

## РАСЧЕТ ПОЛЕЙ РАССЕЯНИЯ В ЛОБОВЫХ ЗОНАХ ОДНОСЛОЙНЫХ ОБМОТОК

В. И. Попов, Г. А. Сипайлов

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин  
и общей электротехники)

Определение индуктивностей, а также и усилий, действующих на проводники в лобовой зоне электрической машины, связано с расчетом полей рассеяния. Поскольку обмотки в лобовой зоне имеют сложные пространственные конфигурации, то поля рассеяния, создаваемые ими, в общем случае имеют трехмерную структуру. Расчет таких полей весьма сложен. Многие авторы при расчете полей рассеяния используют упрощенные представления о характере магнитного поля в зоне лобовых частей электрических машин. Например, в [2] при расчете поля в лобовом пространстве не принимается во внимание влияние окружающих ферромагнитных поверхностей, а в [1,3,15] не учитывается влияние щитов и корпуса. Кроме того, в [1,3] рассматриваются плоские обмотки. Формулы для расчета усилий, действующих на проводники, получаемые в [1,2,3,15], дают результаты, в 1,5—3 раза отличающиеся друг от друга, и поэтому оказываются ненадежными [14].

Начало строгого аналитического подхода к проблеме расчета рассеяния в области лобовых частей с применением методов теории электромагнитного поля положено А. И. Вольдеком [7,8,9]. Методика А. И. Вольдека наиболее полно учитывает влияние активной стали, щитов, ротора и корпуса, но разработана она применительно к развернутой машине, в которой поле рассчитывается для области, представляющей бесконечно длинный прямоугольный параллелепипед [7]. По-видимому, такая идеализация приемлема для многополюсных машин, имеющих малую кривизну лобового пространства. Для двухполюсных машин типа турбогенераторов и особенно ударных генераторов с однослойной концентрической обмоткой, имеющих большую кривизну, такое допущение неприемлемо.

Задачу можно представить в более общем виде, если определить поле для ограниченной цилиндрической области, каковой представляется лобовое пространство электрической машины (рис. 1).

Магнитная индукция в зоне лобовых частей определится через векторный потенциал  $A$ :

$$B = \text{rot}A. \quad (1)$$

Являясь наиболее общей характеристикой магнитного поля, векторный потенциал дает возможность определить практически все другие величины поля: распределение потока, энергию поля, индуктивности и т. д. Определение же векторного потенциала  $A$  в заданной области довольно трудная задача. Однако если известно распределение вектора плотности тока  $i$ , возбуждающего поле в пространстве с магнитной про-

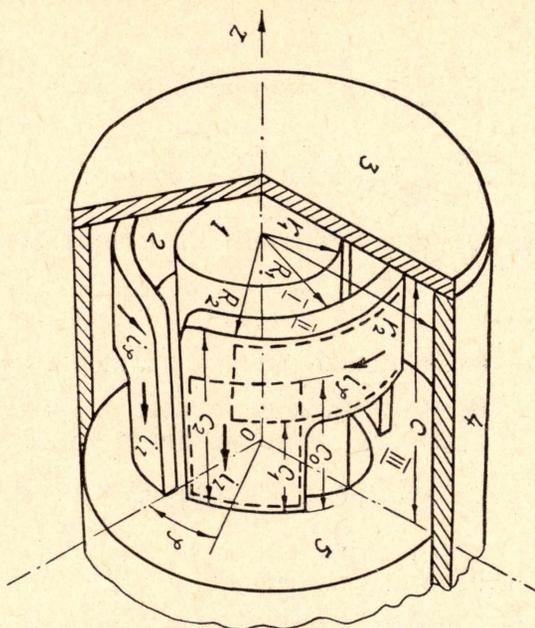


Рис. 1. Схематичное изображение лобового пространства электрической машины: 1 — ротор, 2 — обмотка, 3 — щит, 4 — корпус, 5 — активная сталь

