

**ФОРМИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ СОЧЕТАНИЙ
СОВОКУПНОСТЕЙ МОДУЛЕЙ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ
СХЕМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ**

Е. Ф. ЖИГАЛОВА

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры АСУ
и лаборатории управления)

Необходимость структурного анализа принципиальных схем ВУ может возникать при решении многих практических задач, в том числе при компоновке модулей в блоки, когда в качестве критерия выбран минимум типов блоков. Целью данного анализа является установление структурного состава принципиальной схемы, т. е. какие типы устойчивых сочетаний в нее входят и в каком соотношении. Здесь устойчивым сочетанием считаем структуру, состоящую из « n » функционально связанных между собой модулей и повторяющуюся в схеме устройства либо комплексе устройств не менее некоторого числа раз, которое в дальнейшем будем обозначать через « β^* ».

В условиях быстро меняющейся конструктивной базы и росте уровня интеграции элементов «образы» устойчивых сочетаний непостоянны. Так, при уровне интеграции, равной 3÷4, конструктивные реализации элементарных логических функций (ЭЛФ) — «И»; «ИЛИ»; «НЕ» и т. д., могли быть приняты в качестве устойчивых сочетаний. При уровне интеграции больше 10 каждая ЭЛФ реализуется одним модулем либо его частью, а различные совокупности модулей реализуют более сложные логические функции, форма которых меняется, усложняясь с ростом уровня интеграции. Это приводит к тому, что имеющийся перечень устойчивых сочетаний необходимо частично либо полностью изменять при переходе к новой конструктивной базе элементов в соответствии с результатами структурного анализа схем. Сложность проведения структурного анализа в этих условиях заключается в отсутствии информации о структурах — их топологии, мощности, типе. В связи с этим разработка методики структурного анализа при априорно незаданных структурах представляет теоретический интерес и имеет важное практическое значение. В данной работе рассматривается методика структурного анализа, когда информация о типовых структурах полностью отсутствует.

Структурный анализ схем при априорно незаданных структурах предусматривает решение ряда задач таких, как:

- декомпозиция принципиальной схемы ВУ;
- формирование списка устойчивых сочетаний (типовых структур).

Результатом решения задачи декомпозиции схемы является конечное множество структур $S = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, в котором выделено семейство его подмножеств S_j , $j = 1, m$, обладающее таким свойством, что любой элемент множества S принадлежит хотя бы одному из выделенных подмножеств. Физическая интерпретация этого такова: множество струк-

тур S соответствует множеству подграфов, полученных при декомпозиции графа, интерпретирующего принципиальную схему некоторого вычислительного устройства. Это множество подграфов разбито на тождественные группы, образующие семейство подмножеств S_j . Семейству S_j поставлен в соответствие вектор $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, элементы которого показывают, сколько элементов множества S принадлежит каждому из подмножеств семейства S_j . Иначе говоря, элементы данного вектора указывают на количество структур j -го типа. Данное множество S характерно тем, что содержит пересекающиеся группы структур, представляя собой в некотором смысле «конгломерат». Это следует из самого алгоритма декомпозиции, позволяющего получить всевозможные структуры в заданном диапазоне их мощностей. Задача формирования типовых структур заключается в том, чтобы в данном множестве S выбрать такие подмножества из семейства S_j , которым соответствует наибольшее значение элементов вектора \vec{B} , точнее говоря, в набор типовых структур должны войти лишь те подмножества, для которых выполнимо условие $b_j \geq \beta^*$ (величина β^* определена выше). Тот факт, что структуры множества S пересекаются между собой, приводит к тому, что пересекаются между собой и подмножества семейства S_j .

Если производить выбор типовых структур из семейства S_j прямым сравнением элементов вектора \vec{B} с величиной β^* , то полученный набор будет иметь большую избыточность. Это следует из того, что набор типовых структур предполагается использовать для реализации анализируемых схем и схем одного с ними класса, а основным требованием к реализации является требование на непересекаемость структур, т. е. каждый элемент схемы может быть размещен лишь в одном типовом узле.

Таким образом, решение задачи формирования типовых структур должно отвечать следующим основным требованиям:

- 1) в решение могут войти только непересекающиеся подмножества;
- 2) частота повторения подмножеств, вошедших в решение, должна быть не меньше заданного значения величины β^* .

