

## АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ КАК АРТИНОВЫ ИЛИ НЕТЕРОВЫ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ. Ч. 3

П.А. Крылов\*, Е.И. Подберезина

\*Томский государственный университет  
Томский политехнический университет  
E-mail: hggh45de@mail2000.ru

Описаны абелевы группы  $A$  и  $B$  такие, что группа гомоморфизмов  $\text{Hom}(A, B)$  является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы  $B$ . Описание групп  $A$  и  $B$ , для которых группа  $\text{Hom}(A, B)$  является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы  $A$ , сведена к случаю, когда группа  $A$  не имеет кручения, а группа  $B$  – либо квазициклическая группа, либо делимая группа без кручения. Охарактеризованы абелевы группы  $A$  и  $B$ , для которых группа  $\text{Hom}(A, B)$  есть нётеров модуль над кольцом  $E(A)$  или  $E(B)$ . Исследование произвольной абелевой группы с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов сведено к исследованию группы без кручения с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов. Исследование группы с нётеровым справа кольцом эндоморфизмов осталось незавершённым. Описаны сепарабельные абелевы группы без кручения с нётеровыми слева или справа кольцами эндоморфизмов.

Проблема описания групп  $A$  и  $B$  таких, что  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров, в определённом смысле сведена к случаям циклической группы  $A$  простого порядка и групп  $A$  и  $B$  без кручения (теорема 5 [1. С. 69]).

**Предложение 9.** Если  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров, то

$$\bar{A} = H \oplus \sum_n^{\oplus} Q \oplus \sum_{j=1}^m \oplus Z(p_j^{\infty}) \oplus G,$$

где  $H$  – конечная группа,  $G$  – редуцированная группа без кручения,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$S = C \oplus \sum_{\eta}^{\oplus} Q \oplus \sum_{i=1}^k \oplus \sum_{\eta_i}^{\oplus} Z(p_j^{\infty}) \oplus G',$$

где  $C$  – ограниченная,  $G'$  – редуцированная группа без кручения,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\eta, \eta_i$  – некоторые кардиналы.

Отметим большое значение следствия 27.3 из [2] для доказательства этого предложения. Из предложения 9 вытекает, что нётеровость изучаемого модуля эквивалентна нётеровости следующих четырёх  $E(B)$ -модулей:  $\text{Hom}(H, B)$ ,  $\text{Hom}(Z(p^{\infty}), B)$ ,  $\text{Hom}(G, B)$ ,  $\text{Hom}(Q, B)$ , где  $H$  – конечная группа,  $G$  – редуцированная группа без кручения.

Предложения 10, 11 дают ответ на вопрос: когда  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(Q, B)$  нётеров?

**Предложение 10.** Пусть  $\Sigma^{\oplus} Z(p^{\infty})$  – делимая  $p$ -компонента группы  $B$ . Тогда  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(Q, \Sigma^{\oplus} Z(p^{\infty}))$  не нётеров.

**Предложение 11.** Допустим, что группа  $B$  не содержит квазициклических групп. Тогда  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(Q, \Sigma^{\oplus} Z(p^{\infty}))$  нётеров.

В предложении 12 установлена нётеровость  $E(B)$ -модуля  $\text{Hom}(Z(p^{\infty}), B)$ .

**Предложение 12.** Пусть  $\Sigma^{\oplus} Z(p^{\infty})$  – делимая часть  $p$ -компоненты группы  $B$ . Тогда  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(Z(p^{\infty}), \Sigma^{\oplus} Z(p^{\infty}))$  нётеров.

Интересно доказательство этого предложения: построена убывающая цепочка его подмодулей и доказано, что других собственных подмодулей у этого модуля нет.

Что касается  $E(B)$ -модуля  $\text{Hom}(H, B)$ , то его нётеровость, понятно, равносильна нётеровости  $E(B)$ -модулей вида  $\text{Hom}(Z(p^k), B)$  для чисел  $p$ , относящихся к группе  $H$  (напомним, что  $H$  – конечная группа). Нётеровость же  $E(B)$ -модулей такого вида равносильна нётеровости  $E(B)$ -модуля  $\text{Hom}(Z(p), B)$  согласно предложению 13.

