

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный индустриальный университет»

На правах рукописи

Сарычев Владимир Дмитриевич

**Механизмы и модели процессов формирования градиентных структур
в материалах при внешних энергетических воздействиях**

Специальность

1.3.8 – физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н., профессор
Громов Виктор Евгеньевич

Новокузнецк – 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
Глава 1. Современное состояние исследований формирования градиентных структур в материалах при внешних энергетических воздействиях	17
1.1. Моделирование процессов формирования нано- и микроструктур при внешних энергетических воздействиях	17
1.1.2 Механизм образования структурно-фазовых состояний при воздействии гетерогенных потоков плазмы.....	17
1.1.2 Термокапиллярная модель образования поверхностно-периодических структур.....	20
1.2. Моделирование образования градиентных структур при электронно-пучковой обработке.....	23
1.3. Модели формирования градиентных структурно-фазовых состояний стального проката при термомеханической обработке.....	32
1.4. Физические механизмы и математические модели гидродинамических процессов при электродуговой наплавке	35
1.5. Моделирование воздействия внешних механических нагрузок на градиентные структуры	44
Выводы по главе.....	46
Глава 2. Гидродинамические неустойчивости в коротковолновом приближении.....	49
2.1. Основное уравнение линейной теории	49
2.2. Капиллярные волны на поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости	53
2.2.1. Классические результаты	53
2.2.2. Параметризация дисперсионного уравнения для капиллярных волн на поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости.....	55

2.3. Неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Релея-Тейлора.....	58
2.3.1. Постановка математической задачи.....	59
2.3.2 Вывод дисперсионного уравнения для конечных слоев, когда вязкость учитывается в первом слое.	62
2.3.3 Дисперсионное уравнение для конечных слоев, когда вязкость учитывается на границе.....	64
2.3.4. Коротковолновое приближение.....	65
2.4. Анализ дисперсионного уравнения для термокапиллярной неустойчивости полубесконечного слоя	77
2.4.1. Вывод дисперсионного уравнения	79
2.4.2. Коротковолновое приближение.....	83
Глава 3. Формирование поверхностных градиентных структур с помощью электрического взрыва фольги при коаксиальном расположении электродов.....	85
3.1. Аппаратурное и методическое обеспечение формирования гетерогенных плазменных потоков.....	86
3.2. Результаты экспериментальных исследований.....	88
3.3. Результаты исследований по деформированию невзрывающихся пластин	92
3.4. Математическая модель формирования гетерогенных плазменных потоков	95
3.5 Численная модель формирования гетерогенных плазменных потоков	104
Выводы по главе.....	108
Глава 4. Моделирование создания градиентных структур при электронно-пучковой обработке	110

4.1. Математическая модель теплового воздействия электронных пучков	111
4.2 Генерация термоупругих волн при импульсном нагреве	117
4.3 Диффузионная модель растворения углерода в жидком титане	127
Выводы по главе	132
Глава 5. Модели формирования структурно-фазовых состояний сталей при термомеханической обработке	134
5.1. Модель прерывистого теплового воздействия на поверхность	137
5.2. Расчет температурных полей проката в промышленных условиях	142
5.3. Методика расчета коэффициента теплоотдачи	145
5.4. Нахождение температурных полей для арматуры диаметрами 10 -30 мм	149
5.5. Нахождение температурных полей для арматуры диаметром 40-60 мм	152
5.6. Нахождение температурных полей профильного проката	157
5.7. Механизмы ускоренного охлаждения проката	163
5.8. Построение изотермических диаграмм распада переохлажденного аустенита низкоуглеродистых сталей	171
5.9. Алгоритм расчета структурно-фазового состава при неизотермических условиях	172
5.10. Кинетика распада аустенита	175
Выводы по главе	178
Глава 6. Физические механизмы и модели процессов при электродуговой наплавке	180
6.1. Моделирование течения в системе «электрод - плазменная струя – подложка»	180

6.2. Модель формирования капель микро- и нанометрового диапазона	186
6.3. Моделирование конвективных процессов в ванне расплава.....	199
6.4. Модель растворения легирующих элементов в ванне расплава	208
Выводы по главе.....	215
Глава 7. Моделирование воздействия внешних механических нагрузок на градиентные структуры	217
7.1. Модель воздействия статической контактной нагрузки на градиентную структуру материалов.....	219
7.2. Модель воздействия статической контактной нагрузки на градиентную структуру (трехмерный случай)	233
7.3. Напряженно-деформированное состояние градиентного материала при действии наклонной контактной нагрузки.....	243
Выводы по главе.....	248
ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ	250
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	256

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. В настоящее время воздействие внешней энергии на конденсированные среды является важнейшим способом обработки изделий, способствующим развитию новых технологий формирования градиентных структурно-фазовых состояний микро- и наномасштаба. Несмотря на обширные исследования, проводимые более 50 лет, эти технологии дали меньший эффект, чем ожидалось. Это связано с разнообразием физических процессов, происходящих в течение относительно короткого периода времени: нагрев и охлаждение материала, структурные и фазовые превращения, плавление и испарение поверхностных слоев, распространение упругих и упруго-пластических волн, гидродинамические потоки в расплавленном слое и другие. Хотя многие закономерности этих процессов установлены, ряд экспериментальных результатов можно объяснить только на качественном уровне.

