

**МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА
СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

Ю. С. МЕЛЬНИКОВ, А. П. ПАРАМЗИН

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

Статья посвящена описанию предложенной авторами методики геометрического построения корневого годографа систем, описываемых уравнением третьего порядка и сравнению ее с существующими методиками построения корневых годографов.

Характеристическое уравнение замкнутых систем, для которых применима разработанная методика, имеет следующий вид:

$$s(s^2 + 2\zeta\Omega_0 s + \Omega_0^2) + cK = 0, \quad (1)$$

где $c = 1/A_0$ — коэффициент, получаемый при переходе к уравнению (1) от уравнения

$$s(A_0 s^2 + A_1 s + 1) + K = 0; \quad (2)$$

$\zeta = \frac{A_1}{2\sqrt{A_0}}$ — декремент затухания системы; предполагается, что

$\zeta \leq 1$, $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{A_0}}$ — частота собственных колебаний.

Известно, что метод корневого годографа, являясь графоаналитическим, обладает большой наглядностью, удобством и широкими возможностями. Корневыми годографами называются траектории, описываемые корнями характеристического уравнения системы в комплексной плоскости корней при изменении одного из параметров от 0 до ∞ . Чаще всего в качестве такого параметра берется коэффициент усиления K .

Существует две методики построения корневого годографа, первая предложена Эвансом [1], а вторая Бендриковым Г. А. и Теодорчиком К. Ф. [2].

Методика построения корневых годографов, предложенная Эвансом, использует основное фазовое уравнение геометрического места корней

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i = \pi(2\kappa + 1), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где θ_i и θ_j^0 — углы, составленные векторами, проведенными из основных точек (i — начальные точки корневого годографа, j — предельные точки) в любую точку геометрического места корней, с положительным направлением оси абсцисс комплексной плоскости; n и m — число полюсов и нулей, соответственно, передаточной функции системы в разомкнутом состоянии.

Если передаточную функцию разомкнутой системы представить в виде

$$KW(s) = cK \frac{\prod (s - N_j)}{\prod_i (s - P_i)}, \quad (4)$$

где c — множитель, появляющийся при этом переходе, N и P — нуль и полюс, соответственно, то можно записать уравнение модулей, которое используется для определения величины свободного параметра K в любой точке построенного корневого годографа

$$K = \frac{1}{c} \cdot \frac{\prod_i l_i}{\prod_j l_j^0}, \quad (5)$$

где l_i и l_j^0 — натуральная длина векторов (с учетом масштаба), проведенных из основных точек в точку, лежащую на к. г. Если передаточная функция не содержит нулей, то

$$K = \frac{1}{c} \cdot \prod_i l_i. \quad (5a)$$

Построение корневых годографов начинается с нанесения на комплексную плоскость полюсов и нулей передаточной функции (4), имея в виду при этом, что m ветвей к. г. оканчиваются в нулях, а $(n - m)$ — уходят в бесконечность. Строят корневые годографы методом проб, который заключается в том, что для каждой предполагаемой точки корневого годографа на комплексной плоскости проверяется уравнение фаз (3). Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет построен целиком годограф, и тем точнее будет выполнено построение, чем тщательнее измеряются углы θ_i и θ_j и чем большее число точек взято. В этом и заключается недостаток методики, предложенной Эвансом.

Методика, описанная Г. А. Бендриковым и К. Ф. Теодорчиком, является аналитической. Вывод уравнения, позволяющего по точкам строить корневые годографы семейства уравнений свободных движений, заданного в виде

$$\Phi_n(s) + K \cdot \Psi_m(s) = 0. \quad (6)$$

основывается на одном тождественном преобразовании целых полиномов от комплексного аргумента $s = \sigma + j\omega$.

Преобразование это имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_n(s) = & \left[\Phi_n(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Phi_n^{II}(\sigma) + \frac{\omega^4}{4!} \cdot \Phi_n^{IV}(\sigma) - \dots \right] + \\ & + j\omega \left[\Phi_n^I(\sigma) - \frac{\omega^2}{3!} \cdot \Phi_n^{III}(\sigma) + \frac{\omega^4}{5!} \cdot \Phi_n^V(\sigma) - \dots \right], \quad (7) \end{aligned}$$

где $\Phi_n^v(\sigma)$ означает v -ю производную от $\Phi_n(s)$ с заменой s на σ . Применим формулу (7) к обоим полиномам общего выражения (6). Приравняв порознь нулю действительную и мнимые части и исключив из этих уравнений свободный параметр K , найдем искомое выражение, связывающее абсциссу σ и ординату ω любой точки $s^* = \sigma + j\omega$ геометрического места корней характеристического уравнения (6):

$$\left[\Phi_n(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Phi_n^{II}(\sigma) + \dots \right] \left[\Psi_m^I(\sigma) - \frac{\omega^2}{3!} \cdot \Psi_m^{III}(\sigma) + \dots \right] - \left[\Phi_n^I(\sigma) - \frac{\omega^2}{3!} \cdot \Phi_n^{III}(\sigma) + \dots \right] \left[\Psi_m(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Psi_m^{II}(\sigma) + \dots \right] = 0. \quad (8)$$

На это равенство можно смотреть как на уравнение, позволяющее по заданной абсциссе σ найти частоты ω , при которых прямая, перпендикулярная к действительной оси, проведенная через любую точку σ , пересекает траектории корней системы (6).

