

К РАСЧЕТУ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГАРМОНИК В ДИАФРАГМИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДАХ

Е. С. КОВАЛЕНКО, В. С. КОВАЛЕНКО, Б. Г. ЦИКИН

С продвижением техники СВЧ в область более коротких волн значительный интерес представляют генераторы, работающие на высших гармониках замедляющих структур.

В связи с этим представляется необходимым проведение сравнительной оценки различных методов, применяемых при расчете замедляющих систем, на примере диафрагмированного волновода прямоугольного сечения.

Наиболее распространенный метод расчета учитывает в пространстве резонаторов структуры лишь одну основную волну [1], [2]. Этот метод дает хорошие результаты при расчете дисперсионных свойств системы, так как последние слабо зависят от задания поля на границе раздела пространства взаимодействия и резонаторов. В то же время методу, как показано в [3] для бесконечно тонких диафрагм, присущи значительные погрешности в определении амплитуд высших гармоник, а следовательно, и эффективности ламп, работающих на этих гармониках.

Остальные существующие методы [4], [5] связаны с попытками уточнить характер распределения поля на ребрах диафрагм.

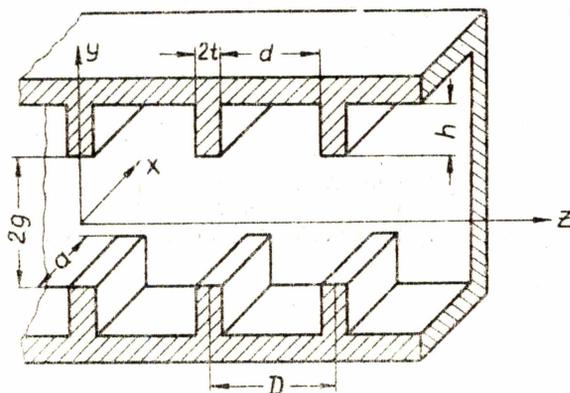


Рис. 1.

В настоящей работе будет проведен расчет амплитуд гармоник диафрагмированного волновода в режиме π -колебаний методом рядов Фурье и численное сравнение результатов расчета с результатами, полученными другими методами.

Рассмотрим диафрагмированный волновод прямоугольного сечения, основные параметры которого, используемые далее, указаны на рис. 1.

В работе [6] показано, что замедленные синфазные волны в таком волноводе относятся к классу LE -волн и описываются магнитным вектором Герца

$$\Pi_{\text{мх}} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s \cos \frac{\pi}{a} x \sin \kappa_y^s y e^{j\beta_s z}$$

в пространстве взаимодействия

и

$$\Pi_{\text{мх}} = \sum_{s=0}^{\infty} B_s \cos \frac{\pi}{a} x \cos \kappa_0^s \left(\frac{b}{2} - y \right) \cos \frac{s\pi}{d} (z - t)$$

в пространстве резонаторов.

Здесь A_s и B_s — пока произвольные постоянные

$$\kappa = \frac{\omega}{c}; \quad \kappa_y^s = \kappa^2 - \beta_s^2 - \frac{\pi^2}{a^2};$$

$$\beta_s = \beta_0 + \frac{2\pi s}{D}; \quad \kappa_0^s = \kappa^2 - \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{s^2 \pi^2}{d^2}.$$

Сшивание полей на границе раздела $y = \pm g$ приводит к бесконечной системе уравнений

$$X'_e = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ne} X'_n, \quad (1)$$

$$l = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2, \dots,$$

где

$$X'_e = \beta_e A_e \sin \kappa_y^e g e^{j \frac{\beta_e D}{2}}$$

и

$$\alpha_{ne} = \frac{8}{Dd} \frac{\beta_e^2}{k_y^e} \operatorname{tg} k_y^e g \left\{ \frac{k_0 \operatorname{tg} \kappa_0 h \sin \frac{\beta_e d}{2} \sin \frac{\beta_n d}{2}}{2 \beta_e^2 \beta_n^2} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_0^s \operatorname{tg} \kappa_0^s h \sin \frac{\beta_l d + s\pi}{2} \sin \frac{\beta_n d + s\pi}{2}}{\left(\beta_e^2 - \frac{s^2 \pi^2}{d^2} \right) \left(\beta_n^2 - \frac{s^2 \pi^2}{d^2} \right)} \right\}. \quad (2)$$

