

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВСЕХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА n -Й
СТЕПЕНИ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ЭВМ
«МИНСК-1»**

Г. Л. КАЛИНИЧЕНКО, Г. Н. ДРОНОВА
(Представлена отделом вычислительной техники НИИ АЭМ)

Решение уравнений, алгебраических или трансцендентных, представляет собой одну из существенных задач прикладного анализа, потребность в которой возникает в многочисленных и самых разнообразных разделах физики и механики, техники и естествознании в самом широком смысле этого слова.

В вычислительной технике чаще всего возникает необходимость в определении корней многочлена без знания их приближенных значений. Эту задачу можно решить методом скорейшего спуска. Метод скорейшего спуска позволяет определить все корни многочлена n -ой степени с комплексными коэффициентами без задания приближенных значений. Метод скорейшего спуска реализуется на ЭВМ, обеспечивает большую скорость работы и позволяет определить корни с высокой степенью точности, к тому же обладает квадратичной сходимостью.

Задача определения всех корней многочлена эквивалентна задаче определения всех точек абсолютного минимума функции двух переменных $\varphi[u(x, y), v(x, y)]$, где за $F = \varphi(u, v)$

$$\sqrt{u^2 + v^2} \text{ или } |u| + |v|.$$

Последовательные приближения к точкам минимума могут осуществляться по приведенным формулам

$$z_{k+1} = z_k - \mu \frac{P_n(z_k)}{P'_n(z_k)},$$

где μ определяется из неравенства

$$(*) \quad |P_n(z_{k+1})| < |P_n(z_k)|. \quad (1)$$

Число, для которого это неравенство определяется, называется подходящим параметром $|0| < \mu < 1$. Если $P'(z_k)$ мало, то для спуска по поверхности $F(x, y)$ нецелесообразно применять формулу (*), так как подходящий параметр определяется за большое число проб. Если вокруг любой точки z_k описать круг радиуса r_k , то на границе этого круга обязательно найдутся точки, в которых выполняется неравенство (1). Эти точки можно брать за следующие приближения к корню. Радиус круга определяется по формуле

$$r_k = \left[\max \left\{ \left| \frac{nc_n - j}{c_n} \left| \frac{1}{j} \right| \right\}_{j=1}^{j=n} \right]^{-1}. \quad (**)$$

Здесь c_j — коэффициенты разложения многочлена $P_n(z)$ по степеням $(z - z_k)$.

Поиск точки по окружности ищется следующим способом. Вычисляем последовательность чисел

$$z^{(0)}l_k = z_k \dots z_k^{i l h_0}, \text{ где } h_0 = \frac{\pi}{4}; l = 0, 1, \dots, 7$$

$$z^{(j)}l_k = z_k + z_k^{i(2l+1)n_j}; h_j = \frac{h_j - 1}{2} \quad (***)$$

$$l = 0, 1, \dots, 2^{2+j} - 1; j = 1, 2, \dots$$

И за z_{k+1} берется то из них, для которого впервые выполняется неравенство (1).

Таким образом, вычисление осуществляется либо по (*), либо (***). Критерием перехода от одной формулы к другой служит неравенство

$$|P_n(z_k)| \geq \mu R_k |P'_n(z_k)|,$$

$$\text{где } R_k = \sqrt[n]{|P_n(z_k)| \frac{1}{|a_0|}}, \quad \mu = (4 \div 6). \quad (2)$$

Если это неравенство выполняется, то вычисления производят по формуле (***), если не выполняется, то по (*). Метод скорейшего спуска позволяет определять корни многочлена, исходя из произвольного начального приближения z_0 . Однако в целях экономии времени счета за начальное приближение можно взять

$$z_0 = v + i \sqrt[n]{|P_n(v)| \frac{1}{|a_0|}},$$

где $v = -\frac{a_1}{na_0}$. Величина v есть среднее арифметическое всех корней многочлена.