Выражение для вычислений свободного параметра

$$-K = \frac{\Phi_n(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Phi_n^{II}(\sigma) + \dots}{\Psi_m(\sigma) - \frac{\omega^2}{2!} \cdot \Psi_m^{II}(\sigma) + \dots}. \quad (9)$$

Видно, что уравнения (8) и (9), используемые для аналитического построения корневых годографов, сложны, а связанные с ними вычисления трудоемки. Применение аналитического способа построения корневого годографа оправдано лишь в тех случаях, когда характеристическое уравнение (6) имеет высокий порядок, и когда невозможно заранее предсказать примерный вид корневого годографа.

Предлагаемый в данной статье способ построения корневых годографов систем, описываемых уравнением (1), при $\zeta \ll 1$ лишен недостатков, присущих описанным выше методикам.

В процессе исследований было установлено, что окружность с центром в точке a (рис. 1) является единственным геометрическим местом начальных точек семейства корневых годографов, пересекающихся в одной, общей для всех, точке s . Точка s представляет собой полюс замкнутой системы, описываемой уравнением (1). Как видно из построения на рис. 1 $os = as = R$.

Покажем, что для полюса s (рис. 2) выполняется уравнение фаз в любом случае, когда начальные точки корневых годографов принадлежат окружности, описанной из центра a и проходящей через полюс s . В комплексной плоскости полюс s примем за полюс замкнутой системы, описываемой уравне-

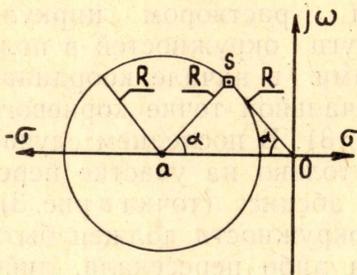


Рис. 1. Геометрическое место семейства корневых годографов, проходящих через фиксированный полюс

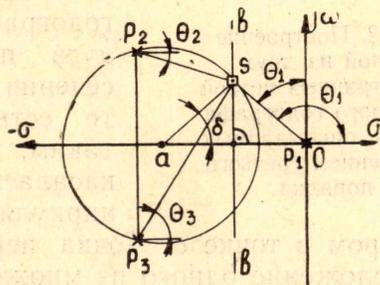


Рис. 2

нием (1).

Строим равнобедренный треугольник aso ($as=os$) и из точки a как из центра описываем окружность, проходящую через полюс s . На проведенной окружности выбираем произвольные комплексно-сопряженные точки P_2 и P_3 . Требуется доказать, что точка s принадлежит корневному годографу с начальными точками P_1, P_2 и P_3 , то есть в точке s выполняется уравнение фаз (3).

Для системы, описываемой уравнением (1), основное фазовое уравнение можно записать

$$-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = -180^\circ, \quad (10)$$

если учесть, что $\theta_1 = 90^\circ + \theta_1^I$, то

$$\theta_3 - \theta_2 = 90^\circ - \theta_1^I. \quad (10a)$$

Применяя ряд аксиом геометрии, нетрудно получить

$$\delta = 360^\circ - [180^\circ + (\theta_2 + \theta_3) + 2(90^\circ - \theta_3)] = \theta_3 - \theta_2. \quad (11)$$

Угол δ равен углу δ — из построения, значит он равен $\theta_3 - \theta_2$, тогда

$$\theta_1^I + \theta_3 - \theta_2 = 90^\circ. \quad (12)$$

Учитывая соотношение $\theta_1^I = \theta_1 - 90^\circ$, можно переписать (12) в виде

$$\theta_1 - 90^\circ + \theta_3 - \theta_2 = 90^\circ$$

или

$$-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = -180^\circ. \quad (12a)$$

Последнее уравнение есть не что иное, как основное уравнение фаз (10), то есть мы доказали, что полюс s принадлежит корневому годографу системы, описываемой уравнением (1), с начальными точками P_1, P_2, P_3 .

По аналогии нетрудно показать, что для любой другой пары начальных точек, расположенных на той же окружности, при неизменном положении полюса s выполняется уравнение фаз (10).

С помощью уравнений фаз можно доказать также, что ни одна точка, расположенная вне рассматриваемой окружности, не является начальной точкой корневого годографа, проходящего через полюс s .

Оговоримся, что начальные точки на окружности могут располагаться только левее вертикальной прямой $b-b$.

На основании доказанного положения предлагается простой и точный способ построения корневого годографа системы третьего порядка, описываемой уравнением (1) при $\zeta \leq 1$.

