воспользуемся волновыми уравнениями для векторных потенциалов в воздухе и металле изделия

$$\nabla^2 \vec{A}_2 = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_1 + \kappa^2 \vec{A}_1 = 0, \quad (2)$$

где \vec{A}_2 — вектор-потенциал вихревых токов в воздухе,

\vec{A}_1 — вектор-потенциал вихревых токов в металле,

$$\kappa = \sqrt{-i\omega\gamma_0\mu_0}, \quad (3)$$

γ_0, μ_0 — электропроводность и магнитная проницаемость материала изделия.

Наиболее просто решения волновых уравнений запишутся в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Пусть оси координат выбраны так, что

$$\vec{A}_1 = \vec{1}_z \dot{A}_1 \text{ и } \vec{A}_2 = \vec{1}_z \dot{A}_2, \quad (4)$$

кроме того, пусть $b \gg a$. Волновое уравнение для воздуха

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_2}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (5)$$

для металла

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_1}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 \dot{A}_1 = 0. \quad (6)$$

Общие решения полученных уравнений имеют вид

$$\dot{A}_1 = (\dot{N}_{\varphi_1} \cos \lambda \varphi + \dot{N}'_{\varphi_1} \sin \lambda \varphi) [\dot{C}_1 J_n(\kappa r) + \dot{C}'_1 Y_n(\kappa r)], \quad (7)$$

$$\dot{A}_2 = (\dot{N}_{\varphi_2} \cos \lambda \varphi + \dot{N}'_{\varphi_2} \sin \lambda \varphi) [\dot{C}_2 r^n + \dot{C}'_2 r^{-n}] + \dot{A}_0, \quad (8)$$

где

\dot{N}_{φ_1} ; \dot{N}_{φ_2} ; \dot{N}'_{φ_1} ; \dot{N}'_{φ_2} ; \dot{C}_1 ; \dot{C}_2 ; \dot{C}'_1 ; \dot{C}'_2 — постоянные интегрирования, \dot{A}_0 — вектор-потенциал возбуждающего магнитного поля, $J_n(\kappa r)$, $Y_n(\kappa r)$ — функции Бесселя.

Так как первичное поле не содержит $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi$... и т. д., то и результирующее поле, т. е. суммарное поле вихревых токов и возбуждающее поле, должны иметь только $\cos \varphi$. Кроме того λ — целое число, так как \dot{A}_1 и \dot{A}_2 — четные функции, следовательно, $\dot{N}'_{\varphi_1} = \dot{N}'_{\varphi_2} = 0$. В сплошном изотропном цилиндре отраженной волны нет, следует положить $\dot{C}'_1 = 0$. Поле вихревых токов в воздухе на бесконечности равно нулю, необходимо принять $\dot{C}_2 = 0$. В результате для решения волновых уравнений

$$\dot{A}_1 = \dot{N}_{\varphi_1} C_1 J_1(\kappa r) \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\dot{A}_2 = \dot{N}_{\varphi_2} C_2' r^{-1} \cos \varphi + \dot{A}_0. \quad (10)$$

Вектор \vec{A}_0 связан с вектором магнитной индукции \vec{B}_0 возбуждающего поля соотношением

$$\text{rot } \vec{A}_0 = \vec{B}_0. \quad (11)$$

В цилиндрической системе координат $\text{rot } \vec{A}$

$$\vec{1}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_0}{\partial \varphi} - \vec{1}_\varphi \frac{\partial \dot{A}_0}{\partial r} = \vec{B}_0, \quad (12)$$

С другой стороны,

$$\vec{B}_0 = \vec{1}_r \dot{B}_0 \sin \varphi - \vec{1}_\varphi \dot{B}_0 \cos \varphi. \quad (13)$$

Из (12) и (13)

$$\dot{A}_0 = -\dot{B}_0 r \cos \varphi. \quad (14)$$

Для определения постоянных интегрирования необходимо воспользоваться равенствами

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2, \quad \frac{\partial \dot{A}_1}{\partial r} = \frac{\partial \dot{A}_2}{\partial r}, \quad (15)$$

которые справедливы при $r = r_0$, т. е. на границе раздела двух сред. После решения системы уравнений определяются постоянные

$$\dot{N}_2 = \dot{B}_0 r_0^2 \frac{\kappa r_0 J_1(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)}{\kappa r_0 J_1(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)}, \quad (16)$$

$$\dot{N}_1 = \frac{-2 \dot{B}_0 r_0}{\kappa r_0 J_1(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)}. \quad (17)$$

Вектор-потенциалы в воздухе и в металле с учетом (16) и (17) переписываются

$$\bar{A}_1 = \bar{1}_z \frac{-2 \dot{B}_0 r_0 J_1(\kappa r_0) \cos \varphi}{\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)}, \quad (18)$$

$$\bar{A}_2 = \bar{1}_z \frac{\dot{B}_0 r_0^2 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)] \cdot r^{-1}}{[\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)]} \cos \varphi + \bar{A}_0. \quad (19)$$