нищаемостью  $\mu$ , то векторный потенциал определится из уравнения Пуассона

$$\Delta A = -\mu i. \quad (2)$$

Вектор  $A$  имеет направление вектора плотности тока. Концентрическая обмотка в лобовой зоне имеет две пространственные составляющие плотности тока  $i_z$  и  $i_\varphi$  (рис. 1), следовательно, задача сводится к отысканию составляющих векторного потенциала  $A_z$  и  $A_\varphi$ , которые могут быть найдены из скалярных уравнений, написанных в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = -\mu_0 i_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu_0 i_z. \quad (4)$$

По составляющим векторного потенциала  $A_z$  и  $A_\varphi$  при использовании (1) могут быть найдены значения индукции  $B_z$ ,  $B_r$  и  $B_\varphi$  в любой точке лобового пространства.

При интегрировании уравнений (3) и (4) принимаются следующие допущения:

- 1) токи смещения в области лобового пространства и вихревые токи в проводниках обмотки отсутствуют;
- 2) магнитная проницаемость окружающих ферромагнитных поверхностей  $\mu = \infty$ ;
- 3) действительная пространственная конфигурация обмотки заменяется расчетной. На рис. 1 расчетная конфигурация показана пунктирными линиями.

Лобовая часть обмотки на полюсном делении заменяется одним криволинейным участком с током  $i_\varphi$  и двумя прямолинейными с токами  $i_z$ . Сравнение реальной и расчетной конфигураций показывает, что они близки, и поэтому погрешность в определении поля невелика.

Раскладывая плотности тока  $i_\varphi$  и  $i_z$  в ряды по собственным функ-

циям координаты  $z$  и учитывая, что ток периодичен вдоль расточки статора, можем написать

$$i_\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i_{n\varphi}(r) \cdot \cos mz \cdot \sin p\nu\varphi, \quad (5)$$

$$i_z = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i_{nz}(r) \sin mz \cdot \cos p\nu\varphi, \quad (6)$$

где  $\nu$  — порядок пространственной гармоники плотности тока по координате  $\varphi$ ,

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$i_{n\varphi}(r)$  и  $i_{nz}(r)$  — коэффициенты ряда, являющиеся в общем случае функциями координаты  $r$  (амплитуды пространственных гармоник плотности тока),

$m = \frac{\pi p}{C}$ , где  $C$  — период пространственной гармоники по координате  $z$  (рис. 1),  
 $p$  — число пар полюсов.

Для практических расчетов достаточно рассматривать только основную гармонику  $\nu=1$ , так как влияние высших гармоник на величину магнитного поля в лобовых частях мало [8]. Тогда выражения для составляющих векторного потенциала  $A_\varphi$  и  $A_z$  можно представить в виде

$$A_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(r) \cos mz \sin p\varphi, \quad (7)$$

$$A_z = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(r) \sin mz \cos p\varphi. \quad (8)$$

где  $V_n(r)$  и  $W_n(r)$  — коэффициенты рядов, являющиеся функциями только одной переменной  $r$ .

Подставив ряды (5), (7) в (3) и (6), (8) в (4), получим уравнения для определения коэффициентов  $V_n(r)$  и  $W_n(r)$ :

$$\frac{\partial^2 V_n(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n(r)}{\partial r} - \left( m^2 + \frac{p^2}{r^2} \right) V_n(r) = -\mu_0 i_{n\varphi}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 V_0(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_0(r)}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} V_0(r) = -\mu_0 i_{0\varphi}, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial^2 W_n(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_n(r)}{\partial r} - \left[ m^2 + \frac{p^2}{r^2} \right] W_n(r) = -\mu_0 i_{nz}. \quad (10)$$

Решение методом вариаций произвольных постоянных одностипных уравнений Бесселя (9) и (10):

$$V_n(r) = \left( N_V - \mu_0 \int_{r_1}^r i_{n\varphi}(\rho) K_p(m\rho) \rho d\rho \right) \cdot I_p(mr) + \\ + \left( M_V + \mu_0 \int_{r_1}^r i_{n\varphi}(\rho) I_p(m\rho) \rho d\rho \right) \cdot K_p(mr),$$

$$W_n(r) = \left( N_W - \mu_0 \int_{r_1}^r i_{nz}(\rho) K_p(m\rho) \rho d\rho \right) I_p(mr) +$$

$$+ \left( M_w + \mu_0 \int_{r_1}^r i_{nz}(\rho) I_p(m\rho) \rho d\rho \right) K_p(mr),$$

где

$I_p$  и  $K_p$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно,  
 $N_v, N_w, M_v, M_w$  — постоянные интегрирования,  
 $r_1$  — некоторое фиксированное значение  $r$ .