**Предложение 13.**  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(Z(p^k), B)$  нётеров тогда и только тогда, когда нётеров модуль  $\text{Hom}(Z(p), B)$ .

Известно, что справедлив канонический изоморфизм  $E(B)$ -модулей:

$$\text{Hom}(Z(p), B) \cong B[p].$$

Следовательно, в связи с изучением  $E(B)$ -модуля  $\text{Hom}(Z(p), B)$  возникает задача о нётеровости нижнего слоя  $B[p]$  как  $E(B)$ -модуля. Иными словами, когда всякая возрастающая цепь вполне характери-

стических подгрупп группы  $B$ , лежащих в  $B[p]$ , стабилизируется?

**Предложение 14.** Пусть  $D_p$  – делимая  $p$ -компонента группы  $B$ ,  $G$  – редуцированная группа без кручения.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(G, D_p)$  не нётеров.

Этот факт используется при изучении смешанной группы с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов.

Теорема 5 является основным результатом исследования групп  $A$  и  $B$  таких, что  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров.

**Теорема 5.** Пусть  $A$  и  $B$  – группы.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров тогда и только тогда, когда

$$\bar{A} = H \oplus \sum_n^{\oplus} Q \oplus \sum_{j=1}^m \oplus Z(p_j^\infty) \oplus G,$$

где  $H$  – конечная группа,  $G$  – редуцированная группа без кручения,  $n, m \in N$ ,

$$S = C \oplus \sum_\eta^{\oplus} Q \oplus \sum_{i=1}^k \oplus D_{p_i} \oplus G',$$

где  $C$  – ограниченная группа,  $D_{p_i}$  – делимая  $p_i$ -компонента группы  $S$ ,  $G'$  – редуцированная группа без кручения,  $k \in N$ ,  $\eta$  – некоторый кардинал; для любого  $p$ , относящегося к группе  $H$ ,  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(Z(p), B)$  нётеров, причём:

а) если  $k \neq 0$ , то

$$\bar{A} = H \oplus \sum_{j=1}^m \oplus Z(p_j^\infty), \quad S = C \oplus \sum_{i=1}^k \oplus D_{p_i};$$

б) если  $k = 0$ , но  $\eta \neq 0$ , то

$$\bar{A} = H \oplus \sum_n^{\oplus} Q \oplus G, \quad S = C \oplus \sum_\eta^{\oplus} Q \oplus G',$$

где  $r(G) < \infty$  и  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(G, S/M)$  нётеров, где  $M = C \oplus \sum_\eta^{\oplus} Q$ ;

в) если  $k = \eta = 0$ , то

$$\bar{A} = H \oplus G, \quad S = C \oplus G',$$

для любого  $p$ , относящегося к группе  $S$ ,  $r_p(G) < \infty$  и  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(G, S/C)$  нётеров.

Основная идея её доказательства та же, что и теоремы 3: построение индуцированных точных последовательностей  $E(B)$ -модулей. Доказательство необходимости теоремы 5 также опирается на предложения 9, 13. Если обе группы  $A$  и  $B$  не имеют кручения, то в вопросе о нётеровости  $E(B)$ -модуля  $\text{Hom}(A, B)$  можно лишь надеяться на некоторые частичные результаты.

Приведём некоторые следствия теоремы 5.

**Следствие 14.** Пусть  $A$  и  $B$  – периодические группы.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров тогда и только тогда, когда

$$\bar{A} = H \oplus \sum_{j=1}^m \oplus Z(p_j^\infty), \quad S = C \oplus \sum_{i=1}^k \oplus D_{p_i},$$

где  $m, k \in N$ ,  $H$  – конечная группа,  $C$  – ограниченная группа,  $D_{p_i}$  – делимая  $p_i$ -компонента группы  $S$ , для любого  $p$ , относящегося к группе  $H$ ,  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(Z(p), B)$  нётеров.

