

ПРОГРАММА МУЛЬТИПОЛЬНОГО АНАЛИЗА

Г. М. РАДУЦКИЙ, Н. И. САБЛИН, Б. М. ШУМИЛОВ

(Представлена семинаром лаборатории высоких энергий НИИ ЯФЭА)

Проблема состоит в определении амплитуд мультиполя в изотопических частях при π -фоторождении, что реализуется подгонкой экспериментальных данных некоторой теоретической функцией, в которую 8 неизвестных амплитуд входят в качестве варьируемых параметров:

$$M = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma_{\perp}^s(\theta_i) - \sigma_{\perp}(\theta_i)}{\Delta \sigma_{\perp}(\theta_i)} \right)^2 + \sum_{i=2}^{N-1} \left(\frac{H^s(\theta_i) - H(\theta_i)}{\Delta H(\theta_i)} \right)^2,$$

где $i = \overline{1, N}$ — означает набор углов от 0° до 180° .

$\sigma_{\perp}(\theta_i) = \frac{d\sigma_{\perp}(\theta_i)H(\theta_i)}{a \Omega}$ — функции варьируемых параметров.

Минимизация функционала M производится с помощью метода линейаризации [1], реализованного в ОИЯИ в виде стандартной программы СП-123 [2].

Начальные значения параметров брались из расчета БДВ, дающего реальные части 8 амплитуд мультиполя; мнимые части определялись умножением реальных частей на tg соответствующих фаз, фазы нами были взяты из расчета [3].

Программа составлена для анализа как π^+ -фоторождения, так и π^0 -фоторождения. Однако расчеты были проведены только для реакции π^+ -фоторождения, так как к настоящему моменту по π^0 -фоторождению имеется еще недостаточно экспериментальной информации, что не позволяет путем расчета изъять из этой информации с необходимой достоверностью нужные параметры.

В арифметической части программы, алгоритмическая часть которой описана ниже, рассчитываются функции $\sigma_{\perp}(\Theta)$, $H(\Theta)$ и их производные по амплитудам мультиполя.

В п. 1 представлены зависимости $\sigma_{\perp}$ и H от амплитуд фотообразования F_i . В п. 2 дано разложение F_i в амплитуды мультиполя вплоть до состояния с $I^p = (3/2)^+$, включая вклад высших угловых состояний в приближении Борна. В п. 3 и п. 4 даны все необходимые соотношения для расчета борновских амплитуд и амплитуд мультиполя в приближении Борна $M_{i\pm}^B$ и $E_{i\pm}^B$. В п. 5 и п. 6 даны разложения амплитуд F_i и $M_{i\pm}$ для реакций $\gamma p \rightarrow \pi N$ в функции амплитуд с определенным состоянием изоспина и соотношения, выражающие связь реальной и мнимой час-

тей амплитуд. При этом используются амплитуды мультиполя по Ф. Берендсу и др. [3]. Блок-схема программы арифметики представлена на рис. 1.

1. Из общего выражения амплитуды фотообразования [4]

$$F = iF_1 \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon} + F_2 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon})}{qk} + iF_3 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{q} \cdot \vec{\varepsilon})}{qk} + iF_4 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{q} \cdot \vec{\varepsilon})}{q^2}$$

извлекаются сечение

$$\frac{k}{q} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}(\theta, E_{\gamma}) = |F_1|^2 + |F_2|^2 - 2 \operatorname{Re} F_1^* F_2 \cos \theta \quad (1.1)$$

и функция $H(\zeta)$ [5]:

$$H(\zeta) = [|F_3|^2 + |F_4|^2 + 2 \operatorname{Re} (F_2^* F_3 + F_1^* F_4 + F_3^* F_4 \cos \theta)] \zeta - 2 \left(\frac{M}{W} \right)^2 \beta^2 e^2 f^2 \left[1 + \left(\frac{q}{k} \right)^2 - 2 \frac{E\pi}{k} \right] \frac{1}{\zeta}.$$

$$\zeta = 1 - \beta \cos \theta$$

2. Каждая из амплитуд F_i разлагается в амплитуды мультиполя — магнитные $M_{l\pm}$ и электрические $E_{l\pm}$. Вклад амплитуд мультиполя с $l \geq 2$ дается в борновском приближении. Тогда F_i можно записать:

$$F_1 = E_0 + 3(E_{1+} + M_{1+}) \cos \theta + \varphi_1; \quad (2.1)$$

$$F_2 = 2M_{1+} + M_{1-} + \varphi_2;$$

$$F_3 = 3(E_{1+} - M_{1+}) + \varphi_3;$$

$$F_4 = \varphi_4,$$

где

$$\varphi_1 = F_1^B - [E_0^B + 3(E_{1+}^B + M_{1+}^B) \cos \theta];$$

$$\varphi_2 = F_2^B - [2M_{1+}^B + M_{1-}^B]; \quad (2.2)$$

$$\varphi_3 = F_3^B - [3(E_{1+}^B - M_{1+}^B)];$$

$$\varphi_4 = F_4^B$$

— общий вклад амплитуд с $l \geq 2$ в борновском приближении, $M_{l\pm}^B$ и $E_{l\pm}^B$ — амплитуды мультиполя, которые находятся как проекции борновских амплитуд F_i^B на состояние определенного углового момента.