Отсюда дисперсионное уравнение LE -волн запишется в виде

равенства нулю определителя системы (1)

$$\begin{aligned} |\delta_{ne} - \alpha_{ne}| &= 0, \\ \delta_{nn} &= 1; \delta_{ne} = 0, \quad n \neq e. \end{aligned} \quad (3)$$

В дальнейшем будет рассмотрен режим π -колебаний ($\beta_0 D = \pi$). Это позволяет привести уравнение (2) к удобному для расчета виду

$$\begin{aligned} \alpha_{ne} = \frac{8}{Dd} \frac{(2e+1)^2 \pi^2}{\kappa_y^e D^2} \operatorname{tg} k_y^e g \left\{ \frac{k_0^0 \operatorname{tg} k_0^0 h \sin \frac{\beta_e d}{2} \sin \frac{\beta_n d}{2}}{2 \beta_e^2 \beta_n^2} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_0^s \operatorname{tg} k_0^s h \sin \frac{\beta_e d + s\pi}{2} \sin \frac{\beta_n d + s\pi}{2}}{\left(\beta_e^2 - \frac{s^2 \pi^2}{d^2} \right) \left(\beta_n^2 - \frac{s^2 \pi^2}{d^2} \right)} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\beta_e = \frac{(2e+1)\pi}{D}; \quad \beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{D}.$$

Введем новые переменные:

$$x_e = (-1)^e X'_e + (-1)^{e+1} X'_{-(e+1)},$$

$$y_e = (-1)^e X'_e - (-1)^{e+1} X'_{-(e+1)},$$

отсюда

$$X'_e = \frac{1}{2} (-1)^e (x_e + y_e), \quad (5)$$

$$X'_{-(e+1)} = \frac{1}{2} (-1)^{e+1} (x_e - y_e).$$

После подстановки (5) в (1), имеем

$$(-1)^e (x_e + y_e) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_{en} (-1)^n (x_n + y_n) + (-1)^{n+1} \alpha_{e, -(n+1)} (x_n - y_n) \};$$

$$\begin{aligned} (-1)^{e+1} (x_e - y_e) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_{-(e+1), n} (-1)^n (x_n + y_n) + \alpha_{-(e+1), -(n+1)} \times \\ \times (-1)^{n+1} (x_n - y_n) \}. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая последние два равенства и используя соотношения

$$\alpha_{en} = \alpha_{-(n+1), -(e+1)}; \quad \alpha_{-(e+1), n} = \alpha_{e, -(n+1)},$$

$$\alpha_{e, -(e+1)} = \alpha_{-(e+1), e}; \quad \alpha_{ee} = \alpha_{-(e+1), -(e+1)},$$

получим

$$(-1)^e y_e = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \alpha_{en} + \alpha_{-(e+1), n} \} y_n; \quad (6)$$

$$(-1)^n x_e = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \alpha_{en} - \alpha_{-(e+1), n} \} x_n, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{en} + \alpha_{-(e+1), n} = & \frac{8}{Dd} \frac{\beta_e^2}{\kappa_y^e} \operatorname{tg} \kappa_y^e g \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\kappa_0^s \operatorname{tg} \kappa_0^s h \sin \frac{\beta_n d + s\pi}{2}}{\left(\beta_e^2 - \frac{s^2 \pi^2}{d^2} \right) \left(\beta_n^2 - \frac{s^2 \pi^2}{d^2} \right)} \times \\ & \times 2 \sin \frac{s\pi}{2} \cos \frac{2e+1}{2} \frac{\pi d}{D}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{en} - \alpha_{-(e+1), n} = & \frac{8}{Dd} \frac{\beta_e^2}{\kappa_y^e} \operatorname{tg} \kappa_y^e g \left\{ \frac{\kappa_0^0 \operatorname{tg} \kappa_0^0 h \sin \frac{\beta_e d}{2} \sin \frac{\beta_n d}{2}}{\beta_e^2 \beta_n^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\kappa_0^s \operatorname{tg} \kappa_0^s h \sin (2n+1) \frac{\pi d}{D} + s\pi}{\left(\beta_n^2 - \frac{s^2 \pi^2}{d^2} \right) \left(\beta_e^2 - \frac{s^2 \pi^2}{d^2} \right)} 2 \cos \frac{s\pi}{2} \sin (2e+1) \frac{\pi d}{2D} \right\}. \end{aligned}$$

