ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 203 1974

ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ УЗЛАМ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром УВЛ ТПИ)

При обработке экспериментальных данных с целью построения эмпирических зависимостей достаточно часто используют дискретный аналог ряда Фурье по тригонометрической системе функций. При этом исходные данные, а именно: значения отсчетов приближаемой функции, а также узлы, в которых эти отсчеты взяты, известны приближенно. Это, например, имеет место в задаче автоматического построения рельефа некоторого физического поля, контролируемого путем периодического снятия дискретных показаний с датчиков, расположенных в этом поле [1].

В настоящей работе дается оценка среднеквадратичной погрешности приближения тригонометрическими полиномами, возникающая из-за неопределенности в фиксации узлов приближения. Эта часть общей ошибки приближения получила название неустранимой погрешности второго рода в отличие от неустранимой погрешности первого рода, обусловленной погрешностью измерения отсчетов [2]. Характеру неопределенности значений узлов на отрезке приближения придадим статистический смысл, т. е. будем считать, что имеется такое случайное множество последовательностей узлов $\{x_0', x_1', ..., x_n'\}$, которое в среднем совпадает с некоторой выбранной системой узлов $\{x_0, x_1, ... x_n\}$. Математически этот факт можно выразить следующим образом:

$$M\{x_0',x_1'...x_n'\}=M\{x_0'\},M\{x_1'\}...M\{x_n'\}=x_0,x_1...x_n, \tag{1}$$

$$D\{x_0',x_1'...x_n'\}=D\{x_0'\},D\{x_1'\}...D\{x_n'\}=d_0^2,d_1^2...d_n^2. \tag{2}$$

где M и D соответственно операторы математического ожидания и дисперсии.

Такая постановка задачи вполне соответствует действительности, так как в сущности описывает измерительную процедуру по определению расположения узлов на отрезке приближения, если речь идет в конечном итоге об эксперименте в физическом поле или о контроле некоторого процесса на конечном отрезке времени.

В дальнейшем будем полагать, что

$$d_0=d_1=d_2=...d_n=d \tag{3}$$

и узлы $x_0, x_1, ..., x_n$ на отрезке приближения распределены равномерно. Тогда тригонометрический полином для некоторой функции $f(x)$, построенный по отсчетам $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ и узлам $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ и наилучший в смысле среднеквадратичного критерия, имеет вид

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{i=0}^{2n} y_i, \\ a_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \cos kx_i, \\ b_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \sin kx_i. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

На множестве случайных последовательностей $\{x_0', x_1', \ldots, x_2'_n\}$ при неизменных отсчетах $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ можно построить множество случайных полиномов $\{T_n(x)\}$ согласно (4) и (5) таких, что

$$M[T_n'(x)] = T_n(x) \tag{6}$$

для всех x, а также множество отклонений $\{\Delta'_n(x)\}$, определяемых как

$$\Delta_n'(x) = T_n'(x) - T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i [\cos kx_i' - \cos kx_i], \\ \beta_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i [\sin kx_i' - \sin kx_i]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из (6) следует, что $M[\Delta_n'(x)] = 0$. (9)

Неустранимую погрешность второго рода σ_2 в целом по отрезку приближения (скажем длиной 2π), обусловленную неточностью фиксации узлов, выразим следующим выражением:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D[\Delta_n'(x)]\, dx. \tag{10}$$

Подставив в (10) (8) и выполнив соответствующие преобразования, получим

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (M[\alpha^2_k] + M[\beta^2_k]). \tag{11}$$

Будем считать, что

$$|x_i' - x_i| = \varepsilon_i' << x_{i+1} - x_i \tag{12}$$

для всех i, тогда для α_k и β_k можно воспользоваться приближениями

$$\left.\begin{aligned}\alpha_k&=-\frac{2}{2n+1}\cdot k\sum_{i=0}^{2n}y_i\,\varepsilon_i'\sin kx_i,\\ \beta_k&=\frac{2}{2n+1}\cdot k\sum_{i=0}^{2n}y_i\,\varepsilon_i'\cos kx_i.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