В связи с возникающими научно-промышленными задачами создания материалов с высоким комплексом физико-механических свойств, постоянно растущим интересом к композиционным материалам и материалам с градиентными структурами, и в более глобальном плане, к научной области изучения градиентных структурно-фазовых состояний в твердых телах, позволяющих им приобретать новые, ранее недоступные свойства, вполне закономерен. Они формируются в условиях различных видов дифференцированной обработки, когда механическое воздействие и/или тепловое поле распределены по объему заготовки не равномерно, а локализованы в ее отдельных слоях.

Одним из методов комплексного исследования таких сложных проблем является математическое моделирование, которое позволяет на основе накопленных теоретических представлений и данных экспериментальных исследований получать результаты, количественно характеризующие влияние параметров системы на определяющие физические и механические свойства изделий. Поэтому разработка совокупности математических моделей, описывающих процессы на различных стадиях, с целью вскрытия механизмов явлений, выявления управляющих факторов и определения оптимального диапазона их изменения для создания градиентных структур является актуальной задачей физики конденсированного состояния.

В последние три десятилетия внимание исследователей в области физического материаловедения привлечено к изучению и созданию наноструктур за счет различных внешних энергетических воздействий, обеспечивающих комплекс повышенных эксплуатационных свойств. Имеющиеся к настоящему времени результаты носят частный характер и не дают возможности сделать серьезные обобщения о природе и основных закономерностях поведения наноструктур при различных внешних энергетических воздействиях. Анализ формирования наноструктурных образований в материалах в результате развития неустойчивостей в микро- и наномасштабах равновесных состояний в поверхностных слоях при различных внешних энергетических воздействиях является актуальным и принципиально новым.

Степень разработанности темы. Экспериментальные и теоретические исследования сдвиговой неустойчивости Кельвина-Гельмгольца ведутся более 150 лет на различных масштабных уровнях: от галактического до нано метрового. При численном исследовании дисперсионного уравнения неустойчивости Кельвина-Гельмгольца вязкой

жидкости установлено, что существуют два режима неустойчивости – аэродинамический и вязкостный. Показано, что существуют параметры, при которых на зависимости инкремента от волнового числа возникают два локальных максимума, один из которых соответствует аэродинамической неустойчивости, где вязкость незначительна, а второй – обусловлен вязкостью. При этом, условия возникновения двух максимумов не достаточно определены и не получены выражения значений длин волн, при которых реализуются максимумы.

Тема диссертации соответствует критической технологии РФ «Технологии получения и обработки конструкционных наноматериалов» и приоритетному направлению науки, технологий и техники в РФ «Индустрия наносистем».

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом НИР Сибирского государственного индустриального университета в рамках: целевой государственной программы Госкомитета РФ «Социально-экономические проблемы научно-технического прогресса Кузбасса»; региональной программы Минобразования РФ «Кузбасс»; подпрограммы «Новые материалы»; единого заказ-наряда Минобразования РФ 1995-2002 гг.; двух конкурсов грантов Минобразования РФ по фундаментальным проблемам металлургии, раздел «Металловедение. Порошковая металлургия»; ФЦП «Интеграция», 1996-2001 гг; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракты №№ П332, 14.740.11.0693, 14.740.11.0813, 02.740.11.0538 и 14.740.12.0858). Настоящая работа выполнялась при поддержке грантов Российского научного фонда (проекты №15-19-00065, №15-12-00010), Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 08-02-00024-а, 10-07-00172-а, 15-08-03411а, 16-43-700659 р_а и 16-48-420530 р_а) и государственного задания Минобрнауки №3.1283.2017/4.6.

Цель работы. Установить механизмы формирования градиентных структур в материалах при внешних энергетических воздействиях на основе создания комплекса физико-математических моделей.