Как видно, системы (6) и (7) независимы, имеют различные коэффициенты и, следовательно, собственные значения K . Пусть K есть собственное значение системы (7), т. е. при этом K выполняется соотношение

$$|\delta_{ne} - (\alpha_{en} - \alpha_{-(e+1), n})| = 0. \quad (9)$$

Тогда $x'_e \neq 0$, но определитель (6) отличен от нуля и, следовательно, $y_e = 0$. Используя (5), заключаем, что решением (7) являются волны, амплитуды гармоник которых подчинены условиям

$$\begin{aligned} X_e = -X_{-(e+1)}; \\ e = 0, 1, 2... \end{aligned} \quad (10)$$

Непосредственной подстановкой (10) в выражения для компонент поля можно убедиться, что система (7) определяет волны с максимумом продольного электрического поля в центрах ячеек.

Аналогично можно показать, что если системе (6) и соответствует не нулевое решение, то оно ведет к волнам, продольное электрическое поле которых в канавках в среднем равно нулю. Поэтому ниже решение проводится лишь для системы (7).

Коэффициенты системы (7) с помощью (8) представлены в виде бесконечных рядов. Очевидно, что подсчет их по этой причине несколько затруднителен и прежде всего найдем приближенные, но достаточно точные для ряда практических случаев выражения для коэффициентов в замкнутой аналитической форме.

Используя очевидное равенство

$$\sin \frac{\beta_e d + s\pi}{2} \sin \frac{\beta_n d + s\pi}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{(\beta_e - \beta_n) d}{2} - (-1)^s \cos \frac{(\beta_e + \beta_n) d}{2} \right\}$$

и принимая во внимание, что

$$\kappa_0^s \simeq i \frac{s\pi}{d}; \quad \operatorname{tg} \kappa_0^s h \simeq i,$$

можно сумму в правой части уравнения (8) записать в виде

$$\begin{aligned} S_{ne} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\pi/d}{\left(\beta_e^2 - \frac{s^2\pi^2}{d^2}\right)\left(\beta_n^2 - \frac{s^2\pi^2}{d^2}\right)} \cos \frac{(\beta_e - \beta_n) d}{2} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s s\pi/d}{\left(\beta_e^2 - \frac{s^2\pi^2}{d^2}\right)\left(\beta_n^2 - \frac{s^2\pi^2}{d^2}\right)} \cos \frac{(\beta_e + \beta_n) d}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Проведя суммирование в (11), получим для $\gamma_{en} = \alpha_{en} - \alpha_{(e+1),n}$ и γ_{nn} выражения вида:

$$\begin{aligned} \gamma_{ne} &= \frac{8}{\pi^3} \frac{1}{(2n+1)^2 (2e+1)} \sin \frac{\beta_e d}{2} \sin \frac{\beta_n d}{2} \Lambda - \\ &- \frac{(2e+1)}{\pi^2 (n-e)(n+e+1)} \sin \frac{\beta_e d}{2} \sin \frac{\beta_n d}{2} \times \\ &\times \left\{ 2\psi \left(\frac{\beta_e d}{2\pi} \right) - 2\psi \left(\frac{\beta_n d}{2\pi} \right) - \frac{2\pi}{\beta_e d} + \frac{2\pi}{\beta_n d} + \pi \operatorname{ctg} \frac{\beta_e d}{2} - \pi \operatorname{ctg} \frac{\beta_n d}{2} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_{nn} &= \frac{8}{\pi^3} \frac{\sin^2 \frac{\beta_n d}{2}}{(2n+1)^3} \Lambda + \frac{2d}{D\pi^2} \sin^2 \frac{\beta_n d}{2} \left\{ \psi \left(\frac{\beta_n d}{2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{2\pi^2}{\beta_n^2 d^2} \right\} - \frac{d}{D}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Lambda = \frac{D^2}{d} \kappa_0^0 \operatorname{tg} \kappa_0^0 h,$$

$\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции $\Gamma(x)$.

Формулы (12) и (13) дают достаточно точные выражения для коэффициентов системы, если только высота диафрагм не очень мала. Хотя последнее всегда выполняется для медленных волн в режиме π -колебаний, при желании можно было бы провести дальнейшее уточнение, удерживая члены, пропорциональные $\delta_s = \left(\frac{\operatorname{tg} \kappa_0^s h}{\kappa_0^s} - d/s\pi \right)$.

