

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ КУММЕРА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В статье разбирается вопрос о получении приближений функции Куммера в виде произведения биномов. Эти приближения получены на базе цепных дробей и могут быть применены для вычисления этой функции.

Функция Куммера содержит параметры  $\alpha$  и  $\gamma$ , которые в этой статье изучены при положительных значениях  $2\alpha > \gamma > 0$ .

1. Вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера)

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa} \kappa!} x^{\kappa}, \quad |x| < N,$$

$$\gamma \neq 0, -1, \dots; (\alpha)_{\kappa} = \frac{\Gamma(\alpha + \kappa)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (\alpha)_0 = 1 \quad (1)$$

может быть представлена как частное двух функций следующим путем:

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) = e^{\ln \Phi(\alpha; \gamma; x)} = \exp \left\{ \int_0^x \frac{d[\Phi(\alpha; \gamma; t)]}{\Phi(\alpha; \gamma; t)} \right\},$$

т. е.

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) = \exp \left[ \alpha \int_0^x \frac{\Phi(\alpha + 1; \gamma + 1; t)}{\gamma \Phi(\alpha; \gamma; t)} dt \right]. \quad (2)$$

Далее заменим отношение двух рядов под знаком интеграла (2) известным разложением его в цепную дробь ([1], стр. 134) и представим функцию (1) в виде следующего произведения:

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) = \exp \left[ \alpha \int_0^x \frac{P_{2n+1}(t)}{Q_{2n+1}(t)} dt \right] \exp \left[ -\alpha \int_0^x R_{2n+1}(t) dt \right], \quad (3)$$

где

$$\rho_{2n+1}(x) = -\alpha \int_0^x R_{2n+1}(t) dt, \quad (4)$$

$$\frac{P_\kappa(t)}{Q_\kappa(t)} = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_\kappa}}},$$

$$\alpha_1 = \gamma, \alpha_{2m} = (-1)^m \frac{(\gamma + 2m - 1)(\alpha + 1)_{m-1}}{(\gamma - \alpha)_m} \cdot \frac{1}{t},$$

$$\alpha_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\gamma + 2m)(\gamma - \alpha)_m}{(\alpha + 1)_m}, \quad m = 1, 2, \dots; \quad (5)$$

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2\kappa+1}}{Q_{2\kappa-1}(t) Q_{2\kappa+1}(t)} \quad ([2], \text{ стр. 34}). \quad (6)$$

Для числителя и знаменателя подходящей дроби (5) известны равенства и соотношение ([2], стр. 13, 14)

$$P_{2n+1}(t) = 1 + \dots + \frac{(\gamma + 1)_{2n}}{(\alpha + 1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} = \frac{(\gamma + 1)_{2n}}{(\alpha + 1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} p_{2n+1}(t), \quad (7)$$

$$Q_{2n+1}(t) = \sum_{m=0}^n \alpha_{2m+1} + \dots + \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha + 1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} = \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha + 1)_n} \cdot \frac{1}{t^n} q_{2n+1}(t), \quad (8)$$

где

$$D_n = \sum_{m=0}^n \alpha_{2m+1} = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(\gamma + 2n)(\gamma - \alpha)_m}{(\alpha + 1)_m}. \quad (9)$$

$$\varphi_{2n+1}(x) = \left[ 1 + \frac{2\alpha - \gamma}{(\gamma + 2n - 2)(\gamma + 2n)} x \right] \varphi_{2n-1}(x) + \frac{(\alpha + n - 1)(\gamma - \alpha + n - 1)}{(\gamma + 2n - 2)(\gamma + 2n - 3)_3} x^2 \varphi_{2n-3}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (10)$$

где

$$p_{2n+1}(x) \text{ и } q_{2n+1}(x) = \varphi_{2n+1}(x).$$

Ввиду того, что правая часть равенства (9) может быть представлена разностью двух обобщенных гипергеометрических рядов, и, применяя следующую формулу ([3], стр. 191) в частном случае ( $c = 1$ ):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} = \gamma {}_3F_2 \left( 1 + \frac{\gamma}{2}, \quad \gamma - \alpha, \quad 1; \quad \frac{\gamma}{2}, \quad \alpha + 1; \quad -1 \right) = \alpha, \quad (11)$$

получим

$$D_n = \sum_{m=0}^n \alpha_{2m+1} = \frac{(\alpha)_{n+1} + (-1)^n (\gamma - \alpha)_{n+1}}{(\alpha + 1)_n}. \quad (12)$$