Для достижения цели сформулированы следующие задачи:

1. Получить явные приближенные аналитические зависимости инкремента от волнового числа, позволяющие параметризовать экспериментальные результаты поведения сдвиговых неустойчивостей на микро- и наноразмерных масштабах.
2. Экспериментально исследовать процессы, возникающие при электрическом взрыве фольги с торцевой геометрией подводящих электродов, определить характерные параметры и структуру получаемого гетерогенного плазменного потока и разработать физико-математическую модель формирования гетерогенного плазменного потока.
3. Разработать физико-математические модели образования поверхностно-периодических и наноструктур при воздействии гетерогенных плазменных потоков.
4. Предложить механизмы и создать математические модели процессов образования градиентных структур, возникающих при прерывистой закалке проката.
5. Разработать физико-математическую модель распределения температурных полей и образования частиц карбида титана при растворении графита в жидком титане под действием микросекундных импульсов концентрированных потоков энергии.
6. Провести исследование методами численного моделирования тепло-гидродинамических процессов при сварке и наплавке и обосновать роль неустойчивостей в формировании градиентных структур.

7. Провести теоретический анализ и расчет напряжений, возникающих в переходной зоне материала с градиентной структурой, для оценки возможностей повышения эксплуатационных свойств изделий с градиентными структурами.
8. Провести сопоставление расчетных и экспериментальных данных и установить аналитические и численные зависимости для определения параметров и режимов технологических установок и процессов с использованием концентрированных потоков энергии.

Методы выполнения работы. Методы вычислительного эксперимента, математического моделирования, методы регистрации быстропротекающих процессов, методы и модели математической физики, гидродинамики и теории упругости, современные компьютерные технологии в пакете программ COMSOL Multiphysics 5.1.

Научная новизна

1. Впервые получены явные приближенные аналитические зависимости инкремента от волнового числа, позволяющие параметризовать экспериментальные результаты поведения сдвиговых неустойчивостей на микро- и наноразмерных масштабах. Было доказано, что вязкость вещества играет фундаментальную роль в образовании и формировании наноразмерных структур и способствует появлению вихревых структур, являющихся предвестниками образования структурных элементов.
2. Предложена методика фоторегистрации профиля плазмы при торцевом электрическом взрыве фольги. Определена зависимость координаты кольцевой зоны от времени. Разработана математическая модель, описывающая динамику развития кольцевой зоны на основе законов изменения массы и импульса с учетом

тепловых газодинамических и магнитодинамических сил и усреднения по пространству.

3. Предложен механизм и разработана математическая модель формирования поверхностно-периодических и наноструктур в расплавленном слое металла при воздействии гетерогенного плазменного потока на основе анализа краевой задачи, включающей линеаризованные уравнения Навье-Стокса. Получены диапазоны параметров образования нанослоев при развитии неустойчивости Кельвина-Гельмгольца.
4. Предложены механизмы и разработана математическая модель расчета параметров теплового потока для технологии прерывистой закалки проката. Создана программа расчетов формирования градиентных структурно-фазовых состояний при термомеханическом упрочнении проката.
5. Предложены механизмы и разработаны математические модели температурно-концентрационных полей при воздействии электронных пучков. Выявлены закономерности формирования частиц карбида титана при растворении графита в жидком титане за микросекундные отрезки времени при воздействии концентрированных потоков энергии.
6. На основе анализа численных расчетов в системе «электрод – дуга – ванна расплава» выявлено образование вихревой зоны вблизи торца электрода и установлен характер вихревой зоны ванны расплава от характера изменения коэффициента поверхностного натяжения
7. Разработан численно-аналитический алгоритм расчета нормальных и касательных напряжений, возникающих в переходной зоне материала с градиентной структурой. Выявлены закономерности

изменения нормальных и касательных напряжений в зоне контакта двух разнородных материалов в широком диапазоне параметров.

Теоретическая и практическая значимость работы. На основе полученных результатов теоретических и экспериментальных исследований:

1. Были получены явные приближенные аналитические зависимости прироста от волнового числа для неустойчивости Кельвина - Гельмгольца, позволяющие параметризовать экспериментальные результаты по поведению сдвиговых неустойчивостей микро- и нано- уровнях.
2. Разработана методика фоторегистрации профиля гетерогенного плазменного потока при торцевом взрыве электрической фольги.
3. Получены результаты моделирования температурных полей и распределения структуры и фазового состава в процессе термоупрочнения проката, используемые АО «Евраз - объединенный ЗСМК» для определения зон структурно-фазовых превращений в прокате при ускоренном охлаждении и сокращения сроков разработки технологических режимов.
4. Создан комплекс программ расчета процессов при сварке и наплавке, с помощью которого получены распределения полей скоростей, плотности электротока и температуры в системе «электрод – дуга – ванна расплава», которые используются для определения выбора материала электрода.
5. Математические модели и результаты моделирования используются в Сибирском государственном индустриальном университете при чтении курсов лекций: физика сплошных сред, методы математического моделирования.