**Следствие 15.** Пусть  $A$  и  $B$  – делимые группы.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров тогда и только тогда, когда группы  $\bar{A}$  и  $S$  либо обе периодические, либо обе не имеют кручения, причём:

в первом случае

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^m \oplus Z(p_j^\infty), \quad S = \sum_{i=1}^k \oplus D_{p_i};$$

во втором случае

$$\bar{A} = \sum_n^{\oplus} Q, \quad S = \sum_\eta^{\oplus} Q,$$

где  $m, n, k \in N$ ,  $\eta$  – некоторый кардинал.

Следующие три следствия вытекают из предложения 14 и теоремы 5.

**Следствие 16.** Пусть  $A$  – редуцированная группа без кручения,  $B$  – периодическая группа.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  есть ограниченная группа и для любого  $p$ , относящегося к группе  $A$ ,  $r_p(A) < \infty$ .

**Следствие 17.** Пусть  $A$  – редуцированная группа без кручения,  $B$  – делимая группа.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  не имеет кручения и  $r(A) < \infty$ .

**Следствие 18.** Пусть  $A$  – редуцированная группа без кручения, а группа  $B$  такова, что её часть без кручения является делимой группой.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  равен прямой сумме ограниченной группы и делимой группы без кручения, причём: а) если след  $S$  содержит хотя бы одну группу  $Q$ , то  $r(A) < \infty$ ; б) если след  $S$  – ограниченная группа, то для любого  $p$ , относящегося к группе  $S$ ,  $r_p(A) < \infty$ .

Из теорем 3 и 5 можно вывести условия, при которых  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  артинов и нётеров одновременно.

**Следствие 19.** Пусть  $A$  и  $B$  – периодические группы.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  есть ограниченная группа, причём для любого  $p$ , относящегося к группе  $S$ , редуцированная  $p$ -компонента группы  $B$  ограничена. Группа  $\bar{A}$  является конечной и для любого  $p$ , относящегося к группе  $\bar{A}$ ,  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(Z(p), B)$  нётеров.

**Следствие 20.** Пусть  $A$  и  $B$  – делимые группы.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  артинов и нётеров тогда и только тогда, когда группы  $\bar{A}$  и  $S$  не имеют кручения, причём ранг группы  $\bar{A}$  конечен.

**Следствие 21.** Пусть  $A$  – редуцированная группа без кручения,  $B$  – периодическая группа.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  является ограниченной группой; для любого  $p$ , относящегося к группе  $S$ , редуцированная  $p$ -компонента группы  $B$  ограничена и для любого  $p$ , относящегося к группе  $S$ ,  $r_p(A) < \infty$ .

**Следствие 22.** Пусть  $A$  – редуцированная группа без кручения,  $B$  – делимая группа.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  не имеет кручения и ранг группы  $A$  конечен.

**Следствие 23.** Пусть  $A$  – редуцированная группа без кручения, а группа  $B$  такова, что её часть без кручения является делимой группой.  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  равен прямой сумме ограниченной группы и делимой группы без кручения; для любого  $p$ , относящегося к группе  $S$ , редуцированная  $p$ -компонента группы  $B$  ограничена, причём: а) если след  $S$  содержит хотя бы одну группу  $Q$ , то  $r(A) < \infty$ , б) если след  $S$  является ограниченной группой, то для любого  $p$ , относящегося к группе  $S$ ,  $r_p(A) < \infty$ .

Описание групп  $A$  и  $B$ , таких, что  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров, сведено к случаям группы  $A$  с неограниченной  $p$ -компонентой хотя бы для одного  $p$ , относящегося к следу группы  $A$  в группе  $B$  и групп без кручения  $A$  и  $B$  (теорема 49 [3. С. 69]).

