

УДК 51-77

Применение тензорных разложений для сжатия изображенийЕ.А. Дресвянский

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н., А.Н. Мягкий
 Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
 Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
 E-mail: ead31@tpu.ru

Application of tensor decompositions for image compressionЕ.А. Dresvyanskiy

Scientific Supervisor: Ass. Prof., Ph.D. A.N. Myagky
 Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
 E-mail: ead31@tpu.ru

Abstract. *In this paper, we consider the application of sequentially truncated higher order singular value decomposition (ST-HOSVD) and tensor train singular value decomposition (TTSVD) tensor decompositions to image compression and compare the results obtained using the well-known JPEG algorithm.*

Key words: *ST-HOSVD, TTSVD, image compression, JPEG algorithm, tensor decompositions.*

Введение

Современные технологии обработки мультимедийных данных требуют эффективных методов сжатия для минимизации объема хранимой и передаваемой информации. В данной работе будут рассмотрены два вида тензорных разложений: разложение Таккера (ST-HOSVD) и тензорный поезд (TTSVD). Эти разложения используют многомерную структуру данных изображений, что потенциально может обеспечить более высокую степень сжатия и лучшее качество восстановления.

В данной работе на основе метрики качества PSNR проведён сравнительный анализ использования тензорных разложений со стандартным методом сжатия, таким как JPEG. А также рассмотрено влияние порядка расположения мод тензора на качество восстановления изображения.

Экспериментальная часть

Рассмотрим трехмерный массив (тензор) $A(i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{R}^{N \times N \times N}$. Для его хранения в памяти потребуется N^3 ячеек, но это количество можно уменьшить, представив исходный тензор в виде тензорного разложения.

Разложение Таккера соответствует следующей записи [1]:

$$A(i_1, i_2, i_3) = \sum_{\alpha_1=1}^{r_1} \sum_{\alpha_2=1}^{r_2} \sum_{\alpha_3=1}^{r_3} G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) U_1(i_1, \alpha_1) U_2(i_2, \alpha_2) U_3(i_3, \alpha_3), \quad (1)$$

где $G \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2 \times r_3}$ – ядро Таккера и $U_k \in \mathbb{R}^{N \times r_k}$ – факторы Таккера; $k = 1, 2, 3$. Ранги r_1, r_2, r_3 в (1) определяются как минимальные значения, позволяющие получить равенство между разложением и начальным тензором A .

Алгоритм ST-HOSVD последовательно применяет усечённое сингулярное разложение (SVD) к матрицам развёрток тензора по модам, поэтапно понижая ранг, формируя, таким образом, разложение Таккера с квазиоптимальной точностью.

Алгоритм TTSVD представляет собой разложение тензора в формате тензорного поезда. В процессе реализации алгоритма TTSVD тензор преобразуется в цепочку меньших тензоров (ядер), что позволяет значительно уменьшить объем данных при сохранении

структуры. Для тензора A разложение тензорного произведения соответствует следующему представлению [1]:

$$A(i_1, i_2, i_3) = \sum_{\alpha_1=1}^{r_1} \sum_{\alpha_2=1}^{r_2} G_1(i_1, \alpha_1) G_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) G_3(\alpha_2, i_3). \quad (2)$$

Сложность алгоритма ST-HOSVD оценивается как $O(N^4 + N^3R + \min(N^2R^2, NR^4))$, а для алгоритма TTSVD сложность составляет $O(N^4)$, где R – максимальный таккеровский ранг [1].

Для оценки качества сжатия изображения мы используем пиковое отношение сигнала к шуму (PSNR, дБ), которое рассчитывается через соотношение [2]:

$$PSNR = -10 \log_{10} \left(\frac{\|A - A_*\|_F^2}{MAX_A^2 \cdot H \cdot W \cdot C} \right), \quad (3)$$

где A_* – восстановленный тензор, $\|\cdot\|_F$ – норма Фробениуса, MAX_A – максимальное значение, которое может принимать пиксель изображения (255 для пикселя разрядностью 8 бит), H – высота, W – ширина и C – количество цветных каналов.