Выбор критерия решения данной задачи обуславливается ее спецификой. Так, если за критерий принять максимум суммарного числа частот повторения каждого типа структур, то это может привести к тому, что в решение войдут структуры малой мощности. Такой подход к решению задачи значительно ухудшил бы результаты анализа. В этом смысле наиболее рациональным является критерий, учитывающий частоту повторения и мощность структур каждого типа. Введя весовые коэффициенты в соответствии с методикой, описанной в [3], можно в каждом конкретном случае варьировать этими параметрами, что делает данную постановку задачи более гибкой. Таким образом, структура каждого типа будет характеризоваться некоторым обобщенным параметром K_{ij} .

Поставим задачу формально. Будем обозначать структуры множества S через i ($i = 1, 2, \dots, n$), а подмножества семейства S_j — через j ($j = 1, 2, \dots, m$).

Введем булевы переменные x_{ij} , имеющие следующий смысл:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я структура } j\text{-го подмножества}^{*1). \\ & \text{вошла в решение,} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

¹⁾ В данной работе понятие подмножества адекватно типу структур.

и матрицы: пересечений $\|b_{ik}\|$ и матрицу $\|l_{ij}\|$, где $b_{ik} = 1$, если i -я структура содержит k -й элемент схемы, и 0—в противном случае; $l_{ij} = 1$, если i -я структура принадлежит j -му подмножеству, и 0—в противном случае. На основе матриц $\|l_{ij}\|$ и $\|b_{ik}\|$ получаем коэффициент a_{ijk} , для которого имеем

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-й элемент входит в } i\text{-ю подструктуру} \\ & j\text{-го подмножества,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В принятых обозначениях задача формирования устойчивых сочетаний заключается в максимизации линейной формы

$$L(x_{ij}) = \sum_i^n \sum_j^m \kappa_{ij} x_{ij} = > \max \quad (1)$$

при условиях:

$$\begin{cases} \sum_i^n \sum_j^m a_{ijk} x_{ij} \leq 1, & \kappa = \overline{1, l}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sum_i^n x_{ij} \geq \beta^*, & j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$x_{ij} = 0; 1, \quad a_{ijk} = 0; 1,$$

$\kappa_{ij} = \gamma_1 b_{ij} + \gamma_2 \delta_{ij}$, γ_1 и γ_2 — весовые коэффициенты ($\gamma_1 + \gamma_2 = 1$);

δ_{ij} — мощность i -й структуры j -го типа,

b_{ij} — количество структур j -го типа.

Условия (2) и (3) соответственно означают, что структуры, вошедшие в решение, не пересекаются и количество структур j -го типа должно быть не меньше заданной величины β^* .

Задача (1—3) может быть сведена к взвешенной задаче покрытия следующим образом.

На основе матриц $\|b_{ik}\|$ и $\|l_{ij}\|$ строим матрицу $\|r_{jk}\|$, где $r_{jk} = 1$, если j -е подмножество включает k -й элемент схемы и 0—в противном случае. Добавим матрице $\|r_{jk}\|$ ($\kappa + 1$)-й столбец, элементами которого являются соответствующие величины вектора B . Матрицу $\|b_{ik}\|$ также расширим, добавив ($\kappa + 1$)-й столбец, элементами которого являются номера соответствующих каждой структуре подмножеств семейства S_j . На основе расширенных матриц $\|r_{jk}\|^*$ и $\|b_{ik}\|^*$ строим матрицу пересечений подмножеств $\|\sigma_{jp}\|_{m \times m}$, где σ_{jp} равен количеству пересечений соответствующих подмножеств. Матрица $\|\sigma_{jp}\|$ является симметрической. Количество столбцов и строк этой матрицы равно количеству подмножеств семейства S_j .

Производим поэлементное сравнение величин матрицы $\|\sigma_{jp}\|$ с величинами соответствующих элементов ($\kappa + 1$)-го столбца матрицы $\|r_{jk}\|^*$, стоящими на пересечении с j -й и p -й строк, на выполнение соотношений:

$$(b_j - \sigma_{jp}) \geq \beta^*, \quad (4a)$$

$$(b_p - \sigma_{jp}) \geq \beta^*. \quad (4б)$$

Если эти соотношения выполняются, то производим расширение матрицы $\|\sigma_{jp}\|$ добавлением ($j + 1$)-го и ($p + 1$)-го строк и столбцов и матрицы $\|r_{jk}\|^*$, добавлением ($j + 1$)-й и ($p + 1$)-й строк²). Элементы новых столбцов и строк матриц $\|\sigma_{jp}\|^*$ и $\|r_{jk}\|^{**}$ получаем следующим образом. В матрице $\|b_{ik}\|^*$ отыскиваются строки, элементы которых, стоящие на пересечении с ($\kappa + 1$)-м столбцом, равны номерам j -й и p -й

²) В случае, когда выполняется одно из соотношений 4а и 4б, производится расширение матриц лишь по одному столбцу и одной строке.