2. При следующих значениях параметров  $2\alpha > \gamma > 0$  и независимой переменной  $x > 0$  имеем:

1) для  $\alpha = \gamma + \kappa + \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) все  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2\kappa+3}$  в равенствах (5) ( $m = 1, \dots, \kappa + 1$ ) положительны и корни  $Q_{2\kappa+3}(x)$  отрицательные ([2], стр. 14) и разделяются корнями  $Q_{2\kappa+1}(x)$ , поэтому и ввиду равенства (8)

$$q_1(x) < q_3(x) < \dots < q_{2n+3}(x); \quad (13)$$

2) для  $\frac{\gamma}{2} < \alpha < \gamma + 1$  и для  $\alpha = \gamma + \kappa + \varepsilon$  ( $m = \kappa + 2, \dots$ ), ввиду соотношений (10) и неравенств (13), получим:

$$q_{2n+1}(x) < q_{2n+3}(x) < \dots; \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Исходя из равенств (5), (8) и (14), нетрудно получить оценку для функционального ряда (6):

$$|R_{2n+1}(t)| < \frac{|\gamma - \alpha|_{n+1} (\alpha + 1)_n t^{2n+1}}{(\gamma)_{2n+1} (\gamma)_{2n+2} [q_{2n+1}(t)]^2}, \quad t > 0 \quad (15)$$

Относительно модуля интеграла (4), ввиду неравенств (15), можно установить верхнюю границу:

$$|\rho_{2n+1}(x)| < \frac{x^{2n+2} |\gamma - \alpha|_{n+1} (\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{2n+1} (\gamma)_{2n+2} [q_{2n+1}(x)]^2}, \quad x > 0. \quad (16)$$

Равенство (3) с учетом (7) и (8) можно представить в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha; \gamma; x) \exp \left[ \frac{\alpha}{\gamma} \int_0^x \frac{p_{2n+1}(t)}{q_{2n+1}(t)} dt \right] + r_{2n+1}(x) = \\ = \Phi_{2n+1}(x) + r_{2n+1}(x), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$|r_{2n+1}(x)| < e^{\frac{\alpha}{\gamma} x} \exp |\rho_1(x)| [\exp |r_{2n+1}(x)| - 1]. \quad (18)$$

3. Теорема. Вырожденная гипергеометрическая функция (1) представляется следующим произведением биномов:

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) = e^{b_0 x} \prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{x}{a_m} \right)^{b_m} + r_{2n+1}(x), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{x}{a_m} \right) = q_{2n+1}(x), \quad b_0 = \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha)_{n+1} + (-1)^n (\gamma - \alpha)_{n+1}}, \\ b_m = \frac{\alpha(\alpha - \gamma) a_m A_{2n+1}(-a_m)}{\gamma^2 (\gamma + 1) \frac{d}{dx} [q_{2n+1}(-a_m)]}; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Многочлены  $A_{2n+1}(x)$ ,  $q_{2n+1}(x)$  и  $p_{2n+1}(x)$  следующие:

$$\begin{aligned} A_1(x) = 0, \quad A_3(x) = q_1(x) = p_1(x) = 1, \\ q_3(x) = 1 + \frac{2\alpha - \gamma}{\gamma(\gamma + 2)} x, \quad p_3(x) = 1 + \frac{(\alpha + 1)}{(\gamma + 1)_2} x; \end{aligned} \quad (21)$$

они для  $n = 2, 3, \dots$  определяются последовательно с помощью соотношения (10). Оценка остаточного члена  $|r_{2n+1}(x)|$  устанавливается с помощью неравенств (18) и (16).

Доказательство. Ввиду следующего равенства

$$(\gamma - \alpha) x A_{2n+1}(x) = (\gamma)_2 [p_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x)], \quad n = 1, 2, \dots; \quad (22)$$

а также

$$M_{2n+1}(x) = \frac{\alpha}{\gamma} p_{2n+1}(x) - \frac{\alpha}{D_n} q_{2n+1}(x), \quad (23)$$

многочлены  $A_{2n+1}(x)$ ,  $M_{2n+1}(x)$  наряду с  $q_{2n+1}(x)$  и  $p_{2n+1}(x)$  удовлетворяют соотношению (10).