**Теорема 6.** Пусть  $A$  и  $B$  – некоторые группы и пусть редуцированная  $p$ -компонента группы  $A$  ограничена для любого  $p$ , относящегося к следу  $S$  группы  $A$  в группе  $B$ .  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров тогда и только тогда, когда

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^n \oplus D_{p_i} \oplus \sum_{\eta} \oplus Q \oplus C \oplus G,$$

$$S = \sum_{j=1}^n \oplus Z(p_j^{\infty}) \oplus \sum_m \oplus Q \oplus H \oplus G',$$

где  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\eta$  – некоторый кардинал,  $D_{p_i}$  – делимая  $p_i$ -компонента группы  $A$ ,  $C$  – ограниченная группа,  $H$  – конечная группа,  $G$  и  $G'$  – редуцированные группы без кручения, причём:

а) если  $n \neq 0$ , то

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^n \oplus D_{p_i} \oplus C \oplus G,$$

$$S = \sum_{j=1}^n \oplus Z(p_j^{\infty}) \oplus \sum_m \oplus Q \oplus H \oplus G',$$

и  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(\bar{A}/M, S)$ , где  $M = \sum_{i=1}^n \oplus D_{p_i} \oplus C$ , нётеров;

б) если  $n = 0$ , но  $m \neq 0$ , то

$$\bar{A} = \sum_{\eta} \oplus Q \oplus C \oplus G,$$

$$S = \sum_m \oplus Q \oplus H \oplus G',$$

и  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(\bar{A}/L, S)$ , где  $L = \sum_{\eta} \oplus Q \oplus C$ , нётеров;

в) если  $n = m = 0$ , или

$$S = H \oplus G',$$

$$\bar{A} = C \oplus G$$

и  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(\bar{A}/C, S)$  нётеров.

Доказательство теоремы 6, которая относится к основным результатам работы, опирается на построение индуцированных точных последовательностей  $E(A)$ -модулей, теорему 1 и следующие предложения.

**Предложение 15.** Пусть  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров. Тогда группа  $S$  есть прямая сумма конечного числа слагаемых:

$$S = \sum_{j=1}^n \oplus Z(p_j^{\infty}) \oplus \sum_m \oplus Q \oplus H \oplus G',$$

где  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $H$  – конечная группа,  $G'$  – редуцированная группа без кручения.

Предложение 15 даёт информацию о строении следа группы  $A$  в группе  $B$  для нётерова  $E(A)$ -модуля  $\text{Hom}(A, B)$ . Подчеркнём значительную роль следствия 27.3 из книги [2] в его доказательстве. Из предложения 15 (если учесть вид некоторых подмодулей  $E(A)$ -модуля  $\text{Hom}(A, B)$ ) вытекает, что нётеровость  $E(A)$ -модуля  $\text{Hom}(A, B)$  равносильна нётеровости следующих его подмодулей:  $\text{Hom}(A, Z(p^k))$ ,  $\text{Hom}(A, Q)$ ,  $\text{Hom}(A, Z(p^{\infty}))$ ,  $\text{Hom}(A, G')$ , где  $G'$  – редуцированная группа без кручения. Кроме того, зная строение следа группы  $A$  в группе  $B$ , легко сделать вывод о строении коследа группы  $B$  в группе  $A$ .

**Предложение 16.** Пусть  $D_p$  – делимая  $p$ -компонента группы  $A$ .  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(D_p, Z(p^{\infty}))$  нётеров.

Интересна идея доказательства предложения 16: выписана убывающая последовательность подмодулей  $E(A)$ -модуля  $\text{Hom}(D_p, Z(p^{\infty}))$ , существованием которой ранее была обоснована неартиновость этого модуля, и показано, что других собственных подмодулей у этого модуля нет.

**Предложение 17.** Пусть  $V = \sum_{\eta} \oplus Q$ , где  $\eta$  – некоторый кардинал.  $E(V)$ -модуль  $\text{Hom}(V, Z(p^{\infty}))$  не нётеров и не артинов.

**Предложение 18.** Пусть след  $S$  группы  $A$  в группе  $B$  содержит хотя бы одну квазициклическую группу,  $\sum_{\eta} \oplus Q$  – делимая часть без кручения группы  $A$ ,  $\eta$  – некоторый кардинал,  $D_p$  – делимая  $p$ -компонента группы  $A$  и  $D = D_p \oplus \sum_{\eta} \oplus Q$ .  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(D, Z(p^{\infty}))$  не нётеров и не артинов.

