УДК 519.6

Приближенное решения 2D уравнения Навье-Стокса методом Фурье-нейрооператора

А.С. Кандыбо
Научный руководитель: к.ф.-м.н. Б.С. Мерзликин
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: ask161@tpu.ru

Approximate solution of the 2D Navier-Stokes equation using the Fourier Neural Operator method

A.S. Kandybo
Scientific Supervisor: Ph.D. B.S. Merzlikin
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: ask161@tpu.ru

Abstract. *The Navier-Stokes equation, along with other equations of hydrogas dynamics, is nontrivial and generally has no analytical solution. Some simplifications make it possible to obtain an analytical solution to this equation, but in practice they often resort to its numerical solution. There are a number of classical methods for this.: finite difference method; finite volume method; finite element method.*

Classical approaches to solving the Navier-Stokes equation lead to lengthy calculations with the slightest change in equation parameters, initial or boundary conditions. Modern approaches based on neural network models, such as convolutional neural networks, make it possible to optimize the solution of such equations, but they strongly depend on data discretization. The neural Fourier operator avoids this dependence by training the model on data not in the time domain, but in the spectral domain. This approach makes it possible to significantly reduce the time needed to solve the equations of hydrogas dynamics, while maintaining the flexibility of the model.

Key words: *Navier-Stokes equation, FNO, invariance to discretization.*

Введение

В науке и инженерии получили очень большое распространение операторы, действующие из одного пространства функций в другое. Такие операторы могут быть использованы, например, для решения дифференциальных уравнений, где входные данные – это коэффициенты уравнения, а выходные – функция, являющаяся решением уравнения. На первый взгляд, кажется, что возникнет проблема при работе с бесконечномерными пространствами, однако это решается простой дискретизацией бесконечномерных входных данных и выходных функций на конечномерные сетки, а уже потом применять стандартные модели, такие как нейронные сети.

На данном этапе кажется, что всё хорошо и подобные задачи могут решаться обычными нейронными сетями. Однако, если обратить внимание на формат входных данных, то обычные нейронные сети требуют одинаковый формат данных при тренировке и тестировании, то есть дискретизация данных должна быть с одним и тем же шагом. Теперь перейдём к нейронному оператору, идея которого – это отображение пространства пространствами функций на некоторую ограниченную область. Так как этот оператор определен на пространстве функций, то эти функции могут быть дискретизированы различными доступными методами и с разной частотой дискретизации, причем не будет необходимости переобучать уже обученную модель.

Еще раз проговорим различие стандартных нейронных сетей и нейро-оператора. Стандартные нейронные сети напрямую зависят от формата входных данных – они не умеют работать с дискретными функциями с разной частотой дискретизации, в то время как нейро-оператор позволяет работать с данными, имеющими разные частоты дискретизации.

Такое свойство модели будем называть инвариантностью к дискретизации. А нейро-оператор, рассматриваемый в данной работе, удовлетворяет этому свойству.

Уравнение Навье-Стокса

Уравнение Навье-Стокса – это дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее движение вязкой ньютоновской жидкости. Является одним из важнейших уравнений в гидродинамике. Оно применяется в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач.

В случае несжимаемой жидкости система уравнений Навье-Стокса состоит из двух уравнений: уравнение движения и уравнение неразрывности.

Уравнение движения обычно записывается в векторной форме и выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \eta \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}, \tag{1}$$

где $\vec{v} = v(t, \vec{x})$ – скорость, $\vec{p} = p(t, \vec{x})$ – давaление – это функции времени t и координаты $x \in R^n, n = 2{,}3$ – плоская или трехмерная область, в которой движется жидкость, $\vec{f}$ – векторное поле массовых сил, ρ – плотность жидкости, η – коэффициент кинематической вязкости.

Уравнение движения может быть записано и по координатам в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \partial_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \partial_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} = f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v_y, \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \partial_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z \end{cases} \tag{2}$$

Уравнение неразрывности отображает закон сохранения массы для движущейся сплошной среды (жидкости) и определяется следующим выражением:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} = 0, \tag{3}$$

где ρ — плотность жидкости, t – время, $\vec{v}$ - вектор скорости течения.

В случае с несжимаемой жидкостью, ее плотность будет постоянной, что упрощает уравнение непрерывности и приводит к виду:

$$\nabla \vec{v} = 0 \tag{4}$$

Нейронный оператор Фурье

Нейронный оператор – это итеративная архитектура [1] $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_T$, где $v_j, j - 0,1, \ldots, T$ – это последовательность функций, каждая из которых принимает значения из R^{d_v}. Как показано на рис. 1, вход $a \in A$ попадает в представление наивысшей размерности $v_0(x) = P(a(x))$, проходя через локальную трансформацию P, которая обычно представлена в виде полносвязной нейронной сети.

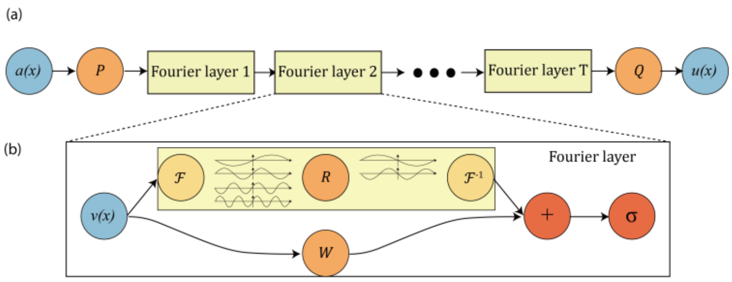

Рис. 1. Архитектура нейро-оператора [1]

Далее ко входным данным применяется несколько итераций обновлений $v_t \to v_{t+1}$. Выход $u(x) = Q\big(v_T(x)\big)$ – это проекция v_T, полученная с помощью локальной трансформации $Q: R^{d_v} \to R^{d_u}$. На каждой итерации обновления $v_t \to v_{t+1}$ представляют из себя комбинацию нелинейного интегрального оператора K и локальной нелинейной функции активации σ.