Полученные результаты работы могут найти практическое применение:

- при создании промышленных установок по поверхностному упрочнению деталей с целью повышения эксплуатационных свойств;
- при разработке и создании новых технологий микролегирования металлов;
- для разработки технологических режимов поверхностной закалки сортового проката и рельсов.
- для создания наноструктурных поверхностных слоев в условиях мегапластической деформации.
- для разработки технологических режимов создания микро- и наночастиц в аддитивных технологиях.

Основные положения, выносимые на защиту

Разработан актуальнейший и почти материальный объект, который определяет лицо всей работы, и поэтому он объявлен первым.

Формирование градиентных структур основано на принципе их эволюции через различные неустойчивости, характеризующейся максимальной длиной волны.

1. На защиту выносятся математические модели формирования градиентных структур, основанные на анализе дисперсионных уравнений неустойчивостей Кельвина – Гельмгольца, Релея – Тейлора и Марангони, позволяющие объяснить формирование микро- и нано-масштабных структур при внешних энергетических воздействиях (гетерогенные плазменные потоки, электронно-пучковая обработка, ускоренное охлаждение проката и в системе колесо-рельс). Способность вязко обусловленного максимума неустойчивости Кельвина-Гельмгольца описать микро- и наноструктуры при низких скоростях скольжения. Доказана работоспособность моделей.
2. Экспериментальные и теоретические исследования процессов при электрическом взрыве фольги с торцевой геометрией подводящих электродов, с определением структуры получаемого гетерогенного плазменного потока.

3. Концептуальные физические представления о механизмах формирования градиентных структур при воздействии гетерогенных плазменных потоков и электронных пучков на вещество, которые позволяют прогнозировать тепловые поля, генерацию термоупругих волн, образование поверхностно-периодических и объёмных микро и нано структур.
4. На основе представлений о механизмах формирования градиентных структур при охлаждении движущегося проката созданы математические модели процессов образования структурно-фазовых превращений при распаде аустенита и проведена их верификация. На защиту выносятся объяснение высокого коэффициента теплопередачи на основе образования капель микро размерного диапазона за счет вязко-обусловленной неустойчивости Кельвина-Гельмгольца.
5. На защиту выносятся механизмы гидродинамических процессов при сварке и наплавке в системе электрод – капля – дуга – ванна расплава. Показано, что распад струи на капли описывается вязко обусловленным максимумом в цилиндрической геометрии вязкой неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Доказана возможность прогнозирования режимов перемешивания в ванне расплава на основе использование неустойчивости Марангони.
6. Разработаны и проверены модели воздействия внешних механических нагрузок на многослойные структуры. Они основаны на теории упругости с использованием матрицы перехода между слоями. Установлены распределения касательных и нормальных напряжений вдоль границы упрочнённый слой – подложка в зависимости от соотношения механических свойств.

Автору принадлежит: постановка задач исследований; разработка методики экспериментального исследования процессов; создание механизмов образования наноструктур при воздействии концентрированных потоков энергии, разработка математических моделей, численных и численно-аналитических алгоритмов расчета; реализация на ЭВМ моделей, алгоритмов, проведение вычислительных экспериментов и анализ результатов.

Соответствие диссертации паспорту специальности.
Диссертационная работа по своим целям, задачам, содержанию, методам

исследования и научной новизне соответствует специальности 01.04.07. - Физика конденсированного состояния: пп. 1 и 7 («Теоретическое и экспериментальное изучение физической природы свойств металлов и их сплавов, неорганических и органических соединений, диэлектриков и в том числе материалов световодов как в твердом, так и в аморфном состоянии в зависимости от их химического, изотопного состава, температуры и давления», п. 7 «Технические и технологические приложения физики конденсированного состояния»)

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на конференциях, семинарах и совещаниях: I, II Всесоюзная конференция «Действие электромагнитных полей на пластичность и прочность металлов и сплавов» (Юрмала, 1987, 1990 г.); Всесоюзная конференция «Методы диагностики двухфазной и реагирующих потоков» (Алушта, 1988 г.); Междунар. Семинар «Физико-математическое моделирование систем», Воронеж, (2009 – 2012); Межд. конференция по физической мезомеханике, компьютерному конструированию и разработке новых материалов», Томск, 2011; Межд. конф. «Взаимодействие излучений с твердым телом», Минск, 2011; VII International Conference «Plasma Physics and Plasma Technology», Minsk, 2012.; International Scientific Conference on Radiation-Thermal Effects and Processes in Inorganic Materials, RTER, Томск, 2015 г.; «Advanced Materials in Technology and Construction», Томск, 2016; «XII International Conference Radiation-Thermal Effects and Processes in Inorganic Materials», Томск, 2017 г.; XI Всероссийская конференция молодых ученых "проблемы механики: теория и новые технологии", Новосибирск - Шерегеш, 2017 г.; VII Международная конференция, «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов», Москва, 2017 г.; Международная конференция «Перспективные материалы с Международная конференция «Материалы с многоуровневой иерархически организованной структурой и интеллектуальные производственные технологии». Томск, 2021; Международная научная конференция. Актуальные проблемы прочности Минск, 2022; VIII Всероссийская конференция по наноматериалам. Москва, 2023; XXIX Всероссийская конференция с международным участием «Высокоэнергетические процессы в механике сплошной среды», посвящённая 85 летию академика В.М. Фомина, Новосибирск, 2025; XXVIII Международная научно-техническая конференция Уральской