**Предложение 19.** Пусть  $D$  – делимая часть группы  $A$ ,  $D_p$  – периодическая часть группы  $D$ , то есть  $D = D_p \oplus \sum_{\eta} \oplus Q$  для некоторого кардинала  $\eta$ .  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(D, Q)$  нётеров и артинов.

Приведём следствие теоремы 6.

**Следствие 24.** Пусть  $A$  и  $B$  – делимые группы.  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  группы  $A$  в группе  $B$  является делимой группой конечного ранга, причём:

а) если след  $S$  содержит квазициклическую группу, то  $\bar{A}$  является периодической группой с конечным числом  $p$ -компонент;

б) если след  $S$  не содержит квазициклическую группу, то  $\bar{A}$  есть группа без кручения.

**Следствие 25.** Пусть  $A$  и  $B$  – периодические группы и пусть редуцированная  $p$ -компонента группы  $A$  ограничена для любого  $p$ , относящегося к следу  $S$ .  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  равен прямой сумме конечной группы и делимой периодической группы конечного ранга, а  $\bar{A}$  есть прямая сумма ограниченной группы и делимой периодической группы с конечным числом  $p$ -компонент.

Из теоремы 6 и следствия 15 вытекает следствие.

**Следствие 26.** Пусть  $A$  и  $B$  – делимые группы. Группа  $\text{Hom}(A, B)$  является нётеровым  $E(A)$ -модулем и нётеровым  $E(B)$ -модулем тогда и только тогда, когда группы  $A$  и  $B$  имеют конечный ранг, причём либо они обе периодические, либо обе без кручения.

Следующее следствие вытекает из теоремы 6 и следствия 14.

**Следствие 27.** Пусть  $A$  и  $B$  – периодические группы и редуцированная  $p$ -компонента группы  $A$  ограничена для любого  $p$ , относящегося к следу  $S$ . Группа  $\text{Hom}(A, B)$  является нётеровым  $E(A)$ -модулем и одновременно нётеровым  $E(B)$ -модулем тогда и только тогда, когда группы  $A$  и  $S$  равны прямой сумме конечной группы и делимой периодической группы конечного ранга (ранги групп  $A$  и  $S$  конечны, но совпадать не обязаны) и для любого  $p$ , относящегося к редуцированной части группы  $A$ , нётеровым является  $E(B)$ -модуль  $\text{Hom}(Z(p), B)$ .

Приведём следствия теорем 6 и 4.

**Следствие 28.** Пусть  $A$  и  $B$  – делимые группы.  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  артинов и нётеров тогда и только тогда, когда группы  $A$  и  $B$  не имеют кручения и ранг группы  $B$  конечен.

**Следствие 29.** Пусть  $A$  и  $B$  – периодические группы.  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  артинов и нётеров тогда и только тогда, когда след  $S$  равен прямой сумме конечной группы и делимой периодической группы конечного ранга, группа  $A$  является ограниченной и для любого  $p$ , относящегося к группе  $B$ , редуцированная  $p$ -компонента группы  $A$  ограничена.

**Следствие 30.** Пусть группы  $A$  и  $B$  таковы, что их части без кручения являются делимыми группами.  $E(A)$ -модуль  $\text{Hom}(A, B)$  артинов и нётеров тогда и только тогда, когда для любого  $p$ , относящегося к группе  $B$ , редуцированная  $p$ -компонента группы  $A$  ограничена; след  $S$  равен прямой сумме конечной группы и делимой группы конечного ранга, причём:

- а) если группа  $S$  содержит квазициклическую группу, то она является периодической, а группа  $A$  является ограниченной;
- б) если группа  $S$  не содержит квазициклическую группу, но содержит конечное число копий группы  $Q$ , то она равна прямой сумме конечной группы и делимой группы без кручения конечного ранга, а группа  $A$  есть прямая сумма ограниченной группы и делимой группы без кручения;
- в) если же след  $S$  есть конечная группа, то группа  $A$  является ограниченной.