Используя (13), нетрудно показать, что

$$\left.\begin{aligned}M[\alpha_k^2]&=\frac{4}{(2n+1)^2}k^2d^2\sum_{i=0}^{2n}y_i^{\,2}\sin^2 kx_i,\\ M[\beta_k^2]&=\frac{4}{(2n+1)^2}k^2d^2\sum_{i=0}^{2n}y_i^{\,2}\cos^2 kx_i.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Подставляя (14) в (12), найдем

$$\sigma_2^2=\frac{n(n+1)d^2}{3(2n+1)}\sum_{i=0}^{2n}y_i^2.\tag{15}$$

Если считать, что функция $f(x)$ ограничена на отрезке приближения некоторой постоянной M, т. е. $|f(x)|\leqslant M$ для всех x, что вполне естественно в практических задачах, то получим для величины σ_2 оценку

$$\sigma_2^2\leqslant\frac{n(n+1)}{3}M^2d^2\tag{16}$$

или для достаточно больших n

$$\sigma_2\leqslant\frac{ndM}{\sqrt{3}}.\tag{17}$$

Удобно ввести относительную погрешность ξ_2 согласно выражению

$$\xi_2=\frac{\sigma_2}{M}\leqslant\frac{nd}{\sqrt{3}}.\tag{18}$$

Относительно значения неустранимой погрешности второго рода согласно (17) (то же (18)) можно сделать следующие выводы: неустранимая погрешность второго рода, обусловленная погрешностью определения узлов на отрезке приближения, возрастает с увеличением степени приближающего полинома. В результате, что весьма важно отметить, начиная с некоторых n (то же с $N=2n+1$ числа отсчетов), общая погрешность приближения, которая складывается из устранимой погрешности (т. е. погрешности метода, определяемой сходимостью полинома к функции $f(x)$) и неустранимых погрешностей первого и второго рода, будет возрастать, несмотря на дальнейшее увеличение объема исходных данных, т. е. числа отсчетов N. Следовательно, при увеличении числа отсчетов необходимо повышать точность измерения как значений функции, так и положения узлов с тем, чтобы добиться приемлемых значений погрешности приближения.

Отметим в заключение, что возрастание неустранимой погрешности второго рода свидетельствует о неустойчивости процесса приближения тригонометрическими полиномами к вариации взаимного расположения узлов x_i на отрезке приближения. Этот же процесс остается устойчивым, как это было показано в работе [3], к вариации последовательности отсчетов в полосе погрешности, т. е. неустранимая погрешность первого рода не зависит от степени приближающего полинома. Специальным методом процесс приближения можно сделать более устойчивым. Простейшим из них является сглаживание рядов, вычисляемых по приближенным данным. В частности, если степень полинома n выбирается из соотношения $N=r(2n+1)$, где r — целое, больше единицы, как это имеет место в тригонометрической регрессии, то соответствующая оценка для ξ_2 примет вид

$$\xi_2 \leqslant \frac{''dn}{r\sqrt{3}}, \tag{19}$$

т. е. ξ_2 в r раз оказывается меньше.

Полученные результаты могут быть положены в основу планирования объема экспериментальных данных в случае, когда аппроксимация экспериментальных зависимостей ведется методом средних квадратов с помощью тригонометрических полиномов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Э. Н а а ц. Некоторые вопросы проектирования устройств регистрации пространственно распределенных параметров. Изв. ТПИ, т. 138, изд. ТГУ. Томск, 1965.

2. Н. С. Б е р ё з и н, Н. П. Ж и д к о в. Методы вычислений, т. 1, Физматгиз. М., 1962.

3. И. Э. Н а а ц. Применение тригонометрической интерполяции в задачах дискретного измерения. Изв. ТПИ, т. 168, изд. ТГУ. Томск, 1968.