$$F^B(s, t) = [C(s)]^{-1} [B(st)] A^B(s, t), \quad (3.1)$$

где $[C]$ и $[B]$ берутся из БДВ;

F_B — столбец с элементами:

$$F_1^B, F_2^B, F_3^B, F_4^B;$$

$$A^B(s, t) = \left[\frac{1}{s - m_N^2} + \frac{[t]}{u - m_N^2} \right] \tau, \quad (3.2)$$

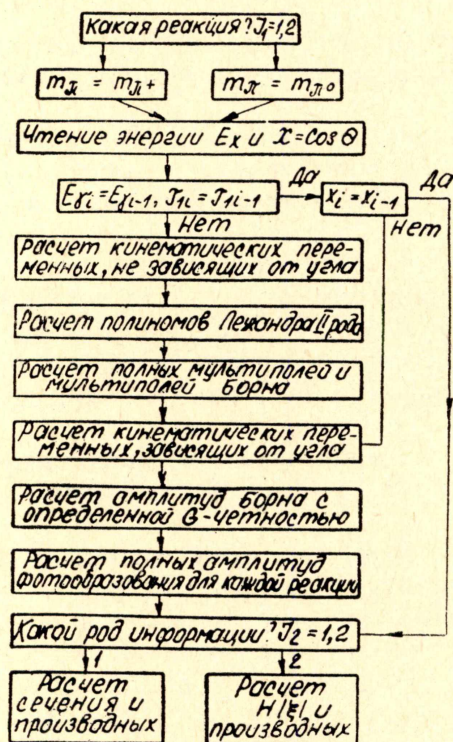


Рис. 1.

и

$$[\xi] = \xi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\xi = +1$ для (0) и (+) изоспиновых амплитуд;
 $\xi = -1$ для (-1) изоспиновых амплитуд;
 τ столбец с элементами

$$\tau_1^{(0,\pm)} = \frac{eg}{2}, \quad \tau_2^{(0,\pm)} = \frac{-eg}{t^2 - m_\pi^2}, \quad (3.3)$$

$$\tau_3^{(\pm)} = \tau_4^{(\pm)} = \frac{-eg}{4m_N} (\mu'_p - \mu'_n), \quad \tau_3^{(0)} = \tau_4^{(0)} = \frac{-eg}{4m_N} (\mu'_p + \mu'_n),$$

$$\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}, \quad \mu'_p = 1,793; \quad \mu'_n = -1,913; \quad \frac{q^2}{4\pi} = 14,4 - \text{константы.}$$

Из кинематики процессов фотообразования следует:

$$\begin{aligned} s &= W^2; \quad t = -2kq(1 - \beta \cos \theta_1) + m_\pi^2; \\ u &= -2kE_2 \left(1 - \frac{q}{E^2} \cos \theta_2 \right) + m_N^2; \quad \beta = \frac{q}{q_0}. \\ E_2 &= \frac{W^2 + m_N^2 - m_\pi^2}{2W}; \quad E_\pi = q_0 = \frac{W^2 - m_N^2 + m_\pi^2}{2W}; \\ E_1 &= \frac{W^2 + m_N^2}{2W}, \end{aligned}$$

где $W = E_\gamma + m_N$ — полная энергия в с. ц. м. (системе центра масс).