Мы не будем этого делать, так как при тех значениях параметров, для которых система будет решена, ошибки от пренебрежения поправками ничтожны.

Для решения системы (8) введем относительные амплитуды гармоник

$$X_n = \frac{x_n}{x_0}. \quad (14)$$

Далее из первого уравнения (8) выразим Λ как функцию X_n и размеров волновода, остальные уравнения дают неоднородную систему относительно гармоник.

Как было показано в [3], для $D=d$ полученная система относится к типу вполне регулярных систем. Если D/d не равно 1, но близко к 1, то из аналитичности коэффициентов следует, что регулярность или вполне регулярность сохраняется. Она может нарушиться лишь для малых d/D . Таким образом, если d/D не очень мало, система (8) будет относиться к типу регулярных и для решения ее может быть применен метод редукции.

Решение (8) производилось в восьмом приближении, т. е. полагалось $X_n=0$ при $n \geq 9$. Это эквивалентно расчету с учетом первых 18 гармоник, 9 прямых и 9 обратных. Результаты расчета гармоник для различных d/D приведены на рис. 2. Точность расчета для $\frac{d}{D} = 1$ может быть оценена строго и составляет 2÷3 % для первых гармоник, увеличиваясь до 15 % для восьмой гармоники. При $\frac{d}{D} < 1$ точность несколько хуже, однако можно ожидать, что все же точность расче-

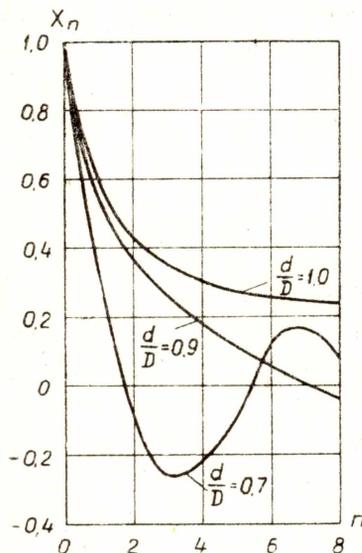


Рис. 2.

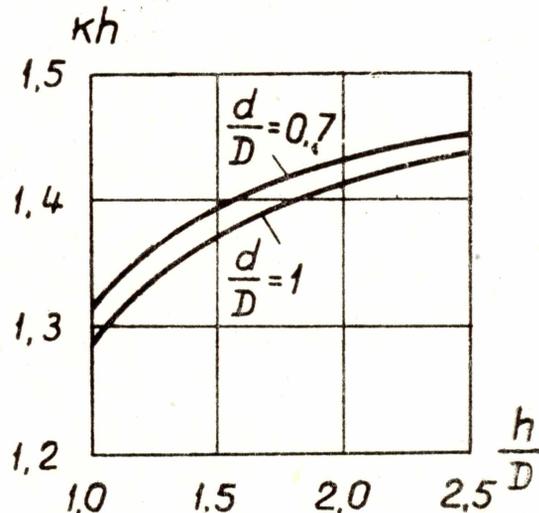


Рис. 3.

та первых пяти гармоник не выходит за 10÷15 %. Строгая оценка точности здесь затруднительна, но точность в 10 % вполне достаточна для всех практических случаев. Значения X_n , полученные решением бесконечной системы (8), далее будем называть истинными значениями гармоник.

Знание величины Λ позволяет определить волновое число k в режиме π -колебаний. Результаты расчета его очень мало зависят от d/D , что иллюстрируется рис. 3.

В соответствии с целью настоящей работы вычислим амплитуды гармоник в приближении заданного поля на границе раздела $y=g$. Здесь используется ряд вариантов, причем, как уже отмечалось, чаще всего используют приближение, учитывающее одну гармонику в резонаторах. При этом

$$E_z = \begin{cases} 0 & 0 < z < t \\ \cos \frac{\pi}{a} x \cdot \text{const} & t < z < d+t \\ 0 & d+t < z < D \end{cases} \quad (15)$$

Аппроксимация вида (15) дает относительные амплитуды гармоник в виде

$$X_e^I = \frac{\sin \frac{\beta_e d}{2}}{\sin \frac{\beta_0 d}{2}} \frac{\beta_0}{\beta_e} (-1)^e \quad (16)$$

Эту формулу можно получить непосредственно из бесконечной системы (7), если в (7) пренебречь всеми членами, кроме тех, которые пропорциональны Λ .