От вектор-потенциалов необходимо перейти к составляющим электромагнитного поля: напряженности магнитного и электрического полей. Как известно,

$$\dot{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \bar{A}, \quad (20)$$

$$\bar{E} = -i\omega \bar{A}. \quad (21)$$

Подставляя выражение для вектор-потенциалов (20) и (21) и проводя необходимые операции, можно получить распределение E и H в воздухе и металле:

$$\bar{E}_1 = \bar{1}_z \frac{2i\omega \dot{B}_0 r_0 J_1(\kappa r_0)}{J_1(\kappa r_0) + \kappa r_0 J_1'(\kappa r_0)} \cos \varphi, \quad (22)$$

$$\bar{E}_2 = \bar{1}_z \left\{ \frac{-i\omega \dot{B}_0 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)] r^{-1} r_0^2}{\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)} \cos \varphi - i\omega \dot{A}_0 \right\}, \quad (23)$$

$$\bar{H}_1 = \bar{1}_r \frac{2 \dot{B}_0 r_0 J_1(\kappa r_0) \sin \varphi}{\mu_0 r [J_1(\kappa r_0) + \kappa r_0 J_1'(\kappa r_0)]} + \bar{1}_\varphi \frac{2 \dot{B}_0 r_0 \kappa J_1'(\kappa r_0) \cos \varphi}{\mu_0 [J_1(\kappa r_0) + \kappa r_0 J_1'(\kappa r_0)]}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_2 = \bar{1}_r \left\{ \frac{\dot{B}_0}{\mu_0} \sin \varphi \frac{\dot{B}_0 r_0^2 [\kappa r_0 J_1(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)]}{r^2 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)]} \sin \varphi \right\} + \rightarrow \\ \rightarrow + \bar{1}_\varphi \left\{ \frac{\dot{B}_0}{\mu_0} \cos \varphi + \frac{\dot{B}_0 r_0^2 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) - J_1(\kappa r_0)]}{\mu_0 r^2 [\kappa r_0 J_1'(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0)]} \cos \varphi \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Потери электромагнитной энергии в металле, как и ранее, определяются через удельный поток энергии

$$\bar{\Pi}_{из} = \frac{1}{2} [\bar{E}_1 \bar{H}_1^*]. \quad (26)$$

Мощность, поглощаемая контролируемым изделием, находится, как и в предыдущем случае, т. е. вначале определяют поток энергии при $r = r_0$ и далее этот поток интегрируется по боковой поверхности цилиндра, так как только через эту поверхность электромагнитное поле проникает внутрь цилиндра.

$$P_{из} = \int_s \bar{\Pi}_{из} \bar{ds}. \quad (27)$$

Но, с другой стороны,

$$P_{из} = I^2 z_{из}, \quad (28)$$

где $z_{из}$ — электрическое сопротивление цилиндра, характеризующее потери энергии в нем.

Интегрируя выражение (28) и приравнявая его к (29), можно получить электрическое сопротивление

$$z_{из} = \pi \omega \mu_0 w_{10}^2 r_0^2 \left\{ \left[\frac{2 \operatorname{ber}_2(\kappa r_0) \operatorname{bei}(\kappa r_0) - 2 \operatorname{bei}_2(\kappa r_0) \operatorname{ber}(\kappa r_0)}{\operatorname{ber}^2 \kappa r_0 + \operatorname{bei}^2 \kappa r_0} \right] + \right. \\ \left. \rightarrow + i \left[\frac{\operatorname{ber}^2(\kappa r_0) + \operatorname{bei}^2(\kappa r_0) - \operatorname{ber}_2^2(\kappa r_0) - \operatorname{bei}_2^2(\kappa r_0)}{\operatorname{ber}^2(\kappa r_0) + \operatorname{bei}^2(\kappa r_0)} \right] \right\}. \quad (29)$$

В последнее выражение введены так называемые функции Кельвина.

Принятое допущение, что вектор-потенциал в воздушном зазоре имеет только составляющую, справедливо лишь в случае, если полюса ферромагнитного сердечника имеют прямоугольное сечение и один из размеров больше другого. Следовательно, в зазоре распространяются две плоские волны. Составляющие поля E_2 и H_2 , найденные ранее, необходимо переписать для прямоугольной системы координат, выбранной таким образом, что оси z обеих систем совпадают, а ось x направлена по линии $\varphi = 0$.

Используя формулы преобразования координат, распределение напряженностей в воздухе можно переписать в прямоугольной системе.

Кроме того, определим потери в воздушном зазоре при отсутствии в зазоре контролируемого изделия. Для чего в выражениях для напряженностей поля положим $r = 0$, после чего получаем

$$\vec{H}_2 = \vec{J} \frac{B_0}{\mu_0}, \quad (30)$$

$$\vec{E}_2 = \kappa i \omega B_0 x. \quad (31)$$

Далее необходимо найти удельный поток энергии, как

$$P_{в.з} = \frac{1}{2} [E_2 H_2^*]. \quad (32)$$

Подставляя (30) и (31) в (32) и учитывая, что произведение сопряженных комплексных величин равно квадрату модуля комплексного числа, получим удельный поток

$$P_{в.з} = \frac{1}{2} i \omega \frac{B_0^2}{\mu_0} x,$$

который необходимо определить при $x = \frac{b}{2}$.

Мощность, поглощаемая зазором,

$$P_{в.з} = 2 \int_0^a P_{в.з} \cdot dz.$$

С другой стороны,

$$P_{в.з} = I^2 z_{в.з},$$

где $z_{в.з}$ — полное сопротивление воздушного зазора, следовательно,

$$z_{в.з} = \frac{i \omega B_0^2 b \cdot a}{2 \mu_0 I^2}.$$

По закону полного тока

$$B_0 = I w_{10} \mu_0,$$

тогда выражение для полного сопротивления воздушного зазора будет иметь вид

$$z_{в.з} = i \omega \mu_0 b \cdot a w_{10}^2.$$

Суммарные потери в токовихревом датчике щелевого типа при отсутствии контролируемого изделия характеризуются сопротивлением

$$z_0 = z_{в.з} + z_{ф.с} + z_{об}.$$

Относительное же изменение полного сопротивления датчика в присутствии изделия определяется как отношение $z_{из}/z_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. М и л я е в, В. К. Ж у к о в. Учет потерь электромагнитной энергии в токовихревом датчике щелевого типа (статья помещена в данном сборнике).
-