Описание программы

Программа составлена в интерпретирующей системе и рассчитана на многочлен с комплексными коэффициентами степени не больше 20. Под каждый коэффициент отводится две ячейки — одна под действительную, другая под мнимую части. В программе разработаны стандартные подпрограммы умножения и деления комплексных чисел, а также нахождения производной, многочлена от комплексного числа по схеме Горнера, модуля комплексного числа, к которым приходится часто обращаться.

Память машины разбита таким образом:

1. Стандартные подпрограммы занимают вместе с ИС с 1 по 750-ю ячейки.

2. Данные заносятся с 1572-й ячейки.

3. Рабочие ячейки располагаются с 1500—1515 ячейки. Пуск программы с 767-й ячейки.

Начально приближение находится по формуле (3). В зависимости от выполнения условия (1) и (2) следующие приближения ищутся по формулам (*), (***). После того как приближение удовлетворяет заданной точности, мы выделяем это приближение как корень многочлена. Затем понижаем степень многочлена и вычисляем следующий корень многочлена степени $n-1$, если корень действительный, и степени $n-2$, если корень комплексный, и так до тех пор, пока не найдем всех корней многочлена.

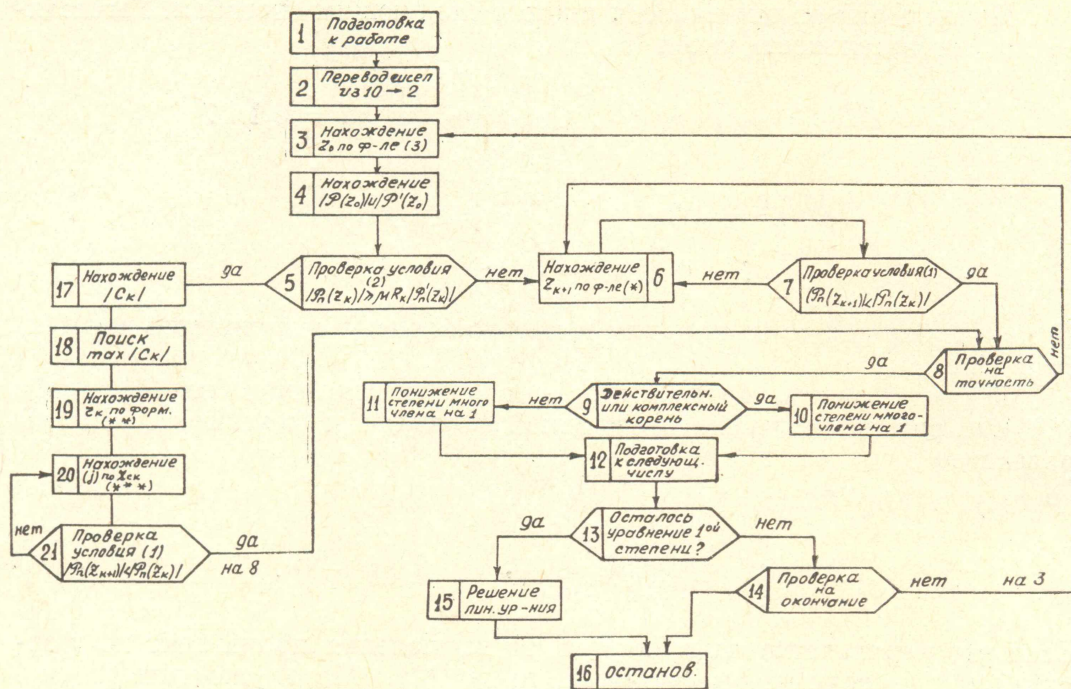


Рис. 1. Блок-схема программы

ЛИТЕРАТУРА

- Б. И. Демидович и И. А. Маров. Основы вычислительной математики. ИФМЛ, Москва, 1963.
- В. В. Воеводин. Численные методы алгебры. ФМЛ, Москва, 1966.
- В. Л. Загускин. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. ФМЛ, Москва, 1960.
- В. Д. Дель, Г. Л. Калинин, В. А. Мальцев. Автоматизация программирования для ЦВМ «Минск-1» методом интерпретирующих систем. Томск, 1969.