Каждый Фурье слой описывается с помощью следующего выражения:

$$v_{t+1}(x) \coloneqq \sigma(Wv_t(x) + K(a;\varphi)v_t)(x), \forall x \in D,$$

где $K(a;\varphi)$ – это ядро интегрального оператора, параметризованное значением $\varphi \in \Theta_K, W: R^{d_v} \to R^{d_v}$ (веса нейронной сети), $W: R \to R$ – линейная функция, $\sigma: R \to R$ – нелинейная функция активации, которая применяется поэлементно.

Итеративная архитектура позволяет находить решение уравнения в произвольный интервал времени. Достигается это путем использования предыдущего предсказания в качестве входа нейронной сети. Стоить учитывать, что с увеличением интервала предсказания величина ошибки будет расти.

Решение уравнения Навье-Стокса с помощью Фурье нейрооператора

В рамках выполняемой работы необходимо было разработать модель, способную прогнозировать распределение давления и насыщаемости среды при добыче нефти. Нам был предоставлен набор данных с численным решением уравнения Навье-Стокса для этой задачи. Набор данных включает в себя 3 тензора – начальные условия, давление в каждой точки, насыщаемости среды, на протяжении 24 часов с интервалом в 1 час. Общий объем данных имел размерность [1000, 96, 200, 24, 5], 1000 – количество примеров, 96 – ширина исследуемой области, 200 – длина исследуемой области, 24 – временные отсчеты, 5–3 значения начальных условий (компоненты скорости движения жидкости), 2 – давление и насыщаемость. Весь набор данных был разбит на тренировочную и тестовую выборки в отношении 9/1.

За основу была взята реализация FNO на github [2], представленная авторами статьи [3], но была немного доработана, так как в данной задаче требуется предсказывать 2 параметра, а имеющаяся реализация позволяет делать предсказания только для одного параметра. В итоге, была модифицирована архитектура модели таким образом, чтобы на выходе модели можно было получить несколько параметром – добавлена еще одна размерность. Также была модифицирована функция потерь, которая учитывает Loss для каждого предсказываемого параметра путем их суммирования.

В качестве функции потерь была использована MSE, модель обучалась 150 эпох, на каждой эпохе по 300 итераций с размером батча равным 3. Процесс обучения занял сутки. На рис. 2 представлены результаты прогнозирования обученной модели.

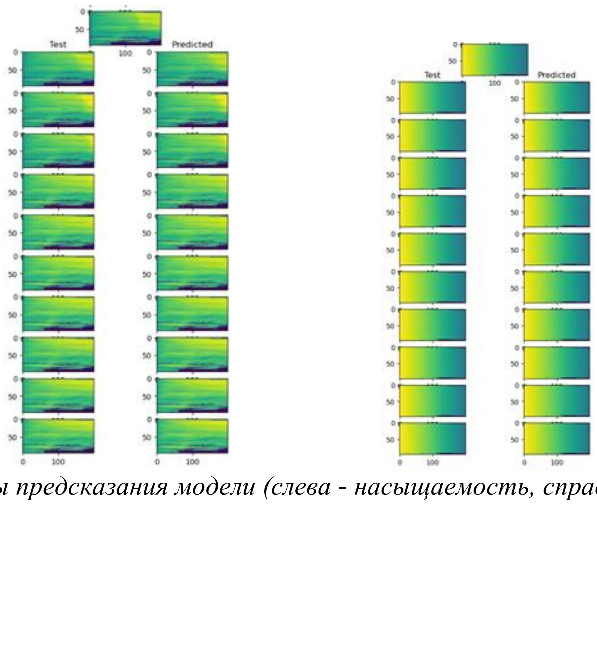

Рис. 2. Результаты предсказания модели (слева - насыщаемость, справа - давление)

Заключение

В рамках данной работы была изучена структура FNO, модифицирована ее архитектура для решения задач с несколькими параметрами, а также была обучена модель и продемонстрированы результаты ее работы на реальных данных. Данная модель позволяет решать задачи, связанные с прогнозированием насыщаемости пористой среды нефтью.

Список литературы

1. Li Z., Kovachki N., Azizzadenesheli K., Liu B., Bhattacharya K., Stuart A., Anandkumar A. Fourier Neural Operator for Parametric Partial Differential Equations. [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. – URL: https://arxiv.org/abs/2010.08895 (Дата обращения: 28.05.2025).
2. Wen G. U-FNO – an enhanced Fourier neural operator-based deep-learning model for multiphase flow. [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. – URL: https://github.com/gegewen/ufno (Дата обращения: 28.05.2025).
3. Wen G., Li Z., Azizzadenesheli K., Anandkumar A., Benson S.M. U-FNO - An enhanced Fourier neural operator-based deep-learning model for multiphase flow. [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. – URL: https://arxiv.org/abs/2109.03697 (Дата обращения: 28.05.2025).