Известно строение произвольных абелевых групп с артиновыми кольцами эндоморфизмов. Кольцо эндоморфизмов  $E(A)$  группы  $A$  артиново слева (или справа) тогда и только тогда, когда  $A = B \oplus D$ , где  $B$  – конечная группа,  $D$  – делимая группа без кручения конечного ранга (теорема

111.3 из [4]). Описаны также периодические абелевы группы с нётеровыми справа (или слева) кольцами эндоморфизмов. Кольцо  $E(A)$  периодической группы  $A$  нётерово справа (или слева) тогда и только тогда, когда  $A$  – прямая сумма конечного числа коциклических групп (предложение 111.4 из [4]). Напомним, что коциклическая группа – это или циклическая  $p$ -группа, или квазициклическая группа. В противоположность условию минимальности условие максимальной, наложенное на кольцо эндоморфизмов, не слишком ограничивает групповую структуру.

**Лемма 6.** Пусть  $A$  – смешанная абелева группа с нётеровым кольцом эндоморфизмов. Тогда  $A = T \oplus G$ , где  $T$  – прямая сумма конечного числа коциклических групп,  $G$  – группа без кручения.

Из этой леммы вытекает, что если кольцо эндоморфизмов смешанной группы  $A$  нётерово, то его можно представить кольцом матриц:

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(T) & \text{Hom}(G, T) \\ 0 & E(G) \end{pmatrix},$$

где  $G$  и  $T$  – такие группы, как в лемме 6. Согласно упр. 6 [5. С. 165] такое кольцо матриц нётерово слева (соответственно справа) тогда и только тогда, когда кольца  $E(T)$  и  $E(G)$  нётеровы слева (соответственно справа) и  $E(T)$ -модуль  $\text{Hom}(G, T)$  нётеров (соответственно  $E(G)$ -модуль  $\text{Hom}(G, T)$  нётеров).

Таким образом, изучение группы  $A$  с нётеровым кольцом эндоморфизмов  $E(A)$  тесно связано с изучением нётерова модуля  $\text{Hom}(G, T)$  над кольцами эндоморфизмов групп  $G$  и  $T$ , где группы  $G$  и  $T$  такие, как в лемме 6.

Исследование произвольных абелевых групп с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов удалось полностью свести к исследованию групп без кручения с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов [6].

**Предложение 20.** Пусть  $G$  – группа без кручения,  $T$  – прямая сумма конечного числа коциклических групп.  $E(T)$ -модуль  $\text{Hom}(G, T)$  нётеров тогда и только тогда, когда  $T$  – редуцированная группа и для любого  $p$ , относящегося к  $T$ ,  $r_p(G)$  конечен.

**Теорема 7.** Пусть  $A$  – смешанная группа. Кольцо  $E(A)$  нётерово слева тогда и только тогда, когда  $A = T \oplus G$ , где  $T$  – конечная группа,  $G$  – группа без кручения такая, что кольцо  $E(G)$  нётерово слева и для любого  $p$ , относящегося к  $T$ ,  $r_p(G)$  конечен.

Исследование смешанных групп с нётеровыми справа кольцами эндоморфизмов осталось незавершённым; свести их изучение к изучению групп без кручения с нётеровыми справа кольцами эндоморфизмов не удалось. Это связано с тем, что не удалось в общем случае ответить на вопрос о нётеровости правого  $E(G)$ -модуля  $\text{Hom}(G, T)$ , где  $G$  – редуцированная группа без кручения,  $T$  – прямая сумма конечного числа коциклических групп. Ответ получен при некоторых ограничениях на группу  $G$  ([6]).

**Предложение 21.** Пусть  $G$  – группа без кручения,  $p$  – простое число,  $D$  – делимая  $p$ -группа. Если  $G$  – либо не  $p$ -делимая группа, либо  $G$  –  $p$ -делимая группа и кольцо  $E(G)$  счётно, то  $E(G)$ -модуль  $\text{Hom}(G, D)$  не является нётеровым.

