ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 114 1964

ДЕЙСТВИЕ НОРМАЛЬНОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА УПРУГИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ БЕСКОНЕЧНЫЙ КЛИН

Б. П. МИТРОФАНОВ

(Представлено научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Задача о действии сосредоточенной силы на упругую среду представляет собой математическую абстракцию, которая не отражает действительных граничных условий задач теории упругости. Однако большое количество контактных задач [1, 2], которые были решены на основании задачи о действии сосредоточенной силы, показали практическую приемлемость и важность этого формального решения.

В классической теории упругости решены задачи о действии сосредоточенной силы на полуплоскость, полупространство, диск, шар и некоторые другие тела.

Естественной будет попытка расширить границы применимости задачи о действии сосредоточенной силы на тела других форм.

Рассмотрим задачу о действии сосредоточенной нормальной силы на границу упругого прямоугольного бесконечного клина.

Пусть в точке C (a, o) границы рассматриваемого клина приложена сила P (рис. 1). Напряжения в клине, возникшие в результате действия силы P, определим, используя решение для действия сосредоточенной силы на полуплоскость [3].

Сила P в вертикальных площадках точек (o, x) полуплоскости вызовет появление напряжений σ_y, τ_{xy}. Если добиться, чтобы указанные напряжения в точках (o, x) равнялись нулю (конечно, без добавочного загружения границы $x = 0$, $y > 0$), то напряжения части полуплоскости $y > 0$ будут представлять напряжения прямоугольного бесконечного клина.

Касательные напряжения обращаются в нуль при приложении в точке $C_1(-a, o)$ силы P. Нормальные напряжения компенсируем распределенным давлением противоположного знака, прикладывая его по вертикальной границе ограниченной полуплоскости. Величина этого давления от действия двух сил P согласно [3] равна

$$\sigma_y = \frac{4Pa^2}{\pi} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^2} . \tag{1}$$

Напряжения в ограниченной полуплоскости от давления σ_y получим, используя общее решение плоской задачи в полярных координатах [4]. Назначим полюс в точке O (рис. 1) и представим σ_y в виде многочлена.

Для этого используем ортогональные многочлены Лагерра и запишем функцию σ_y в виде

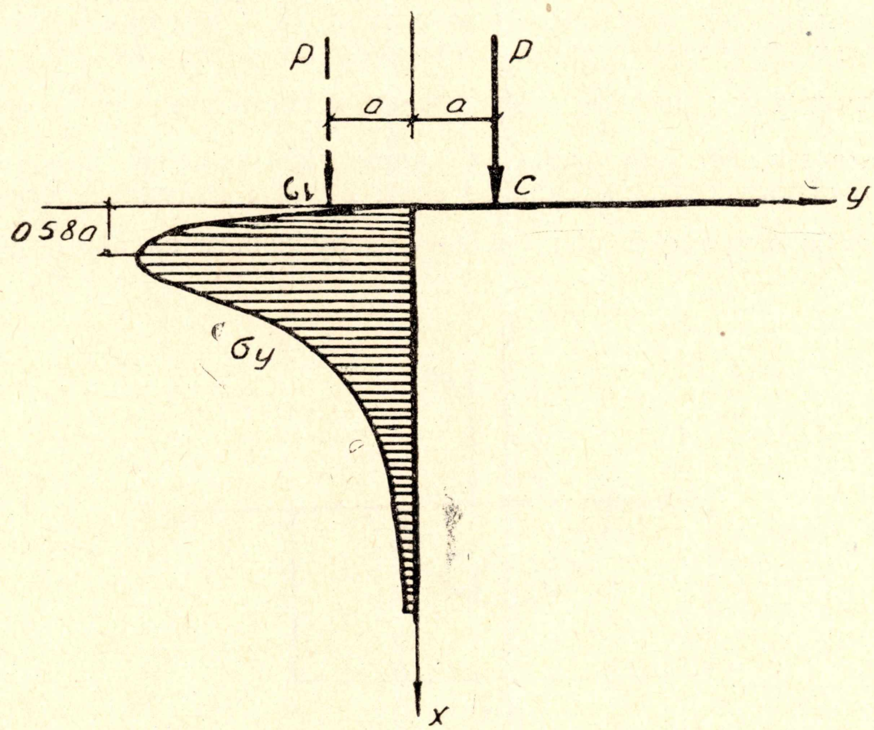

Рис. 1.