Выражение (9а), соответствующее  $n=0$ , представляет уравнение Эйлера, общий интеграл которого может быть записан

$$V_0 = \left( N_0 - \frac{\mu_0}{2p} \int_{r_1}^r i_{0\varphi}(\rho) \rho^{1-p} d\rho \right) r^p + \\ + \left( M_0 + \frac{\mu_0}{2p} \int_{r_1}^r i_{0\varphi}(\rho) \rho^{1+p} d\rho \right) r^{-p},$$

где  $N_0$  и  $M_0$  — постоянные интегрирования.

В справедливости этих решений можно убедиться подстановкой их в соответствующие уравнения, имея в виду при этом, что производная от интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции при этом пределе.

Постоянные интегрирования найдутся из граничных условий. После определяется для области пространства, ограниченной ферромагнитными поверхностями с магнитной проницаемостью  $\mu = \infty$ . Это означает, что составляющие индукции, касательные к поверхностям, равны нулю при любом значении угла  $\varphi$ .

Составляющие индукции для векторного потенциала  $A_\varphi$  определяются из уравнения (1)

$$B_r = - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\ B_\varphi = 0, \\ B_z = \frac{A_\varphi}{r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}.$$

Для касательных составляющих индукции (граничные условия):

- а) на торцовых поверхностях
- 1)  $\left( \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0,$
  - 2)  $\left( \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)_{z=c} = 0;$
- б) на цилиндрической поверхности
- 3)  $\left( \frac{A_\varphi}{r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right)_{r=r_1} = 0,$
  - 4)  $\left( \frac{A_\varphi}{r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right)_{r=r_2} = 0.$

Условия 1 и 2 выполняются заданием решения (7). Следовательно, постоянные интегрирования  $N_v$  и  $M_v$  необходимо находить из условий (3) и (4), для которых может быть получено

$$\left( \frac{V_n(r)}{r} + \frac{\partial V_n(r)}{\partial r} \right)_{r=r_1} = 0; \quad \left( \frac{V_n(r)}{r} + \frac{\partial V_n(r)}{\partial r} \right)_{r=r_2} = 0.$$

По аналогии с предыдущим постоянные  $N_w$  и  $M_w$  могут быть найдены из условий

$$\left( \frac{\partial W_n(r)}{\partial r} \right)_{r=r_1} = 0; \quad \left( \frac{\partial W_n(r)}{\partial r} \right)_{r=r_2} = 0,$$

а постоянные  $N_0$  и  $M_0$  из

$$\left( \frac{V_0(r)}{r} + \frac{\partial V_0(r)}{\partial r} \right)_{r=r_1} = 0; \quad \left( \frac{V_0(r)}{r} + \frac{\partial V_0(r)}{\partial r} \right)_{r=r_2} = 0.$$

При определении постоянных интегрирования необходимо вычислять интегралы вида

$$\int_{r_1}^{r_2} i_{n\varphi}(\rho) K_p(m\rho) \rho \, d\rho; \quad \int_{r_1}^{r_2} i_{0\varphi}(\rho) \rho^{1-p} \, d\rho \dots \text{ и т. д.}$$

Так как ток распределен по области II, а в областях I и III равен нулю, то указанные интегралы существуют только в интервале  $R_1 < r < R_2$ . Кроме того, область II образует поверхности  $r = \text{const}$ , и, следовательно, плотность тока в ней не зависит от переменной  $r$  (см. рис. 1).