школы металловедов-термистов, посвящённая 100-летию со дня рождения Л.И. Тушинского, Новосибирск, 2026 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в пяти монографиях и в 30 статьях из перечня ВАК российских рецензируемых журналов, 16 статьях в иностранных журналах, индексируемых в базах данных Scopus и WoS, получено одно авторское свидетельство на изобретение.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка цитируемой литературы и актов о внедрении. Содержание изложено на 286 страницах, включая 23 рисунка и пять таблиц. Список используемой литературы содержит 260 наименований.

ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ФОРМИРОВАНИЯ ГРАДИЕНТНЫХ СТРУКТУР В МАТЕРИАЛАХ ПРИ ВНЕШНИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

1.1 Моделирование процессов формирования нано- и микроструктур при внешних энергетических воздействиях

1.1.2 Механизм образования структурно-фазовых состояний при воздействии гетерогенных потоков плазмы

Первоначальный интерес к теме формирования наноструктурных образований возник при исследованиях воздействия гетерогенных потоков плазмы (ГПП) электрического взрыва проводников на поверхности металлов [1], где показано, что в них образуется многослойная градиентная структура по мере удаления от поверхности обработки (рисунок 1.1).

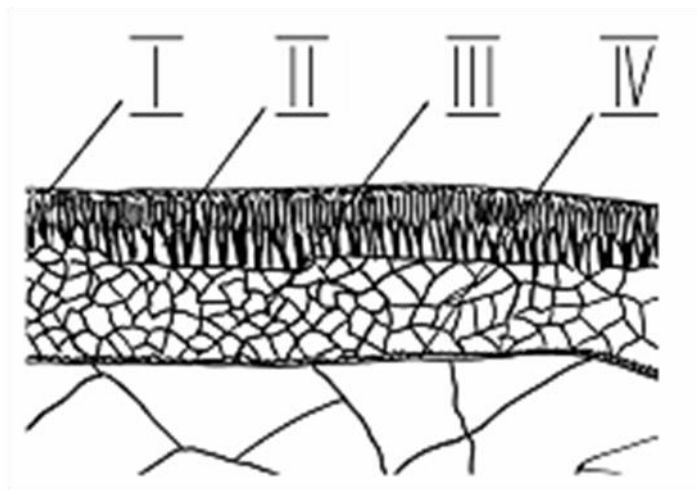


Рисунок 1.1 – Схема четырех структурных зон

Первый наноструктурный слой (I) толщиной ~ 1 мкм контактирует с плазмой набегающего потока. Второй слой (II) со структурой ячейчатой кристаллизации имеет размеры ячеек вдоль вертикального направления

значительно больше, чем вдоль горизонтального. Третий слой (III) – с приблизительно равными продольными и поперечными размерами зерен. Четвертый – внутренний наноструктурный слой (IV) толщиной ~ 1 мкм. Эти экспериментальные факты, а именно наличие двух нанослоев, стали предметом теоретических исследований. Внешний нанослой можно объяснить значительным теплоотводом, и соответственно, большой скоростью охлаждения. Однако при этом требуется создание определенных условий, чтобы достичь таких больших скоростей охлаждения, что трудно осуществить. Внутренний нанослой в рамках тепловой модели смоделировать не удалось. Более того, этот слой считался артефактом. Исследование продуктов, полученных методом быстрой закалки из расплава с использованием вращающегося диска (спиннинговое), выявило наличие четырех структурных зон, согласно [2]. Зона, непосредственно контактирующая с закалочной поверхностью, или зона замораживания, отличается микродисперсной структурой. Считается, что она образуется в результате множественного зарождения кристаллов. Вторая зона, – зона столбчатых кристаллов – сильно вытянутых зерен. В третьей зоне идет формирование дендритной или дендритно-ячеистой структур. Четвертая, – область равноосных случайно ориентированных нанозерен.