Результаты

Будем рассматривать фотографию формата TIFF размером 512×512 пикселей. Конвертируем изображение в формат RGB24. Сожмём изображение, используя алгоритмы тензорного разложения при заданной метрике качества PSNR. Это можно сделать, связав метрику качества PSNR (3) и ошибку аппроксимации тензорных разложений [3, 4]. Тогда задача сводится к подбору таких рангов r_1, r_2, r_3 , которые соответствуют заданной ошибке аппроксимации с точностью $\delta = 10^{-1}$. Из полученного множества решений, будем выбирать такие ранги, которые дают наибольшее значение коэффициента сжатия (CR). Полученные объекты разложения переводим в поток байтов (сериализация) и сохраняем в формате pkl. Вычисляем коэффициент сжатия как отношение размера исходного файла к размеру файла сериализованных объектов разложения. Восстанавливаем изображение в формате RGB24 и конвертируем в формат TIFF. Проведем данную процедуру для различных значений метрики качества PSNR и получим график зависимости метрики качества от коэффициента сжатия (рис. 1).

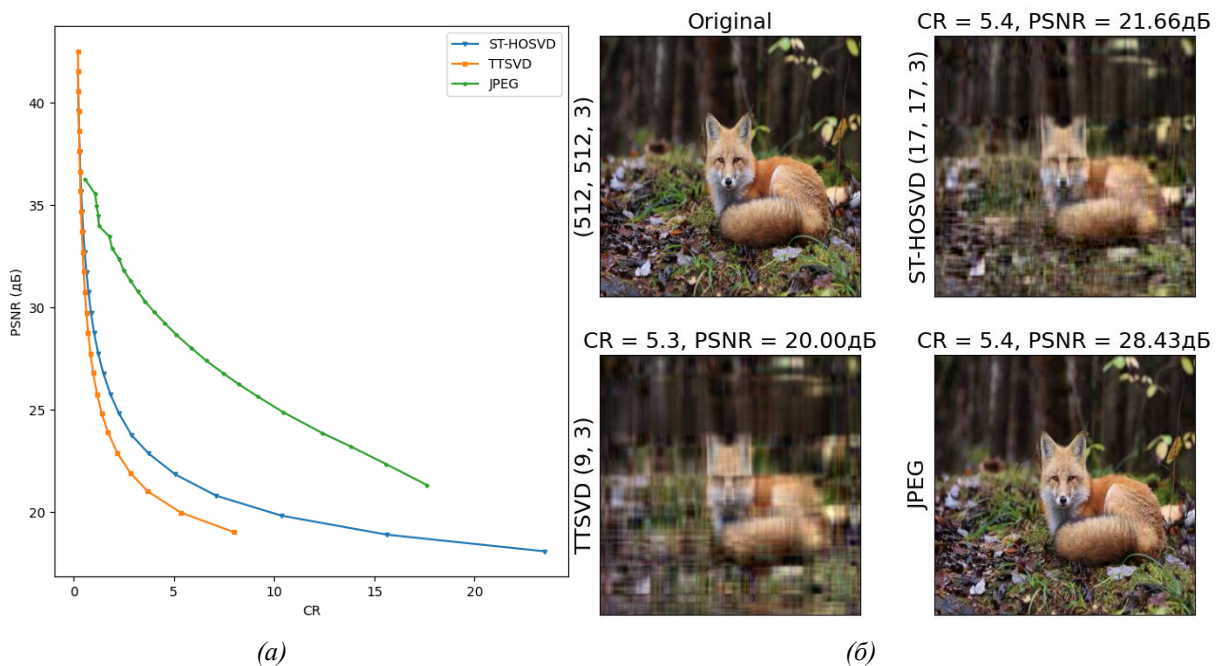


Рис. 1. График PSNR vs CR (а), результат сжатия изображения (б)

На графике видно, что при одинаковом коэффициенте сжатия, качество сжатия у тензорных разложений хуже. Пример сжатия с помощью тензорных разложений можно увидеть на рис. 1, б. Видно, что при тензорных разложениях появляются артефакты сжатия, а метод сжатия JPEG не отличается от оригинала.

При использовании тензорных разложений для сжатия изображений порядок расположения мод в тензоре влияет на качество восстановления изображений.