$$\begin{aligned} 4. \quad E_{0+}^B &= \frac{Z}{\mu} \left\{ \frac{\xi-1}{2} \left(\mu - \frac{m_N}{W} \right) - \frac{\xi+1}{2} \cdot \frac{m_N}{W} (\mu+1) - \xi(\mu+1) T_{0+}^N + \right. \\ &+ (\xi-1) \left[-\frac{2m_N}{W-m_N} \cdot \frac{q}{m_N+E_2} R_1^\pi \right] - \xi \left(\mu - \frac{2m_N}{W-m_N} \right) \frac{q}{m_N+E_2} R_1^N \Big\}, \quad (4.1) \\ E_{1+}^B &= \frac{1}{2} \frac{Z}{\mu} \left\{ (\xi-1) \left[\frac{2m_N}{W+m_N} R_1^\pi - \frac{2m_N}{W-m_N} \cdot \frac{2q}{m_N+E_2} R_2^\pi \right] - \right. \\ &- \xi(\mu+1) T_{1+}^N - \xi \left(\mu + \frac{2m_N}{W+m_N} \right) R_1^N - \xi \left(\mu - \frac{2m_N}{W-m_N} \right) \frac{2q}{m_N+E_2} R_2^N \Big\}, \\ M_{1+}^B &= \frac{1}{2} \frac{Z}{\mu} \left\{ (1-\xi) \frac{2m_N}{W+m_N} R_1^\pi - \xi(1+\mu) T_{1+}^N + \xi \left(\mu + \frac{2m_N}{W+m_N} \right) R_1^N \right\}, \\ M_{1-}^B &= \frac{Z}{\mu} \left\{ \frac{q}{E_2+m_N} \left[\frac{(\xi-1)}{2} \left(\mu + \frac{m_N}{W} \right) - \frac{\xi+1}{2} \cdot \frac{m_N}{W} (\mu+1) \right] + \right. \\ &+ \xi(\mu+1) T_{1-}^N + (\xi-1) \frac{2m_N}{W+m_N} R_1^\pi - \xi \left(\mu + \frac{2m_N}{W+m_N} \right) R_1^N \Big\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_1^{\pi} &= \frac{1}{3} \left[Q_2 \left(\frac{q_0}{q} \right) - Q_0 \left(\frac{q_0}{q} \right) \right]; \\
 R_1^N &= -\frac{1}{3} \left[Q_2 \left(\frac{E_2}{q} \right) - Q_0 \left(\frac{E_2}{q} \right) \right]; \\
 R_2^{\pi} &= \frac{1}{5} \left[Q_3 \left(\frac{q_0}{q} \right) - Q_1 \left(\frac{q_0}{q} \right) \right]; \\
 R_2^N &= \frac{1}{5} \left[Q_3 \left(\frac{E_2}{q} \right) - Q_1 \left(\frac{E_2}{q} \right) \right]; \\
 T_{1+}^N &= \left[-\frac{m_N}{q} Q_1 \left(\frac{E_2}{q} \right) + \frac{m_N}{E_2 + m_N} Q_2 \left(\frac{E_2}{q} \right) \right]; \\
 T_{0+}^N &= \left[\frac{m_N}{q} Q_0 \left(\frac{E_2}{q} \right) - \frac{m_N}{E_2 + m_N} Q_1 \left(\frac{E_2}{q} \right) \right]; \\
 T_{1-}^N &= \left[-\frac{m_N}{q} Q_1 \left(\frac{E_2}{q} \right) + \frac{m_N}{E_2 + m_N} Q_0 \left(\frac{E_2}{q} \right) \right]; \\
 Z &= \frac{\mu}{4 m_N} \sqrt{\frac{E_2 + m_N}{2 W}} \frac{e q}{4 \pi}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь

$$\mu^{\pm} = \mu'_p - \mu'_n, \quad \mu^0 = \mu'_p + \mu'_n,$$

$Q_l(x)$ — полиномы Лежандра II-го рода.

5. Все выражения для каждого из следующих процессов введены в программу с индексом

$$\begin{aligned}
 \gamma + p &\rightarrow \pi^+ + n, \quad J_1 = 1, \\
 \gamma + p &\rightarrow \pi^0 + p, \quad J_1 = 2.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$F_i(I_1)$ или $M_{e\pm}(J_1)$ раскладываются в функции изоскалярных амплитуд $F_i^{1/2}$, $M_{l\pm}^{1/2}$ и изовекторных $F_i^{3/2}$, $M_{l\pm}^{3/2}$ или в функции амплитуд с известной G -четностью F_i^0 , $F_i^{\pm}(M_{l\pm}^0, M_{l\pm}^{\pm})$. Для амплитуд мультиполя имеем:

$$\begin{aligned}
 M_{l\pm}(1) &= \sqrt{2} \{M_{l\pm}^0 + M_{l\pm}^{-}\} = \frac{\sqrt{2}}{3} [M_{l\pm}^{1/2} - M_{l\pm}^{3/2}]; \\
 M_{l\pm}(2) &= \sqrt{2} \{M_{l\pm}^0 - M_{l\pm}^{-}\} = \frac{1}{3} [M_{l\pm}^{1/2} + 2 M_{l\pm}^{3/2}].
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

6. Мультипольные амплитуды — комплексные величины. Связь между реальной и мнимой частями каждой амплитуды мультиполя дается теоремой Ферми-Ватсона [6].

$$I^m M_{l\pm}^{2T}(W) = \text{Re} M_{l\pm}^{2T}(W) \text{tg } \delta_{2l, 2T}(W),$$

где $\delta_{2l, 2T}(W)$ — фаза процесса рассеяния $\pi N \rightarrow \pi N$,

W — энергия в с. ц. м., одинаковая для фотообразования и рассеяния.

Все выражения производных по параметрам от функций $\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}$ и H введены в программу с индексом:

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}(\cos \theta, E_{\gamma}) - (J_2 = 1) \text{ и } H(\xi) - J_2 = 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Соколов, И. Н. Силин. Нахождение минимумов функционалов методом линеаризации. Препринт ОИЯИ, Д-180, Дубна, 1961.
 2. И. Н. Силин. Метод наименьших квадратов (СП-123). Препринт ОИЯИ, Дубна, 1968.
 3. F. Berends, A. Donnachie and D. L. Weaver, CERN, 64/14615, TN 744 (1967).
 4. G. F. Chew, M. L. Coldberger, F. E. Low, I. Numby, Physical Review, 106, 1345 (1957).
 5. P. Spilantini, V. Valente, M. Nigro, C. Olceri. Nuclear Physics, B 13, 320, (1969).
 6. K. Watson. Physical Review, 95, 228 (1954).
-