ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 118 1963

ОБЩИЙ ВИД СООТНОШЕНИЙ СВЯЗИ ПРИ УРАВНИВАНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЛУЧЕВЫХ СЕТЕЙ И ВЫТЕКАЮЩИЕ ОТСЮДА ЗАДАЧИ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлено научным семинаром кафедр маркшейдерского дела и геодезии)

§ 1. Постановка вопроса

В моей статье [1] были указаны основные виды поверхностных лучевых сетей, рассмотрены их свойства и дан общий способ однозначного построения таких сетей по одной из необходимых совокупностей исходных данных. Дальше встает задача уравнивания поверхностных лучевых сетей, которая возникает в том случае, когда состав исходных данных является расширенным, т. е. превышает необходимый для однозначного построения этих сетей.

Указанная задача уравнивания распадается естественным образом на три следующие ступени.

Подготовительная ступень — составление для лучевой сети некоторых первообразных соотношений связи, которые охватывают или только одни расширенные исходные данные, или же включают, кроме того, также функции этих исходных данных.

Промежуточная ступень — приведение первообразных соотношений связи к плоскостному виду, в итоге чего они переходят в соответствующие начальные уравнения поправок к непосредственно или косвенно наблюденным величинам.

Заключительная ступень — решение составленных выше плоскостных начальных уравнений поправок под каким-нибудь дополнительным требованием в целях получения уравненных данных расширенного состава или для получения их функций.

В настоящей и ряде следующих моих статей все внимание будет сосредоточено на первых двух ступенях уравнивания поверхностных лучевых сетей. При этом будут рассмотрены первообразные соотношения связи и начальные уравнения поправок для всех трех основных способов уравнивания указанных сетей: а) смешанного, б) прямого, в) косвенного.

Нашей целью будет являться:

1) установление важнейших видов первообразных соотношений связи, возникающих в названных трех способах уравнивания поверхностных лучевых сетей;

2) представление этих первообразных соотношений связи, имею-

щих в общем случае сложное строение, более простыми плоскостными начальными уравнениями поправок;

3) разыскание более производительных путей составления начальных уравнений поправок в поверхностных лучевых сетях общего вида.

Для лучшего уяснения всех этих вопросов и выявления их внутренней связи мы рассмотрим в данной установочной статье главнейшие особенности перечисленных способов уравнивания и запишем в общем виде соответствующие соотношения связи — первообразные и производные. В заключение наметим более подробно наши дальнейшие задачи по разработке очерченного здесь круга вопросов.

§ 2. Первообразные соотношения в трех основных способах уравнивания наблюдений

Рассмотрим сущность тех первообразных соотношений связи, которые возникают в трех упомянутых выше основных способах уравнивания наблюдений [2].

Смешанный способ. В смешанном способе уравнивания наблюдений первообразные соотношения связи, числом $м$, включают кроме расширенных исходных данных также s их функций, причем каждое из этих соотношений содержит не менее двух наблюденных величин[1]).

Число $м$ самих первообразных соотношений связи в указанном способе уравнивания всегда меньше числа n входящих в них наблюденных величин. Следовательно, из этих первообразных соотношений нельзя определить каждую отдельно взятую наблюденную величину независимо от остальных наблюденных величин.

Что касается количества s функций, содержащихся в первообразных соотношениях связи при смешанном уравнивании наблюдений, то оно превышает число $м$ первообразных соотношений или же в крайнем случае равно этому числу. Последнее имеет место тогда, когда расширенная совокупность исходных данных в лучевой сети вырождается в необходимую и когда, следовательно, потребность в уравнивании наблюдений отпадает сама собой.

Из сказанного вытекает, что при смешанном уравнивании наблюдений первообразные соотношения связи имеют следующий вид:

$$F_e(\overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2, \ldots, \overline{\nu}_s; \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2, \ldots, \overline{\zeta}_n; \overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2, \ldots, \overline{\chi}_q) = \overline{F}_e = 0 \qquad (1)$$

$$(e = 1, 2, \ldots, м;\ n > м \geqslant s),$$

где $\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2, \ldots, \overline{\zeta}_n$ — уравненные значения наблюденных величин ζ_i, направлений β_i или углов γ_K;

$\overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2, \ldots, \overline{\chi}_q$ — твердые величины;

$\overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2, \ldots, \overline{\nu}_s$ — уравненные значения функций ν_g от наблюденных ζ_i и твердых $\overline{\chi}_\mu$ величин.