Определенные из решений уравнений (9), (9а) и (10) с учетом рассмотренных граничных условий постоянные интегрирования принимают вид

$$N_V = \mu_0 i_{n\varphi} b R_K \beta_V \frac{f_V K_p(mR_K) + \varepsilon_V I_p(mR_K)}{\beta_V f_V - \varepsilon_V \lambda_V},$$

$$M_V = \mu_0 i_{n\varphi} b R_K \lambda_V \frac{f_V K_p(mR_K) + \varepsilon_V I_p(mR_K)}{\beta_V f_V - \varepsilon_V \lambda_V},$$

$$N_W = \mu_0 i_{nz} b R_K \beta_W \frac{f_W K_p(mR_K) + \varepsilon_W I_p(mR_K)}{\beta_W f_W - \varepsilon_W \lambda_W},$$

$$M_W = \mu_0 i_{nz} b R_K \lambda_W \frac{f_W K_p(mR_K) + \varepsilon_W I_p(mR_K)}{\beta_W f_W - \varepsilon_W \lambda_W},$$

$$N_0 = \mu_0 i_{0\varphi} \frac{S \cdot (p+1)r_2^p + T(p-1)r_2^{-p}}{(p+1) \cdot (r_2^p - r_1^{2p} r_2^{-p})},$$

$$M_0 = \mu_0 i_{0\varphi} \frac{S \cdot (p+1)r_2^p + T(p-1)r_2^{-p}}{(p-1)(r_2^p - r_1^{2p} r_2^{-p})} \cdot r_1^{2p},$$

где

$$\begin{aligned} \beta_V &= (p+1) K_{p-1}(mr_1) + (p-1) K_{p+1}(mr_1), \\ f_V &= (p+1) I_{p-1}(mr_2) + (p-1) I_{p+1}(mr_2), \\ \varepsilon_V &= (p+1) K_{p-1}(mr_2) + (p-1) K_{p+1}(mr_2), \\ \lambda_V &= (p+1) I_{p-1}(mr_1) + (p-1) I_{p+1}(mr_1), \\ \beta_W &= K_{p-1}(mr_1) + K_{p+1}(mr_1), \\ f_W &= I_{p-1}(mr_2) + I_{p+1}(mr_2), \\ \varepsilon_W &= K_{p-1}(mr_2) + K_{p+1}(mr_2), \\ \lambda_W &= I_{p-1}(mr_1) + I_{p+1}(mr_1), \end{aligned}$$

$$S = \frac{R_2^{2-p} - R_1^{2-p}}{2p(2-p)},$$

$$T = \frac{R_2^{2+p} - R_1^{2+p}}{2p(2+p)},$$

$b = R_2 - R_1$  — ширина обмотки по радиусу,

$R_k = \frac{R_2 + R_1}{2}$  — средний радиус обмотки.

Амплитуды пространственных гармоник плотности тока  $i_{0\varphi}$ ,  $i_{n\varphi}$  и  $i_{nz}$  определяются из (5) и (6):

$$i_{0\varphi} = \frac{2Iq}{C\pi b} \sin \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{\gamma}{2} \right),$$

$$i_{n\varphi} = \frac{8Iq}{\pi^2 b (C_2 - C_1)} \cdot \frac{1}{n} \cos \frac{m(C_2 + C_1)}{2} \times$$

$$\times \sin \frac{m(C_2 - C_1)}{2} \sin \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{\gamma}{2} \right),$$

$$i_{nz} = \frac{16Iqpk_p}{\pi^2 b (R_2 + R_1)} \frac{1}{n} \sin^2 \frac{mC_0}{2},$$

где

$\gamma$  — отношение обмотанной части статора к полной длине окружности;

$k_p$  — коэффициент распределения обмотки;

$I$  — ток, протекающий по обмотке;

$C_1, C_2, C_0$  — геометрические размеры (рис. 1).