структур. Среди них выбираются пересекающиеся строки, которые суммируются поэлементно. Затем, вычитая поэлементно полученные вектор-строки соответственно из j -й p -й строк матрицы $\|r_{jk}\|^{**}$, получаем элементы $(j+1)$ -й и $(p+1)$ -й строк матрицы $\|r_{jk}\|^{***}$. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и $(k+1)$ -го столбца данной матрицы, равны соответственно элементам, стоящим на пересечении j -й и p -й строк и $(k+1)$ -го столбца матрицы $\|r_{jk}\|^{**}$, уменьшенным на величину σ_{jp} .

Элементы $(j+1)$ -го и $(p+1)$ -го столбцов матрицы $\|\sigma_{jp}\|^{*}$ получаем аналогично получению элементов матрицы $\|\sigma_{jp}\|$. Исключение составляют элементы, стоящие на пересечении этих столбцов и соответственно j -й и p -й строк. Величина этих элементов выбирается таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$\{b_j - \sigma_j, j+1\} < \beta^*, \quad (5a)$$

$$\{b_p - \sigma_p, p+1\} < \beta^*. \quad (5b)$$

В результате описанной процедуры получаем расширенное семейство подмножеств S'_j , обладающее тем свойством, что все его подмножества имеют частоту повторения не меньшую значения величины β^* . Поясним это на конкретном примере.

На рис. 1, где кругами условно обозначены структуры, приведено множество S (1, 2, 3, ..., 27), полученное декомпозицией некоторой схемы Q . В табл. 1 приведены подмножества тождественных структур, образующих семейство S_j , а на рис. 2 иллюстрируется это графически. Следует отметить, что в данном случае не имеет значения, в каких именно элементах пересекаются структуры, а важен сам факт пересечения. Это дает возможность уменьшить число столбцов матриц

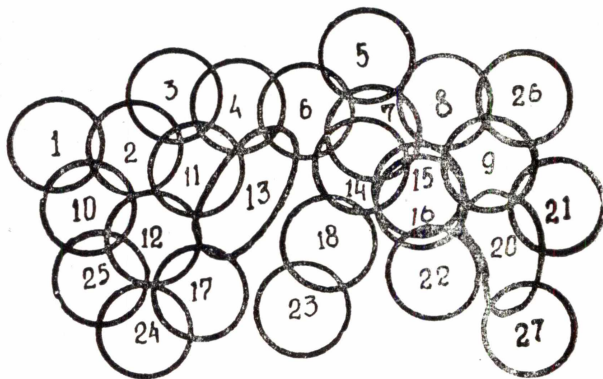


Рис. 1.

Таблица 1

Номера структур	Тип ст-р
1; 11; 25; 17; 5; 9	a
10; 3; 8; 14; 23	b
4; 24; 18; 20; 22	c
12; 6; 21; 15	d
15; 7; 16	f
2; 26; 27	g

$\|r_{jk}\|$ и $\|b_{ik}\|$ за счет удаления тех элементов схемы, которые принадлежат одной структуре, а также за счет того, что пересечения структур можно фиксировать одним элементом. Точки пересечения могут быть пронумерованы произвольно.

Очевидно, что при пересечении нескольких структур, из которых можно выделить попарно непересекающиеся, точки пересечения их третьей структурой должны быть различные. Так, для приведенного рис. 1 пересечения структур 1; 2; 10 можно фиксировать одной точкой, а пересечения структур 1; 2; 3 должны фиксироваться двумя различными точками. На рис. 3, а приведена расширенная матрица $\|b_{ik}\|^{*}$, номера строк которой соответствуют номерам структур данного множе-

ства S , а номера столбцов — номерам точек пересечений. Для данного примера имеем: $i = \overline{1; 27}$; $j = \overline{1; 22}$. Элементы 22-го вектор-столбца соответствуют номерам подмножеств семейства S_j (в данном случае, с целью наглядности, номера подмножеств заменены буквенными обозначениями). Выше отмечалось, что элементы матрицы $\|b_{ik}\|^*$ принимают значения 0,1. Нулевым элементам соответствуют пустые клетки матрицы. На рисунке 3, б приведена матрица $\|r_{ij}\|^*$. Номера строк этой матрицы соответствуют номерам подмножеств семейства S_j , а столбцы соответствуют номерам точек пересечения этих подмножеств. Матрица $\|r_{jk}\|^*$ может быть легко получена из матрицы $\|b_{jk}\|^*$ поэлементным суммированием строк с одинаковым индексом³⁾.

