ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 290 1974

ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Л. В. ПЕРФИЛЬЕВ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры АСУ и лаборатории управления)

Использование управления дисциплиной обслуживания в системах массового обслуживания существенно повышает эффективность их работы. Разнообразие существующих систем и способов их управления в значительной мере определяет возможность и эффективность осуществления оптимального управления в системах массового обслуживания, относящихся к определенному типу. В работе рассматривается один из возможных подходов к решению задачи оптимального управления неупорядоченной системой массового обслуживания со случайным потоком требований, относящихся к определенному классу систем. В такой системе дисциплина обслуживания определяется технологическими требованиями, сформулированными практикой эксплуатации. Показатели качества функционирования систем вычисляются методом статистического моделирования, позволяющим учесть все накладываемые ограничения [1]. В зависимости от значения случайной величины b — некоторого параметра потока требований, принимающего свои значения из непрерывной области B, — устанавливается определенная дисциплина обслуживания R_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, называемая R — режимом работы системы. Следовательно, каждому значению R_j соответствует определенная область $B_j \subset B$ значений b. Если значение b лежит в области B_j, это означает, что систему необходимо перевести в режим работы R_j.

Вычисление вероятности того, что b лежит в области B_j осуществляется на основе контроля за некоторым непрерывным параметром $\gamma \in \Gamma$ по выражению

$$P(B_j/\gamma) = \int\limits_{B_j} p\,(b/\gamma)\, b, \tag{1}$$

где $P(B_j/\gamma)$ — условная вероятность;

$P(b/\gamma)$ — условная плотность вероятности параметра b.

По результатам измерения величины γ с помощью модели процесса функционирования систем могут быть вычислены значения $P(b/\gamma)$, а затем значения $M(\Phi)$ математического ожидания Φ — показателя качества обслуживания для каждого R_j.

При этом режиму работы R присваивается такое значение R_j, при котором достигается минимум $M(\Phi)$. Для каждого значения γ и R_j вычисляется некоторая величина U_γ следующим образом: $U_\gamma = 1$, если минимум $M(\Phi)$ имеет место при режиме R_j, и $U_\gamma = 0$ — в противном случае.

В результате κ измерений фиксируется значение m_j — число раз, когда $R = R_j$. Частоты m_j ($j = \overline{1, n}$) являются реализацией зависимых случайных целочисленных величин, которые имеют совместное распределение (2)

$$P(m_j/B_i) = \frac{\kappa!}{\prod\limits_{j=1}^{n} m_j!} \prod_{j=1}^{n} [P(R_j/B_i)]^{m_j} \tag{2}$$

$$i = 1, 2, ..., n; \ j = 1, 2, ..., n; \ B_i = B_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = \kappa; \ \ m_j \geqslant 0,$$

где $P(R_j/B_i)$ — вероятность присвоить режиму работы R значение R_j при условии, если значения параметра b лежат в области B_i.

Ниже приводятся выражения, по которым вычисляется указанная вероятность.

$$P(R_j/B_j) = \int P(\gamma/B_j) \cdot U_\gamma \cdot d\gamma; \tag{3}$$

$$P(\gamma/B_j) = \frac{P(\gamma) \cdot P(B_j/\gamma)}{\int P(\gamma) \cdot P(B_j/\gamma)\, d\gamma}; \tag{4}$$

$$P(B_j/\gamma) = \int_{B_j} P(b/\gamma)\, db. \tag{5}$$

$$U_\gamma \begin{cases} = 1, \text{ если } M(\Phi) = \min, \text{ при } R = R_j; \\ = 0, \text{ если } M(\Phi) = \min, \text{ при } R \neq R_j. \end{cases}$$

Принципиально распределение (2) позволяет определить области выборочных значений вектора $\vec{m}_j$ для всех значений B_i.

Принимая во внимание тот факт, что для рассматриваемой системы массового обслуживания области B_i не пересекаются, задача принятия решения о том, какое значение B_i есть истинное, может быть сформулирована следующим образом: определить с заданной доверительной вероятностью α такое минимальное значение объема выборки κ, при котором области выборочных значений для различных B_i не пересекаются; при этом истинным B_i будет то, в область которого попала выборка.