Более точная аппроксимация, предложенная Уолкиншоу [4], а также Чу и Хансенom [5] для круглого волновода, учитывает особенность поля E_z на ребрах диафрагм

$$E_z = \begin{cases} 0; & 0 < z < t \\ \cos \frac{\pi}{a} x \cdot \frac{\text{const}}{\sqrt{(z-t)(z-d-t)}}; & t < z < d+t \dots \\ 0; & d+t < z < D \end{cases} \quad (17)$$

Согласно этой аппроксимации при $z=t$ и $z=d+t$ поле E_z обращается в бесконечность с показателем $1/2$. Гармоники, отвечающие (17), даются выражением

$$X_e^{II} = \frac{J_0 \left(\frac{\beta_e d}{2} \right)}{J_0 \left(\frac{\beta_0 d}{2} \right)} (-1)^e \quad (17a)$$

Однако степень обращения полей в бесконечность действительно равна $1/2$ лишь для бесконечно-тонких диафрагм. Для диафрагм с $t \neq 0$ степень обращения в бесконечность меньше и равна $1/3$. Это непосредственно следует из решения статической задачи о поле вблизи угла в $\pi/2$. Поэтому следует ожидать, что более точная аппроксимация будет

$$E_z = \begin{cases} 0; & 0 < z < t \\ \cos \frac{\pi}{a} x \cdot \frac{\text{const}}{[(z-t)(z-d-t)]^{1/2}}; & t < z < d+t \\ 0; & d+t < z < D \end{cases} \quad (18)$$

с амплитудами гармоник

$$X_e^{III} = (-1)^e \frac{J_{1/6} \left(\frac{\beta_e d}{2} \right)}{J_{1/6} \left(\frac{\beta_0 d}{2} \right)} \left(\frac{\beta_0}{\beta_e} \right)^{1/6}. \quad (19)$$

Функции $J_{1/6}(x)$ табулированы (7), так что расчет по последней формуле не представляет труда.

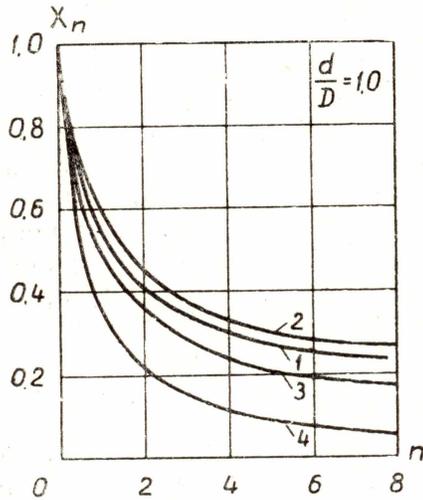


Рис. 4.

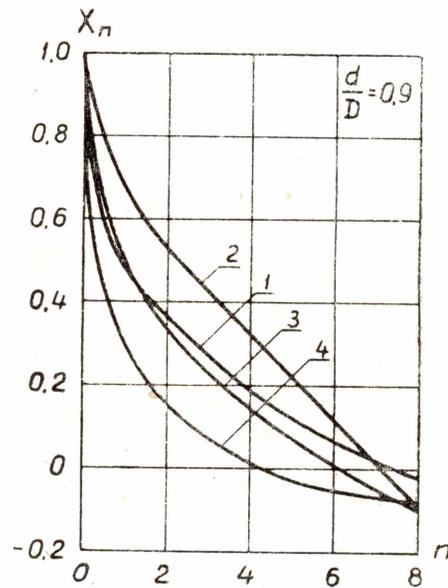


Рис. 5.

Результаты расчета представлены на рис. 3, 4, 5. Кривая 1 всегда представляет истинные значения гармоник. Кривая 2—аппроксимация Уолкиншоу, кривая 3—аппроксимация (18) и кривая 4—отвечает (15).

