ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 293 1977

УДК 518 : 517.392

ОЦЕНКА ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Т. КАЛАЙДА, В. К. ЯСЕЛЬСКИЙ

(Представлена научным семинаром физико-технического факультета)

При решении физических задач методами численного анализа наряду с оценкой нижней границы погрешности формул численного интегрирования для правильного выбора типа квадратурной формулы необходимы оценка погрешности интегрирования сверху, которая зависит от коэффициентов квадратурных формул, узлов и числа точек интегрирования.

Рассмотрим произвольную квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{K=1}^{N} C_K f(x_K), \tag{1}$$

где $C_к$ — коэффициенты квадратурной формулы;

$x_к$ — узлы квадратурной формулы;

N — число узлов.

Особый интерес для практики представляет случай, когда функция $f(x)$ периодична, так как часто в приложениях используется представление функции в виде тригонометрических рядов.

Целью данной работы является определение выражения для верхней границы погрешности численного интегрирования для случая периодических функций.

Пусть W_2^m — класс однопериодических функций заданных на интервале $[0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную $m-1$ порядка и производную порядка m, интегрируемую с квадратом.

Как следует из |1|, верхняя граница погрешности квадратурной формулы $R(C_K, x_K, N)$, определяемая соотношением

$$R(C_K, x_K, N) = \sup_{\|f\|_{W_2^m}=1} |(l, f)|, \tag{2}$$

где

$$(l, f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{K=1}^{N} C_K f(x_K),$$

достигается на функции

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{d}} \in W_2^m. \tag{3}$$

Здесь u_1 — периодическое решение уравнения

$$\frac{d^{2m} u_1}{dx^{2m}} = (-1)^m \left[1 - \sum_{K=1}^{N} C_K \delta(x - x_K)\right], \tag{4}$$

где $\delta(x - x_K)$ — дельта-функция Дирака, а

$$d = \sum_{K=1}^{N} C_K u_1(x_K) - \int_0^1 u_1 dx. \tag{5}$$

Рассмотрим решение уравнения (4). Обозначив через u_l периодическое решение уравнения

$$\frac{d^{2m} u_l}{dx^{2m}} = (-1)^m [1 - \delta(x - x_l)] \tag{6}$$

и учитывая, что $\sum\limits_{l=1}^{N} C_l = 1$, можно записать

$$u_1 = \sum_{l=1}^{N} C_l u_l. \tag{7}$$

Так как дельта-функция $\delta(x - x_l)$ на интервале [0, 1] допускает разложение в ряд Фурье согласно [2]

$$\delta(x - x_l) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i (x - x_l)\gamma}, \tag{8}$$

то уравнение (6) согласно (8) можно записать в виде

$$\frac{d^{2m} u_l}{dx^{2m}} = (-1)^m \sum_{\substack{\gamma=-\infty \\ \gamma \neq 0}}^{\infty} e^{2\pi i (x - x_l)\gamma}. \tag{9}$$

Учитывая, что в периодическом случае у краевой задачи (9) граничные условия отсутствуют, решение для u_l получим, проинтегрировав $2m$ раз правую часть данного выражения. Приняв во внимание, что

$$\sum_{\substack{\gamma=-\infty \\ \gamma \neq 0}}^{\infty} e^{2\pi i(x - x_l)\gamma} = \sum_{\gamma=1}^{\infty} e^{2\pi i (x - x_l)\gamma} + \sum_{\gamma=1}^{\infty} e^{-2\pi i (x - x_l)\gamma} =$$

$$= 2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \cos 2\pi (x - x_l)\gamma, \tag{10}$$

и учитывая соотношение (10), для u_l находим

$$u_l = \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi (x - x_l)\gamma}{\gamma^{2m}}. \tag{11}$$

Из выражений (7) и (11) легко получается решение для функции

$$u_1 = \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{l=1}^{N} C_l \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi (x - x_l)\gamma}{\gamma^{2m}}. \tag{12}$$

Из (1) следует

$$R(C_K, x_K, N) = (l, u_2) = -\frac{1}{\sqrt{d}}(l, u_1) = \sqrt{d}. \tag{13}$$

Принимая во внимание, что $\int\limits_0^1 u_1\, dx = 0$ для $R(C_K, x_K, N)$, можно записать

$$R^2(C_K, x_K, N) = d = \sum_{K=1}^{N} C_K u_1(x_K) =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{K=1}^{N} C_K \sum_{l=1}^{N} C_l \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi (x_K - x_l)\gamma}{\gamma^{2m}}. \tag{14}$$

Полученное выражение (14) неудобно для практической оценки погрешностей, так как содержит сумму бесконечного числа членов.

Преобразуем (14) согласно соотношению [3]

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi (x_K - x_l)\gamma}{\gamma^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m}(x_K - x_l), \tag{15}$$

где $B_{2m}(x)$ — полиномы Бернулли.

Учитывая, что $B_{2m}(0) = B_{2m}$ (B_{2m} — числа Бернулли), и выделяя все члены с равными индексами ($K = l$), равенство (14) можно записать в виде

$$R^2(C_K, x_K, N) = \frac{1}{(2m)!} |B_{2m}| \sum_{K=1}^{N} C_K^2 +$$

$$+ \frac{2(-1)^{m-1}}{(2m)!} \sum_{K=1}^{N-1} C_K \sum_{l=K+1}^{N} C_l B_{2m}(x_l - x_K). \tag{16}$$

Для полиномов Бернулли справедливо соотношение [3]

$$B_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_r x^{n-r}, \tag{17}$$

где $\binom{n}{r}$ — число сочетаний из n по r.

Тогда окончательное выражение для верхней границы погрешности квадратурных формул на классе однопериодических функций можно записать

$$R^2(C_K, x_K, N) = \frac{1}{(2m)!} |B_{2m}| \sum_{K=1}^{N} C_K^2 +$$

$$+ \frac{2(-1)^{m-1}}{(2m)!} \sum_{K=1}^{N-1} C_K \sum_{l=K+1}^{N} C_l \sum_{r=0}^{2m} \binom{2m}{r} B_r (x_K - x_l)^{2m-r}. \tag{18}$$

Полученное выражение является удобным для практического пользования.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев. О формулах механических кубатур в n-мерном пространстве. Доклады Академии наук СССР. 1961, том 137, № 3.

2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.

3. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.