Для случая, когда $j = 1, 2$, рассматриваемая задача имеет относительно простое решение. Выражение (2) перепишется в виде

$$P(m/B_i) = C_\kappa^m [P(R_1/B_i)]^m [1 - P(R_1/B_i)]^{\kappa - m}, \tag{6}$$

$$j = 1, 2; \ i = 1, 2; \ m_1 = m; \ m_2 = \kappa - m.$$

Для заданного объема выборки κ и доверительной вероятности α может быть построена доверительная область выборочных значений — это область, внутри которой значение вероятности $P = P(R_j/B_i)$ совместимо с выборочным значением $P^* = \frac{m_i}{\kappa}$ для соответствующего B_i.

Кривые, ограничивающие доверительную область, определяются известными уравнениями [2]

$$\sum_{m=\kappa p^*}^{\kappa} C_\kappa^m p^m (1-p)^{\kappa - m} = \frac{q}{2}, \tag{7}$$

$$\sum_{m=0}^{np^*} C_\kappa^m p^m (1-p)^{\kappa-m} = \frac{q}{2}, \tag{8}$$

где $q = 1 - \alpha$.

Эти кривые при заданных значениях κ и P определяют наименьшее и наибольшее значения P^*. Тогда несложно найти такое минимальное $\kappa = \kappa_{\min}$, при котором интервалы значений P^* для B_1 и B_2 не пересекались бы

На основании вышеизложенного процедура принятия решения заключается в следующем. Извлекается выборка объемом $\kappa_{\min}$. При этом если выборочное значение $\frac{m}{n}$ попало в интервал выборочных значений P^*, соответствующий B_1, то истинным является B_1; в противном случае истинным является B_2. Выборочные значения, которые не попали ни в один из интервалов, относятся к ближайшему из них.

Необходимо отметить, что исследуемую задачу можно решать в случае, когда в течение наблюдения значения b — параметра потока требований лежат в одной из областей B_i.

В случае, когда это требование не выполняется, эффективного управления можно добиться лишь при условии, что промежуток времени, через который изменяются значения B_i, в среднем намного больше интервала наблюдения.

При этом математическое ожидание показателя качества обслуживания принимает максимальное значение — $M(\Phi)_{\max}$, если в течение всего времени работы системы значения R_j и B_j находятся в соответствии, и принимает минимальное значение — $M(\Phi)_{\min}$, если R_j и B_j всегда не соответствуют. При использовании управления несоответствие R_j и B_j может существовать не более $\rho = 2$ интервала наблюдения. Это, прежде всего, интервал, в котором произошло изменение B_j, а также следующий за ним, так как существует возможность ложного решения по результатам наблюдения предыдущего интервала. Однако, учитывая, что изменение значения B_j в первом интервале происходит не только в начале интервала и, следовательно, в определенной его части K соответствует B_j, целесообразно принять $\rho = 1{,}5$.

Ниже приводится выражение, позволяющее вычислить эффективность управления Π_j при заданном значении π — отношении величины интервала наблюдения к промежутку времени, через который изменяется B_j:

$$\Pi_j = \rho\pi \left[M_{jj}(\Phi) \cdot P(B_j) + \sum_{\psi} M_{j\psi}(\Phi) \cdot P(B_\psi) \right] + \\ + (1 - \rho\pi) \sum_j M_{jj}(\Phi) \cdot P(B_j) \tag{9}$$

$$j = \overline{1, n};\ \psi = \overline{1, n};\ \psi \neq j,$$

где $M_{jj}(\Phi)$ — математическое ожидание показателя качества обслуживания, когда система находится в режиме R_j и значение параметра b находится в области B_j; а $M_{j\psi}(\Phi)$ — когда система находится в режиме R_j и b находится в области B_ψ, $P(B_j)$ — вероятность величины B_j:

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Перфильев. Алгоритм моделирования одного класса систем массового обслуживания. Известия ТПИ, т. 211, Томск, 1970.

2. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.