**Предложение 22.** Пусть  $G$  – группа без кручения,  $T$  – конечная группа. Если  $r_p(G)$  конечен для каждого  $p$ , относящегося к группе  $T$ , то  $E(G)$ -модуль  $\text{Hom}(G, T)$  нётеров.

Предложения 21 и 22 позволяют сделать некоторые выводы о строении смешанных групп с нётеровыми справа кольцами эндоморфизмов.

**Следствие 31.** Пусть группа  $A = T \oplus G$ , где  $G$  – группа без кручения с нётеровым справа кольцом  $E(G)$ ,  $T$  – конечная группа, причём  $r_p(G)$  конечен для всякого  $p$ , относящегося к группе  $T$ . Тогда кольцо  $E(A)$  нётерово справа.

**Следствие 32.** Пусть группа  $A = T \oplus G$ , где  $G$  – группа без кручения со счётным кольцом  $E(G)$  (например, группа  $G$  имеет конечный ранг),  $T$  – прямая сумма конечного числа коциклических групп. Если кольцо  $E(A)$  нётерово справа, то  $T$  – редуцированная группа (или, что здесь равносильно,  $T$  – конечная группа).

**Следствие 33.** Пусть  $A$  – смешанная группа конечного ранга без кручения. Кольцо  $E(A)$  нётерово справа в том и только в том случае, когда  $A = T \oplus G$ , где  $G$  – группа без кручения конечного ранга с нётеровым справа кольцом  $E(G)$ ,  $T$  – конечная группа.

Напомним, что группа без кручения  $A$  называется сепарабельной, если каждое конечное подмножество элементов из  $A$  содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы  $A$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подберезина Е.И. Группа  $\text{Hom}(A, B)$  как нётеров модуль над кольцом эндоморфизмов группы  $B$  // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. – Вып. 15. – С. 190–199.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.
3. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Группа  $\text{Hom}(A, B)$  как нётеров модуль над кольцом эндоморфизмов группы  $B$  // Исследования по математическому анализу и алгебре / Под ред. член-корр. РАО, проф. И.А. Александрова, проф. П.А. Крылова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. – С. 63–76.

Получено исчерпывающее описание сепарабельных абелевых групп без кручения с нётеровыми слева или справа кольцами эндоморфизмов [7].

**Теорема 8.** Кольцо эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения  $G$  нётерово справа тогда и только тогда, когда  $G$  является вполне разложимой группой конечного ранга и типы её однородных компонент попарно несравнимы.

**Теорема 9.** Пусть  $G$  – сепарабельная группа без кручения. Кольцо  $E(G)$  нётерово слева тогда и только тогда, когда группа  $G$  является вполне разложимой группой конечного ранга и типы её различных однородных компонент или несравнимы, или сравнимы за счёт бесконечностей.

Это описание существенно опирается на исследование группы  $\text{Hom}(A, B)$ , где  $A$  и  $B$  – группы без кручения ранга 1, как нётерова  $E(B)$ -модуля или  $E(A)$ -модуля.

Приведём следствия теорем 8 и 9.

**Следствие 34.** Кольцо эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения конечного ранга, типы всех прямых слагаемых ранга 1 которой идемпотентны, нётерово слева.

**Следствие 35.** Если кольцо эндоморфизмов сепарабельной группы без кручения нётерово справа, то оно нётерово слева.

Из теоремы 8 и следствия 34 вытекает хорошо известный факт, что кольцо эндоморфизмов группы  $Z \oplus Q$ , изоморфное кольцу матриц

$$\begin{pmatrix} Z & 0 \\ Q & Q \end{pmatrix},$$

нётерово слева, но не нётерово справа. То же верно для групп  $Q_p \oplus Q$ ,  $Z \oplus Q_p$ .

4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
5. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
6. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Строение смешанных абелевых групп с нётеровыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1994. – Вып. 11–12. – С. 121–129.
7. Подберезина Е.И. Строение сепарабельных абелевых групп без кручения с нётеровыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. – Вып. 9. – С. 77–83.