Таким образом, выявленная структура, показанная на рисунке 1, является не уникальной, сформировавшейся при ГПП. Подобная структура может стать универсальной при воздействии концентрированных потоков энергии, как стала в своё время структура перлита при квазиравновесных режимах воздействий. Эта структура обладает высокой твердостью, износостойкостью и адгезией с основным материалом, что позволяет считать методы формирования подобных структур перспективными для

упрочнения и защиты изделий, работающих в высоконагруженных условиях и ответственного назначения.

В работе [3] предложено объяснять первый наноструктурный слой на основе механизма развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (НКГ) в наноразмерном диапазоне при тангенциальном течении плазмы и расплавленного слоя металла. Слой плазмы моделируется идеальной жидкостью, а расплавленный слой вязкой жидкостью.

Среди перспективных импульсных методов обработки материалов выделяется метод, основанный на воздействии продуктов электрического взрыва проводников. Этот процесс, использующий коаксиально расположенные электроды, генерирует гетерогенные плазменные потоки (ГПП), состоящие из твердых частиц и газо-плазменной составляющей. Порошок, помещенный в зону взрыва, под действием высоких давлений приобретает скорость около 1 км/с. Направляющий канал формирует этот поток, который затем воздействует на поверхность обрабатываемой детали. Таким образом, данный метод позволяет модифицировать поверхность путем внесения различных порошков, что открывает возможности для создания образцов с заданными свойствами.

При воздействии ГПП материал образца расплавляется на определенную глубину, и поэтому конденсированная составляющая проникает в поверхностные слои, производя тем самым легирование. Поэтому данный метод получил название электровзрывное легирование (ЭВЛ) [1].

Метод ЭВЛ включает в себя следующие процессы:

электрический взрыв – электрические разряд и образование металлической плазмы, разлет плазмы под действием теплового и магнитного давлений и ускорение порошка плазмой);

- образование гетерогенного плазменного потока в канале;

- действие гетерогенного потока на поверхность;
- проникновение частиц ускоренного порошка в поверхностный слой;
- тепловое влияние на материал образца;
- испарение и расплавление материала поверхностного слоя;
- гидродинамическое течение в расплавленном слое;
- затвердевание расплавленного сплава;
- структурно-фазовые превращения в зоне термического влияния.

Из представленных физических процессов наиболее важное значение имеют процессы, приводящие к созданию прерывистого воздействия на мишень и формирование микро- и нанорельефа.

1.1.2 Термокапиллярная модель образования поверхностно-периодических структур

В экспериментах по модификации металлов импульсными плазменными струями, сформированными при электровзрыве проводников, обнаружены так называемые поверхностно-периодические структуры (ППС) [5]. Они имеют характерную для каждого металла длину волны (10 – 100 мкм). Их возникновение обусловлено неустойчивостью поверхности раздела плазма – расплавленный металл. Эволюция этой поверхности определяется действием капиллярных, термокапиллярных, концентрационно-капиллярных сил, а также сил давления со стороны плазмы. Процессы испарения могут играть определенную роль в формировании поверхностного рельефа. Кроме указанных масштабов ППС, экспериментально обнаружены наноструктурные слои на поверхности расплава, механизм которых можно связать с возникновением неустойчивости с длиной волны порядка 10 нм [3, 6].

Указанные экспериментальные факты можно объяснить в рамках модели вязкого теплопроводного слоя несжимаемой жидкости с соответствующими граничными условиями. Это модель представляет собой пример открытой диссипативной конденсированной среды, накачку энергии в которой осуществляют энергия плазменного потока, термо - и концентрационно-капиллярные силы, а диссипацию – силы вязкого трения. Неустойчивость поверхности и индуцированное конвективное течение оказывают значительное влияние на процессы тепло-массообмена в слое.

Теоретическому рассмотрению течения в вязких пленках посвящено значительное число работ [7–12]. В основном анализ течения производился в рамках длинноволнового приближения. Система уравнений Навье-Стокса в этом случае сводилась к одному уравнению для амплитуды волны, которое в том или ином приближении приводило к известным уравнениям (Кортевега-де Фриза, Курамото-Судзуки, нелинейному уравнению Шредингера и т.п.). Этот этап теоретических исследований внес существенный вклад в понимание и моделирования процессов тепломассопереноса в вязких пленках.