Выражения коэффициентов ряда (7)

для области I  $r_1 < r < R_1$

$$V_{nI}(r) = N_v [\beta_v I_p(mr) + \lambda_v K_p(mr)];$$

для области II  $R_1 < r < R_2$

$$V_{nII}(r) = N_v [\beta_v I_p(mr) + \lambda_v K_p(mr)] - \mu_0 I_p(mr) \int_{R_1}^r i_{n\varphi}(\rho) K_p(m\rho) \rho d\rho +$$

$$+ \mu_0 K_p(mr) \int_{R_1}^r i_{n\varphi}(\rho) I_p(m\rho) \rho d\rho;$$

для области III  $R_2 < r < r_2$

$$V_{nIII}(r) = N_v [\varepsilon_v I_p(mr) + f_v K_p(mr)].$$

Аналогично для коэффициентов ряда (8)

$$W_{nI}(r) = N_w [\beta_w I_p(mr) + \lambda_w K_p(mr)],$$

$$W_{nII}(r) = N_w [\beta_w I_p(mr) + \lambda_w K_p(mr)] -$$

$$- \mu_0 I_p(mr) \int_{R_1}^r i_{nz}(\rho) K_p(m\rho) \rho d\rho + \mu_0 K_p(mr) \int_{R_1}^r i_{nz}(\rho) I_p(m\rho) \rho d\rho;$$

$$W_{nIII}(r) = N_w [\varepsilon_w I_p(mr) + f_w K_p(mr)].$$

Составляющие индукции в любой точке лобового пространства определяются как:

$$B_{r\sigma} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z\sigma}}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_{\varphi\sigma}}{\partial z},$$

$$B_{\varphi\sigma} = -\frac{\partial A_{z\sigma}}{\partial r},$$

$$B_{z\sigma} = \frac{1}{r} A_{\varphi\sigma} + \frac{\partial A_{\varphi\sigma}}{\partial r},$$

где  $\delta$  — область, в которой определяется индукция.

Рассмотренная методика по определению поля в лобовой зоне однослойных обмоток является первым этапом в исследовании усилий, действующих на проводники лобовой части ударного генератора. Она применима также для расчета индуктивностей, исследования потерь и местных нагревов в конструктивных элементах лобовой зоны. Трудности, связанные с привлечением специальных функций и громоздкостью вычислений, могут быть успешно преодолены применением ЭЦВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Harrington. D Forces in Machino End Windings Trans AIEE, 1952, V, 71, pt. III, p. 849—859.
2. Ashworth D. S, Hammond. T, The Calculation of the Magnetic Field of Rotating Machines, Proc IEE, 1961, paper № 3489 S.
3. Lawrenson. P. J, The Magnetic Field of the End — Windings of Turbo — Generators, Proc IEE, 1961, V. 108, ptA, paper № 3490 S.
4. Hammond P, Electric and Magnetic Images, Proc IEE, V 107, pt C, 1960, № 12.
5. Б. Хэг. Электромагнитные расчеты. Энергоиздат, 1934.
6. Штафль М. Электродинамические задачи в электрических машинах. «Энергия», 1966.
7. А. И. Вольдек. Основы методики расчета магнитных полей лобовых частей обмоток электрических машин, «Электричество», 1963, № 1.
8. А. И. Вольдек. Методика расчета векторного магнитного потенциала лобовых частей обмоток электрических машин, Труды ЛПИ, № 241, 1964.
9. А. И. Вольдек, Я. Б. Данилевич. Метод расчета магнитного поля в зоне лобовых частей обмоток статора и ротора турбогенераторов. Сб. АН СССР «Исследование электромагнитных полей, параметров и потерь в мощных электрических машинах», «Наука», 1966.
10. А. Анго. Математика для электрорадиоинженеров. «Наука», 1967.
11. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции, «Наука», 1964.
12. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
13. К. Шимони. Теоретическая электротехника, Изд. «Мир», 1964.
14. М. Ф. Юдов. Вибрация и деформация обмоток статоров синхронных машин, «Энергия», 1968.
15. Я. Кучера, Г. Иозеф. Обмотки электрических вращательных машин. Чехословацкая Академия наук, Прага, 1963.