Как следует из этих графиков и при $\frac{d}{D} < 1$, ошибки, к которым ведет пользование простейшей аппроксимацией (15), довольно велики, хотя они и сглаживаются, когда $\frac{d}{D}$ уменьшается. При $\frac{d}{D} = 0,9$ расхождение для первой гармоники в 1,6 раза, для второй гармоники результаты разнятся уже более чем в 2 раза, далее разница еще больше. При $\frac{d}{D} = 0,7$ разница для первой гармоники очень велика, так как (16) дает результат, близкий к нулю. Вторые гармоники для этого случая отличаются в 1,5 раза. Приближение, которое дается аппроксимацией Уолкиншоу, значительно лучше. Еще лучшей

является аппроксимация (18). Особенно хорошо это видно из рис. 4 для $\frac{d}{D}=0,9$. Расхождение между истинными значениями и кривой 3 для первых четырех гармоник всего несколько процентов.

Качественно ход всех кривых одинаков. При $t=0$ кривые монотонно убывают, при $t \neq 0$ они приобретают колебательный характер. Наибольшее значение первых гармоник осуществляется при $\frac{d}{D}=1$, поэтому в приборах, работающих на высших гармониках, следует по возможности уменьшать толщину диафрагм. Значение $\frac{d}{D}=0,9$ допустимо при работе на гармониках вплоть до третьей, однако $\frac{d}{D}=0,7$ снижает амплитуду первой гармоники вдвое и, следовательно, сопротивление связи в 4 раза. Такое значение $\frac{d}{D}$ уже недопустимо мало.

Итак, в результате прямого решения бесконечной системы уравнений диафрагмированного волновода произведена оценка точности приближенных методов, используемых для расчета дисперсии и амплитуд гармоник. Основной вывод, к которому мы пришли, состоит в том, что обычно используемое приближение, состоящее в учете лишь одной основной волны в резонаторах, непригодно для расчета работы приборов на высших гармониках. Сопротивление связи при таком приближении может различаться в несколько раз. С другой стороны, это приближение дает довольно точные результаты для расчета дисперсионных свойств волновода. Приближение, получаемое с помощью пробной функции Уолкиншоу (17), дает хорошие результаты лишь для бесконечно тонких диафрагм. Для расчета реальных волноводов с $t \neq 0$ предложена пробная функция (18), относящаяся к типу Уолкиншоу, но более точно учитывающая особенности полей на ребрах

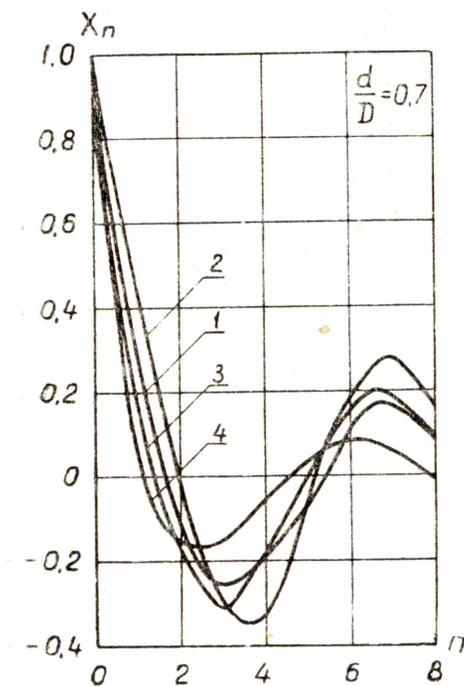


Рис. 6.

диафрагм. Эта функция обеспечивает значительную точность, по крайней мере для первых номеров гармоник.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Лопухин. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. ГИТТЛ, Москва, стр. 192, 1953.
2. М. Ф. Стельмах. О взаимодействии электронного потока с полем пространственных гармоник. Радиотехника и электротехника, т. 2, 4, 470, 1957.
3. Е. С. Коваленко и В. С. Коваленко. К теории диафрагмированного волновода прямоугольного сечения. Изв. вузов МВО СССР, Радиотехника, № 1, 1961 г.

4. W. Walkinshaw. The proc. of the Phys. Soc., V. 61, 3, № 345. p. 246, 1948.
5. E. L. Chu, W. W. Hansen. Journal of Applied Physics*. V. 18. № 11. p. 996, 1947.
6. Е. С. Коваленко, В. И. Шиманский. Синфазные волны в диафрагмированном волноводе прямоугольного сечения. Изв. вузов МВО СССР, Радиотехника, № 2, 1960.
7. Ватсон. Теория бесселевых функций, т. II. ИИЛ., 1949.