Произвольным раствором циркуля описываем две дуги окружностей в поле корней с центрами в начале координат и в известной начальной точке корневого годографа P_2 (рис. 3). В последнем случае дуга проводится только на участке пересечения ее с осью абсцисс (точка c рис. 3), то есть радиус окружности должен быть таким, чтобы дуга либо пересекала, либо касалась оси абсцисс. Тем же раствором циркуля проводим третью дугу окружности с центром в точке c . Точка пересечения d дуг окружностей есть

искомое положение одного из множества полюсов корневого годографа замкнутой системы, описываемой уравнением (1). Изменяя радиусы вспомогательных окружностей, можно определить положение других точек корневого годографа, в результате чего построить одну ветвь годографа. Вторая ветвь располагается симметрично первой, поскольку полюсы комплексно-сопряженные. Третья ветвь корневого годографа совпадает с осью абсцисс в левой полуплоскости.

Как видно, построение корневых годографов рассматриваемых систем предложенным способом значительно проще, быстрее и точнее, чем при использовании двух описанных выше методик.

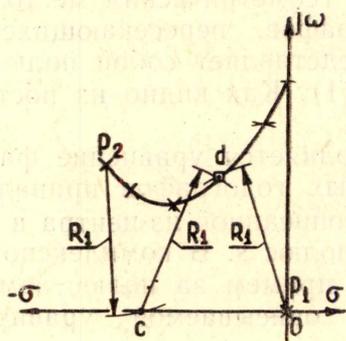


Рис. 3. Построение одной из двух симметричных ветвей корневого годографа систем, описываемых уравнением третьего порядка

Используя разработанный способ построения корневых годографов и методику поиска их начальных точек [3], можно достаточно быстро решить обратную задачу, то есть по заданному положению полюсов замкнутой системы определить параметры исследуемой системы A_0 , A_1 , K . Естественно, что эта задача имеет неоднозначное решение, поэтому необходимо первоначально задать ограничения на величину одного из искоемых параметров. Например, пусть требуется определить параметры A_0 и K , если $A_1' \leq A_1 \leq A_1''$, и задано положение пары комплексно-сопряженных полюсов замкнутой системы.

В первую очередь строим две окружности 1 и 2 (рис. 4) с координатами их центров $(-1/A_1' \pm j0)$ и $(-1/A_1'' \pm j0)$, соответственно, которые являются геометрическими местами начальных точек корневых годографов исследуемого уравнения (1) при $A_1' = \text{const}$ и $A_1'' = \text{const}$ и переменных A_0 . С помощью способа, описанного в данной статье, строим окружность 3 с центром в точке a , которая является единственным геометрическим местом начальных точек семейства корневых годографов, проходящих через заданный полюс s . Окружность 3 пересекла окружности 1 и 2 в двух парах комплексно-сопряженных точек P_2', P_3' и P_2'', P_3'' , которые являются граничными для совокупности начальных точек из всего семейства, расположенного на окружности 3.

Теперь нетрудно определить значения параметра A_0 , соответствующие граничным значениям параметра A_1 . Для этого через найденные начальные точки P_2' и P_2'' проводим окружности 4 и 5 с центрами в начале координат до пересечения их с мнимой осью в точках Ω_0' и Ω_0'' . Определенные таким путем собственные частоты связаны с параметром A_0 следующими соотношениями:

$$A_0' = \frac{1}{(\Omega_0')^2}; \quad A_0'' = \frac{1}{(\Omega_0'')^2}. \quad (13)$$

A_0' и A_0'' есть не что иное, как граничные значения параметра A_0 . Значение коэффициента усиления K в полюсе s каждый раз меняется и зависит от того, в каком месте дуги $P_2'P_2''$ мы возьмем начальную точку корневого годографа. Крайним положениям начальных точек корневых годографов соответствуют граничные значения K' и K'' , которые определяются с помощью уравнения модулей (5а). Например,

$$K'' = A_0'' \cdot l_1'' \cdot l_2'' \cdot l_3'' \quad (а)$$

и аналогично

$$K' = A_0' \cdot l_1' \cdot l_2' \cdot l_3'. \quad (14)$$

$$K' = A_0' \cdot l_1' \cdot l_2' \cdot l_3'. \quad (б)$$

Таким образом, очевидно, что задачи подобного типа могут быть легко решены с помощью предложенного способа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Г. Удерман, Метод корневого годографа в теории автоматического управления. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
2. Г. А. Бендриков, К. Ф. Теодорчик. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
3. Ю. С. Мельников, А. П. Парамзин. О применении метода корневого годографа к синтезу объединенных следящих систем. Статья в настоящем сборнике.

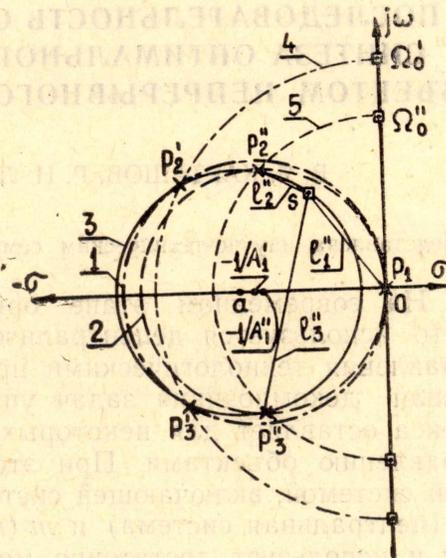


Рис. 4