Применяя равенства (7) — (9), (20) и (23), преобразуем равенство (17):

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha; \gamma; x) \exp \left[ \frac{\alpha}{D_n} \int_0^x dt + \int_0^x \frac{M_{2n+1}(t)}{q_{2n+1}(t)} dt \right] + r_{2n+1}(x) = \\ = \exp \left[ b_0 \int_0^x dt + \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{a_m} \int_0^x \frac{dt}{1 + \frac{t}{a_m}} \right] + r_{2n+1}(x), \end{aligned}$$

где  $b_0 = \frac{\alpha}{D_n}$  и ввиду равенства (12)  $b_0 = \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha)_{n+1} + (-1)^n (\gamma - \alpha)_{n+1}}$ , а также

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha; \gamma; x) = e^{b_0 x} \prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{x}{a_m} \right)^{b_m} + r_{2n+1}(x), \quad b_m = \\ = \frac{M_{2n+1}(-a_m)}{\frac{d}{dx} [q_{2n+1}(-a_m)]}, \end{aligned}$$

к тому же, на основании (19) и (17) оценка  $|r_{2n+1}(x)|$  находится согласно неравенствам (18) и (16).

Ввиду первого равенства (20)  $q_{2n+1}(-a_m) = 0$ , поэтому, применяя равенство (23), получим

$$\begin{aligned} b_m = \frac{M_{2n+1}(-a_m) + \left( \frac{\alpha}{D_n} - \frac{\alpha}{\gamma} \right) q_{2n+1}(-a_m)}{\frac{d}{dx} [q_{2n+1}(-a_m)]} = \\ = \frac{\frac{\alpha}{\gamma} [p_{2n+1}(-a_m) - q_{2n+1}(-a_m)]}{\frac{d}{dx} [q_{2n+1}(-a_m)]} \end{aligned}$$

и на основании равенства (22)

$$b_m = \frac{\alpha(\alpha - \gamma) a_m A_{2n+1}(-a_m)}{\gamma^2 (\gamma + 1) \frac{d}{dx} [q_{2n+1}(-a_m)]},$$

тем самым теорема полностью доказана.

4. В случае комплексных корней многочлена  $q_{2n+1}(x)$  эти корни —  $a_m$  и коэффициенты  $b_m$  соответственно будут попарно сопряженные и каждые такие два множителя могут быть преобразованы к элементарным функциям с вещественными коэффициентами. Например, после элементарных преобразований получим ( $i = \sqrt{-1}$ )

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{x}{a + bi} \right)^{\sigma + \tau i} \left( 1 + \frac{x}{a - bi} \right)^{\sigma - \tau i} = \\ = \left[ \frac{b^2 x^2}{(a^2 + b^2)^2} + \left( \frac{ax}{a^2 + b^2} + 1 \right)^2 \right]^{\sigma} e^{2\tau \operatorname{arctg} \frac{bx}{ax + a^2 + b^2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Применим формулу (19) в случае  $n = 1$ , получим:

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) = e^{\frac{\alpha(\alpha+1)x}{(2\alpha-\gamma)(\gamma+1)}} \left( 1 + \frac{2\alpha-\gamma}{\gamma^2+2\gamma} x \right)^{\frac{\alpha(\alpha-\gamma)(\gamma+2)^2}{(2\alpha-\gamma)^2(\gamma+1)}} + r_3(x). \quad (25)$$

Из равенства (25) можно получить как точные равенства

$$\Phi(\gamma+1; \gamma; x) = e^x \left( 1 + \frac{1}{\gamma} x \right); \quad \Phi(-1; \gamma; x) = 1 - \frac{x}{\gamma};$$

так и приближенные равенства для интеграла вероятностей и интегралов Френеля ([3], стр. 254):

$$\begin{aligned} \text{Erf}(x) &\equiv \int_0^x e^{-t^2} dt = x\Phi\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) = \\ &= xe^{0,6x^2} \left( 1 + \frac{2}{21} x^2 \right)^{-9,8} + xr_3(-x^2); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} C(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \left[ \Phi\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -ix\right) + \right. \\ &+ \left. \Phi\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; ix\right) \right] \approx \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left( 1 + \frac{4x^2}{441} \right)^{-4,9} \times \\ &\times \cos\left( 9,8 \arctg \frac{2x}{21} - 0,6x \right), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} S(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} \sin t dt \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left( 1 + \frac{4x^2}{441} \right)^{-4,9} \sin\left( 9,8 \arctg \frac{2x}{21} - 0,6x \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где для  $x = 1$  получим:

$$C(1) \approx 0,72203 (\Delta = -0,00033), \quad S(1) \approx 0,24774 (\Delta = 0,00014),$$

здесь  $\Delta$  — абсолютная погрешность.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Хованский. Применение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.
2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
3. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.