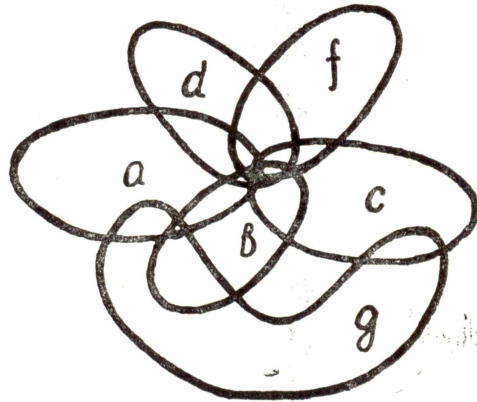


Рис. 2

В данном примере $j = \overline{1, 6}$; $\kappa = \overline{1, 22}$. Элементы 22-го вектор-столбца указывают на количество структур соответствующего вида. На рис. 4(а) приведена матрица пересечений подмножеств семейства $S_j - \|\sigma_{jp}\|_{m \times m}$. Матрица $\|\sigma_{jp}\|$ является квадратной и симметрической. Количество строк и столбцов этой матрицы равно числу подмножеств семейства S_j . В данном примере $j = p = \overline{1, 6}$. Элементы матрицы показывают количество пересечений соответствующих подмножеств

а)

$$\|\sigma_{jp}\| = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & f & g \\ \hline a & 0 & 4 & 4 & 6 & 4 & 3 \\ b & 4 & 0 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ c & 4 & 3 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ d & 6 & 3 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ f & 4 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ g & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

б)

$$\|\sigma_{jp}\|^* = \begin{array}{c|cccccccccc} & a & b & c & d & f & g & a'' & b' & c' & c'' \\ \hline a & 0 & 4 & 4 & 6 & 4 & 3 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ b & 4 & 0 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ c & 4 & 3 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ d & 6 & 3 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ f & 4 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ g & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ a'' & 5 & 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ b' & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ c' & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ c'' & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

³⁾ Суммирование производится по правилам сложения булевой алгебры.

$\|b_{jk}\| =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1																					a
2	1	1																				g
3		1	1																			b
4			1					1														c
5									1													a
6								1	1		1											d
7									1		1			1								f
8														1	1					1		b
9																1	1	1		1	1	a
10	1			1																		b
11		1	1			1																a
12				1	1	1																d
13					1	1																f
14											1	1	1									b
15													1		1	1	1					a
16													1	1			1	1				f
17																						a
18									1	1												c
19																						
20																		1	1		1	c
21																						a
22														1								c
23										1												b
24						1																c
25					1	1																a
26																					1	g
27																				1		g

a)

$\|z_{jk}\| =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a	1	1	1	1	1	1	1		1							1	1	1		1	1	6
b	1	1	1	1						1	1	1	1		1	1					1	5
c				1		1			1	1	1			1				1	1		1	5
d					1		1	1	1	1			1	1	1	1	1				1	4
f							1	1	1	1			1	1	1	1		1	1			3
g	1	1																			1	3

δ)

Рис. 3

Попарной проверкой выполнения соотношения (а, б) для всех элементов матрицы $\|\sigma_{jp}\|$ определяем возможность расширения семейства S_j .

$$\begin{array}{ll} \sigma_{ab}: \left\{ \begin{array}{l} (6-4) < 3 \\ (5-4) < 3 \end{array} \right\} & \sigma_{bf}: \left\{ \begin{array}{l} (5-2) = 3 \\ (3-2) < 3 \end{array} \right\} *b' \\ \sigma_{ac}: \left\{ \begin{array}{l} (6-4) < 3 \\ (5-4) < 3 \end{array} \right\} & \sigma_{cd}: \left\{ \begin{array}{l} (5-2) = 3 \\ (4-2) < 3 \end{array} \right\} *c' \\ \sigma_{ag}: \left\{ \begin{array}{l} (6-3) = 3 \\ (3-3) < 3 \end{array} \right\} & \sigma_{cg}: \left\{ \begin{array}{l} (5-1) > 3 \\ (3-1) < 3 \end{array} \right\} *c'' \end{array}$$

По результатам проверки имеем, что семейство S_j может быть расширено за счет подмножеств a'' , b' , c' , c'' . Ниже представлено расширенное семейство S'_j . На рис. 4, (б) представлена расширенная