Прямой способ. Прямой способ уравнивания наблюдений получается из рассмотренного выше смешанного способа путем его надлежащего преобразования. С этой целью, пользуясь s какими-нибудь равенствами (1), выразим s входящих в них функций $\overline{\nu}_g$ через оставшиеся уравненно- наблюденные $\overline{\zeta}_i$ и твердые χ_μ величины. Мы будем иметь тогда

[1]) Случай, когда каждое смешанное соотношение связи первообразного вида содержит только одну наблюденную величину, должен рассматриваться особо (см. далее „косвенный способ“).

$$\overline{\nu}_g = \varphi_g(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2, \ldots, \overline{\zeta}_n; \overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2, \ldots, \overline{\chi}_q) = \overline{\varphi}_g = 0 \tag{2}$$

$$(g = 1, 2, \ldots, s).$$

Если мы вставим затем найденные значения (2) для s функций $\overline{\nu}_g$ в остальные $м - s = r$ уравнений свода (1), то придем к первообразным соотношениям связи вида

$$\Phi_j(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2, \ldots, \overline{\zeta}_n; \overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2, \ldots \overline{\chi}_q) = \overline{\Phi}_j = 0 \tag{3}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r;\ n > r = м - s),$$

которые содержат только уравнено-наблюденные $\overline{\zeta}_i$ и твердые $\overline{\chi}_\mu$ величины.

Свод первообразных соотношений связи (3) будет искомым. Этот свод служит основой для упомянутого прямого способа уравнивания наблюдений, в котором исправляются непосредственно сами исходные данные расширенного состава, именно — их наблюденная часть.

Косвенный способ. Этот способ уравнивания наблюдений имеет ту особенность, что в нем каждая наблюденная величина ζ_i выражается явно через некоторые известные функции ϑ_h всех исходных данных. Число m указанных функций ϑ_h меньше числа n наблюденных величин ζ_i или, в крайнем случае, равно числу этих величин. Последнее бывает тогда, когда расширенная совокупность исходных данных вырождается в необходимую совокупность.

Из сказанного заключаем, что при косвенном уравнивании наблюдений первообразные соотношения связи будут иметь следующий вид:

$$\overline{\zeta}_i = \Psi_i(\overline{\vartheta}_1, \overline{\vartheta}_2, \ldots, \overline{\vartheta}_m; \overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2, \ldots, \overline{\chi}_q) = \overline{\Psi}_i \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ m \leqslant n),$$

где $\overline{\vartheta}_1, \overline{\vartheta}_2, \ldots, \overline{\vartheta}_m$ суть известные функции уравненных исходных данных, так что

$$\overline{\vartheta}_h = f_h(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2, \ldots \overline{\zeta}_n; \overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2, \ldots, \overline{\chi}_q) = \overline{f}_h \tag{5}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, m;\ m \leqslant n).$$

§ 3 Приведение к конечно-разностному плоскостному виду

Для целей последующего уравнивания наблюдений первообразные соотношения связи (1), (3), (4) должны быть приведены к конечно-разностному плоскостному виду. Это легко может быть сделано, если представить содержащиеся в них уравненные величины $\overline{\zeta}_i$, $\overline{\nu}_g$, $\overline{\vartheta}_h$ следующим образом

$$\overline{\zeta}_i = \zeta_i + \Delta\zeta_i = \zeta_i + v_i \qquad \overline{\nu}_g = \nu_g^{(0)} + \Delta\nu_g^{(0)} = \nu_g^{(0)} + \varepsilon_g \tag{6}$$

$$\overline{\vartheta}_h = \vartheta_h^{(0)} + \Delta\vartheta_h^{(0)} = \vartheta_h^{(0)} + п_h,$$

где

ζ_i, v_i — наблюденные величины и их поправки;

$\nu_g^{(0)}$, $\vartheta_h^{(0)}$ и ε_g, $п_h$ — приближенные (опорные) значения функций ν_g, ϑ_h и их поправки.