Сегодня применяются новые подходы. В работах Ю.Я. Трифонова [13, 14] ищутся стационарные решения с использованием полных уравнений Навье-Стокса, и исследуется их устойчивость. Используется разложения Фурье по продольной и по полиномам Чебышева по поперечной координатам. Из расчетов нелинейных волновых режимов следует существование внутренних вихревых зон, а также найдены течения принципиально, отличающиеся от течения Капицы. В публикациях Григорьева А.И. с сотрудниками [15–18] рассматриваются течения вязкой электропроводной жидкости. Общим для этого цикла работ является тщательное изучение линейной задачи (получение и анализ дисперсионного уравнения). С помощью асимптотического метода ищется

решения задачи определения профиля нелинейной периодической волны на основе полных уравнений Навье-Стокса. Малым параметром является отношение амплитуды волны к длине волны. Найдено, что вихревая компонента движения возникает не только у свободной поверхности, но и у твердого дна. Указаны ограничения на использование погранслоного приближения. В [19] рассматриваются течения жидких сред в неклассических моделях конвекции. Классическая модель Буссинеска становится неприемлемой в отсутствии гравитации (или при малых временах воздействия) и на микромасштабах. Модификация основных уравнений связана с предположением зависимости плотности от температуры и давления. В отличие от газов эта зависимость выбирается таким образом, что значительные вариации температуры и давления приводят к малым изменениям плотности. При рассмотрении микроконвекции в плоском слое со свободной границей сформулирована линейная краевая задача, анализ которой в общем виде проведен в длинноволновом приближении. Для конкретного материала приведено численное решение сформулированной задачи, которое сравнивается с решением задачи вязкой теплопроводной жидкости с учетом термокапиллярности [20]. В отсутствие силы тяжести эти два решения практически совпадают. Таким образом, современный период развития течения в пленках можно охарактеризовать, во-первых, переходом от параболического профиля продольной скорости Капицы и множеством простых нелинейных уравнений к более многообразным структурам, получаемых как комбинации полиномов Чебышева. А во-вторых, стремлением учесть большее число физических эффектов на фоне конвективного течения (заряженные жидкости, термокапиллярность и т.д.).

1.2 Моделирование образования градиентных структур при электронно-пучковой обработке

В настоящее время концентрированные потоки энергии широко используются для обработки поверхности различных материалов [21–25]. К их числу относятся низкоэнергетические сильноточные электронные пучки микросекундной длительности, воздействие которых может вызывать упрочнение поверхностного слоя [22], сглаживание рельефа поверхности [23], формирования микро и нанокристаллических состояний материалов [24–26]. К основным преимуществам электронно-лучевой обработки следует отнести [27]: возможность широкого регулирования режимов и тонкого управления тепловыми процессами; пригодность для обработки металлических и неметаллических материалов; высокий коэффициент полезного действия (до 98 %); возможность автоматизации процесса.

Перспективным методом модификации поверхности является метод комбинированной обработки, включающий обработку гетерогенными плазменными потоками, созданными электрическим взрывом проводников и последующее воздействие электронным пучком [28–30]. Значительные успехи в получении уникальных характеристик модифицированных поверхностей комбинированным методом на лабораторных образцах приводит к необходимости их внедрения в производство изделий, работающих в экстремальных условиях. На этом пути необходимо проводить широкомасштабные исследования, определяющие зависимости эксплуатационных параметров изделий от технологических параметров метода комбинированной обработки. Для сокращения времени таких исследований требуются разработки механизмов и создания математических моделей процессов комбинированной обработки материалов: передача тепла мишени, генерация волн напряжения,

структурно-фазовые превращения в жидком и твердом состоянии, гидродинамические течения в расплавленном слое.

Почти 20 лет назад впервые были предложены математические модели тепловых и термоупругих процессов при воздействии электронных пучков [31, 32]. В [33] приведен анализ современного состояния экспериментальных и теоретических исследований по модификации конструкционных материалов интенсивными потоками заряженных частиц и плазмы. При этом используются: кинетическое уравнение для моделирования взаимодействия КПЭ с веществом, уравнения механики сплошной среды (изменения массы, импульса и энергии) для материала мишени и широкодиапазонное уравнение состояния.

Наиболее полно изучены в этом направлении процессы, связанные с моделированием тепловых явлений с учетом испарения [34–36]. При этом созданы модели и комплексы программ, обеспечивающие детальную информацию для разработки определенных технологий. В [34] рассматривались задачи о тепловом воздействии на мишень лазерного излучения, при котором реализуется испарение и разлет пара. Эта сложная задача о газодинамическом течении в факеле испаренного вещества и тепловых процессах в мишени. При этом отслеживанию фронта плавления не уделено должного внимания. В работе [35] моделируется поле температур и скорость испарения при магнетронном воздействии на мишень. Поле температуры и скорость испарения рассчитываются при решении краевой задачи уравнения теплопроводности и граничных условий, учитывающих скорость испарения. При этом скорость испарения рассчитывается с помощью уравнения Герца–Кнудсена, но процессы в мишени не анализируются. В работе [36] при воздействии потока заряженных частиц на мишень предложена модель, которая учитывает кинетическое уравнение для частиц, уравнения механики сплошных сред и

широкодиапазонное уравнение состояния. Специально изучение зависимости глубины проплавления от параметров пучка не проводилось. Потому имеет смысл использовать упрощенную модель [37], которая в целом правильно описывает температурные поля в мишени при воздействии электронных пучков и позволяет определять глубину плавления.