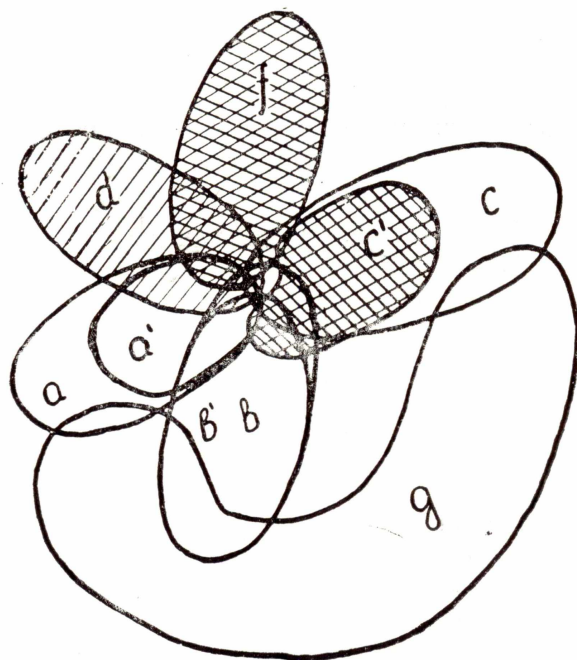


Рис. 4

матрица $\|\sigma_{jp}\|$ *. Частоты повторения подмножеств a'' , b' , c' , c'' соответственно равны 3, 3, 3, 4.

Дальнейшие расчеты показывают, что семейство S'_j может быть также расширено:

$$\begin{array}{ll} \sigma_{ac}^I: \left\{ \begin{array}{l} (6-2) > 3 \\ (3-2) < 3 \end{array} \right\} *a^{III} & \sigma_{ca}^{II}: \left\{ \begin{array}{l} (5-2) = 3 \\ (3-2) < 3 \end{array} \right\} *c^{III} \\ \sigma_{ac}^{II}: \left\{ \begin{array}{l} (6-3) = 3 \\ (4-3) < 3 \end{array} \right\} *a^{IV} & \sigma_{cb}^I: \left\{ \begin{array}{l} (5-2) = 3 \\ (3-2) < 3 \end{array} \right\} *c^{IV} \\ \sigma_{ba}^{II}: \left\{ \begin{array}{l} (5-1) > 3 \\ (3-1) < 3 \end{array} \right\} *b^{II} & \sigma_{ab}^I: \left\{ \begin{array}{l} (4-1) = 3 \\ (3-1) < 3 \end{array} \right\} *d^I \\ \sigma_{bc}^{II}: \left\{ \begin{array}{l} (5-2) = 3 \\ (3-2) < 3 \end{array} \right\} *b^{IV} & \sigma_{dc}^{III}: \left\{ \begin{array}{l} (4-1) = 3 \\ (4-1) = 3 \end{array} \right\} *d^{II} \\ & *c^{VI} \end{array}$$

Определим верхнюю границу расширения семейства S_j . Очевидно, что максимально возможное число расширения равно $p = 2r$, где r зависит от числа пересечений. Для данного примера $p = 26$. В случае, когда все подмножества пересекаются друг с другом,

$$p = 2 \sum C_{n_i}^2,$$

где n_i — количество пересекающихся подмножеств семейства S_j .

Получив расширенное семейство подмножеств, можно задачу формирования типовых структур сформулировать следующим образом: требуется выбрать такую совокупность подмножеств семейства S_j , которая имеет наибольшее суммарное значение величин κ_j (κ_j — тождественно κ_{ij}).

Введем булевы переменные x_j , $j = 1, 2, \dots, l$, где j — номер соответствующего подмножества семейства S_j .

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-е подмножество вошло в решение,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В принятых обозначениях задача формирования типовых структур заключается в максимизации линейной формы

$$L(x_j) = \sum_{j=1}^l \kappa_j x_j \rightarrow \max$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^l a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = \overline{1, \kappa};$$

$$x_j = 0; 1;$$

$$a_{ij} = 0; 1.$$

Таким образом, задача формирования типовых структур свелась к взвешенной задаче о покрытии, которая может быть решена известными методами, в частности методом, предложенным в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретное программирование. М., «Наука», 1969.
2. В. А. Трубин. О методе задач целочисленного программирования специального вида. Доклады АН СССР, т. 189, № 5, 1969.
3. Б. С. Матлис, В. З. Ямпольский. Применение метода ранговой корреляции для определения весовых коэффициентов показателей деятельности вуза. Сб. «Кибернетика и вуз», вып. 2, ТПИ. Томск. 1969.