Входящие сюда наблюденные величины ζ_i получаются нами достаточно точно из самих наблюдений. Опорные же значения $\nu_g^{(0)}$, $\vartheta_h^{(0)}$ функций ν_g, ϑ_h могут быть найдены с хорошей точностью из соотношений (2) и (5) при замене в них $\overline{\zeta}_i$ на ζ_i. Отсюда следует, что поправки v_i, ε_g, п_h, входящие в (6), имеют всегда малые размеры. Учитывая это существенное обстоятельство, приходим к выводу, что соотношения (1), (3), (4) могут быть представлены вполне надежно следующими, полученными по Тейлору, разложениями

$$\sum_{g=1}^{s} a_{eg}\varepsilon_g + \sum_{i=1}^{n} b_{ei}v_i + w_e = 0 \qquad (e = 1, 2,\ldots,\text{м};\ n > \text{м} \geqslant s) \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji}v_i + \omega_j = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2,\ldots,r \\ n > r = \text{м} - s \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\sum_{h=1}^{m} d_{ih}\text{п}_h - l_i = v_i, \qquad (i = 1, 2,\ldots,n;\ m \leqslant n) \tag{9}$$

или в матричной записи

$$a_{(\text{м}s)}\,\varepsilon_{(s)} + b_{(\text{м}n)}\,v_{(n)} = 0_{(\text{м})} \qquad (n > \text{м} \geqslant s) \tag{7.1}$$

$$c_{(rn)}v_{(n)} + \omega_{(r)} = 0_{(r)} \qquad (r = \text{м} - s < n) \tag{8.1}$$

$$d_{(nm)}\,\text{п}_{(m)} - l_{(n)} = v_{(n)} \qquad (n \geqslant m) \tag{9.1}$$

Коэффициенты и свободные члены полученных нами сводов плоскостных соотношений (7) — (9) определяются, конечно, следующим образом:

$$\begin{cases} a_{eg} = \left(\dfrac{\partial F_e}{\partial \nu_g}\right)_0 \qquad b_{ei} = \left(\dfrac{\partial F_e}{\partial \zeta_i}\right)_0 \\ w_e = F_e\,(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)},\ldots,\nu_s^{(0)};\ \zeta_1, \zeta_2,\ldots,\zeta_n;\ \overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2,\ldots,\overline{\chi}_q) = F_e^{(0)} \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} c_{ji} = \left(\dfrac{\partial \Phi_j}{\partial \zeta_i}\right)_0 \\ \omega_j = \Phi_j\,(\zeta_1, \zeta_2,\ldots,\zeta_n;\ \overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2,\ldots,\overline{\chi}_q) = \Phi_j^{(0)} \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} d_{ih} = \left(\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial \vartheta_h}\right)_0 \\ l_i = \zeta_i - \Psi_i\,(\vartheta_1^{(0)}, \vartheta_2^{(0)},\ldots,\vartheta_m^{(0)};\ \overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2,\ldots,\overline{\chi}_q) = \zeta_i - \Psi_i^{(0)}. \end{cases} \tag{12}$$

При этом значок ° показывает, что соответствующие частные производные подсчитываются для наблюденных ζ_i и опорных $\nu_g^{(0)}$, $\vartheta_h^{(0)}$ величин.

§ 4. Наименования и последующие задачи

Н а и м е н о в а н и я. Своды производных плоскостных соотношений (7) — (9) назовем н а ч а л ь н ы м и   у р а в н е н и я м и   п о п р а в о к. Они являются искомым плоскостным представлением исходных сводов первообразных соотношений (1), (3), (4). Эти исходные своды (1), (3), (4) и соответствующие им плоскостные своды (7) — (9) будем называть в дальнейшем:

а) смешанными — (1) и (7);
б) прямыми — (3) и (8);
в) косвенными — (4) и (9).

П о с л е д у ю щ и е з а д а ч и. Для поверхностных лучевых сетей наиболее сложным является вопрос о главных видах первообразных и конечно-разностных соотношений связи при смешанном и прямом уравнивании этих сетей. Особенно же трудной здесь будет задача разыскания наивыгоднейших путей составления таких соотношений в лучевых сетях общего строения. Поэтому на указанном большом и важном вопросе мы сосредоточим свое основное внимание, посвятив ему две следующие статьи.

Что касается более простой задачи получения косвенных соотношений связи в поверхностных лучевых сетях, то этим мы займемся в двух последних статьях. Наиболее существенным здесь будет предложенный мной общий способ определения коэффициентов косвенных уравнений поправок в лучевых сетях на произвольной правильной поверхности.

В целях сокращения изложения, в данной совокупности моих статей введена единая последовательность счета получаемых в них математических выражений.

ЛИТЕРАТУРА

1. К р у т о й Б. Ф. Поверхностные выравненные лучевые сети и общий способ их построения. „Известия ТПИ“, том 93, 1958.

2. И о р д а н В. Руководство по геодезии, том I, Редбюро ГУГК. М., 1939.