Как видно из рис. 2, изменение порядка мод тензора приводит к заметным колебаниям в значениях PSNR при одинаковом коэффициенте сжатия. Это указывает на чувствительность алгоритмов тензорных разложений (ST-HOSVD и TTSVD) к организации данных внутри тензора.

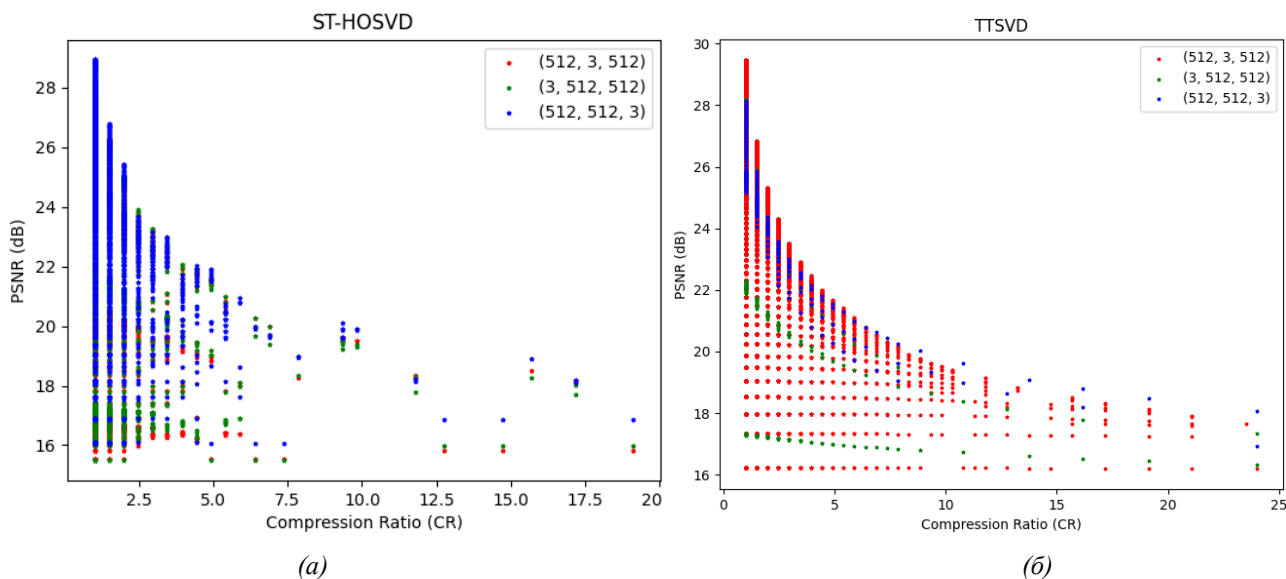


Рис. 2. Влияние перестановок мод тензора на метрику качества PSNR для различных значений CR: алгоритм ST-HOSVD (а); алгоритм TTSVD (б)

Заключение

В данной работе был проведен сравнительный анализ использования тензорных разложений со стандартным методом сжатия JPEG. Показано, что применение тензорных разложений позволяет выбирать степень сжатия при заданном значении качества изображения. Оценка, проводимая по качеству восстановления при одинаковой степени сжатия, показала, что разложение тензорного поезда и разложение Таккера уступают JPEG. Также показано влияние перестановок мод тензора на метрику качества PSNR.

Список литературы

1. Тыртышников Е.Е. Матвеев С.А. Алгебраические вычисления, тензоры и оптимизация: учебно-методическое пособие для студентов магистратуры филиала МГУ в г. Сарове. – М. : Изд-во Издательский дом МГУ, 2024. –63 с.
2. Курилович А.А., Матвеев С.А. О возможностях сжатия видеоданных с помощью тензорных поездов и разложения Таккера // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. – 2023. – Т. 73. – С. 58–74.
3. Oseledets V. Tensor-Train decomposition // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2011. – P. 2295–2317.
4. Vannieuwenhoven, N., Vandebril, R., and Meerbergen, K. A new truncation strategy for the higher-order singular value decomposition // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2012. – Vol. 34(2). – P. A1027–A1052.