$$\sigma_y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot L_k^{(\alpha)}(x).$$

Если в качестве веса использовать e^{-x}, то, как известно [5],

$$c_k = \frac{1}{k!\,\Gamma(k+1)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \sigma_y\, L_k^{(0)}(x)\, dx,$$

где $\Gamma(k+1)$ — гамма-функция;

$L_k^{(0)}(x)$ — многочлен Лагерра.

Для сходимости ряда по многочленам Лагерра достаточно [5] потребовать, чтобы функция $|\sigma_y|$ была кусочно-гладкой на $[0, \infty)$ и сходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} |\sigma_y|\, dx.$$

Представляя в виде ряда только часть функции σ_y: $\dfrac{1}{(a^2+x^2)^2}$, можно показать выполнимость перечисленных требований сходимости. Окончательно

$$\sigma_y = \frac{4Pa^2}{\pi}\, x \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k^{(0)}(x). \tag{2}$$

Представление функции (1) в виде ряда (2) не дает возможности определить горизонтальное давление на границе ограниченной полуплоскости (клина) при

$$a = 0 \quad \text{и} \quad x = 0.$$

Используя принцип Сен-Венана, силу $2P$ заменим статически эквивалентным распределенным давлением по малой полуокружности. Это позволяет получить [3] горизонтальные составляющие $\frac{2P}{\pi}$ (рис. 2).

Следовательно, при малых a напряжения в клине можно определить, складывая напряжения от силы $2P$ для полуплоскости с напряжениями в прямоугольном клине, нагруженном силой $\frac{2P}{\pi}$ в вершине.

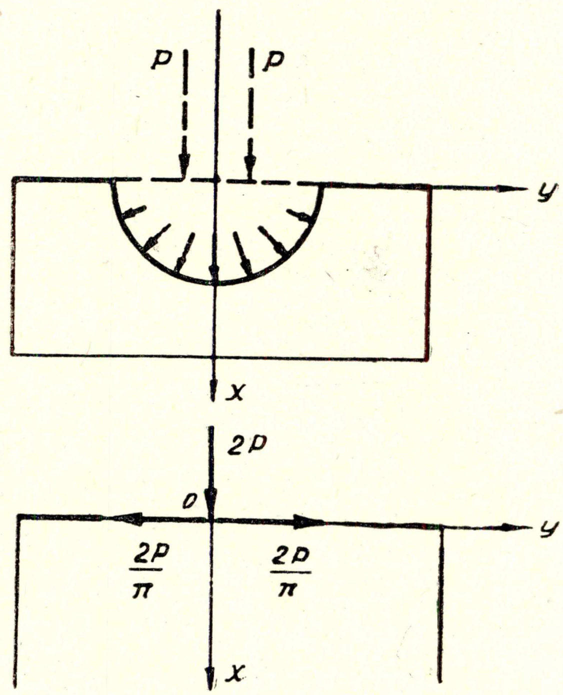

Рис. 2.

Нетрудно убедиться, что напряжения в клине от нагрузки, задаваемой формулой (1), можно определить, применив для этого общее решение плоской задачи в полярных координатах, разложение (2) и известные граничные условия. Последние служат для вычисления постоянных общего решения.

Суммируя напряжения для полуплоскости от двух сил P с напряжениями для прямоугольного клина от распределенной нагрузки (1), получаем напряжения в прямоугольном бесконечном клине от нормальной силы.

Добавим, что при вычислении коэффициентов целесообразно пользоваться таблицами [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1937.
4. Грамель К. Б., Р. Бицено. Техническая динамика. М., 1950.
5. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений. т. 1, Физматгиз, 1959.
6. Айзенштат В. С., Крылов В. И., Метельский А. С. Таблицы для численного преобразования Лапласа и вычисления интегралов вида $\int_0^\infty x^s e^{-x} f(x)dx$ Издательство АН БССР, Минск, 1962.