Созданию моделей нахождения напряженного состояния при воздействиях концентрированных потоков энергии посвящены работы [33, 38, 39]. В этих работах используются сложные модели поведения сплошной среды, и решение динамической задачи для слоя конечной толщины представляется численно. Это позволяет смоделировать конкретную физическую ситуацию распространения волн напряжений, но выяснить детали отражения волн можно только при рассмотрении аналитического решения в простой модели несвязанной термоупругости [40].

При комбинированной обработке, во-первых, происходит внедрения частиц порошка углерода в расплавленный титан с помощью гетерогенного плазменного потока, и во-вторых, воздействие электронного пучка (ЭП) на гетерогенную систему титан – частицы углерода. При воздействии ЭП на гетерогенную смесь происходит расплавление титана, при этом частицы углерода находятся в твердом состоянии, так как температура плавления углерода $3550\text{ }^{\circ}\text{C}$. Принципиальным является вопрос, смогут ли частицы углерода за время действия ЭП раствориться (100 мкс) с образованием однородного слоя карбида титана или этот процесс принципиально не возможен. Поэтому задачей является создание математической модели, позволяющей определить параметры ЭП, при которых возможно получение однородного слоя карбида. Задача изотермического растворения сферического центра новой фазы в рамках

диффузионной модели давно решена [41] и сводится к задаче Стефана для уравнения диффузии в области, на подвижной границе которой выполняются условия массового баланса. При растворении углерода в титане температура меняется из-за нагрева – охлаждения в процессе ЭП воздействия и экзотермической реакции. В [42, 43] совместно решаются диффузионная и температурная задачи с учетом различных пространственных и временных масштабов. Учет тепловыделения в уравнении теплопроводности делает этот подход трудно выполнимым. Поэтому для учета изменения температуры используют подход, который был развит в теории горения [44] и в дальнейшем использовался в [45, 46]. Этот подход заключается в использовании уравнения теплового баланса для ячейки в целом, то есть температура не меняется по пространственной координате. Начальная стадия взаимодействия в системе Ti - C и физико-химические процессы, происходящие при растворении углерода, исследованы в [47], где экспериментально доказана двухволновая структура волны превращения. В [48] предложена математическая модель о распределении углерода в карбиде титана и в жидком растворе титана с углеродом с учетом диаграммы состояний и изменения температуры за счет фазовых переходов. В настоящей работе предлагается подход, который основан на определении таких характеристик процесса, которые позволили бы понять влияние управляемых технологических параметров (например, плотность энергии пучка электронов, длительность импульса, частота следования импульсов и др.) на экспериментальные результаты. Например, растворилась или не растворилась частица углерода в жидком титане при воздействии электронного пучка. В данном случае оправдано рассмотрение только диффузной задачи при однородном поле температур, которая может меняться со временем за счет теплоты химических реакций и теплоотвода. Решение этой задачи позволяет понять причину создания

однородных слоев карбида титана при совместном действии гетерогенных плазменных потоков и обработки низкоэнергетическим сильноточным электронным пучком.

Интерес исследователей к созданию математических моделей по формированию наноструктур при воздействии концентрированных потоков энергии следует из многочисленных публикаций [3, 49–58]. В основном модели основаны на компьютерном моделировании процессов, протекающих при создании наноструктурных состояний. В [3, 49] выдвинута идея, что наноструктурные состояние реализуется при развитии гидродинамической неустойчивости при сдвиговом движении жидких слоев, один из которых является вязким. В этом случае дисперсионное уравнение сводится к алгебраическому уравнению четвертого порядка с комплексными переменными. Параметрический анализ затруднителен, поэтому проводилось численное исследование зависимости декремента от волнового числа. Длина волны, при которой достигается максимальное значение декремента, будет наиболее неустойчивой и значит, при дальнейшем развитии эта длина сохранится, и её можно будет наблюдать в эксперименте. Обнаружено, что в зависимости инкремента от длины волны присутствуют два максимума. В [50] используется приближение коротких волн и получено упрощенное дисперсионное уравнение, анализ которого позволил получить значения длин волн для двух максимумов. Это является важным для параметризации экспериментальных данных.

В последние годы наблюдается устойчивый интерес научного сообщества к изучению процессов, происходящих при воздействии концентрированных потоков энергии (КПЭ) на материалы [59–61]. Это связано, прежде всего, с потенциалом применения КПЭ для улучшения характеристик изделий. Несмотря на то, что экспериментальные исследования позволили выявить основные закономерности структурных и

фазовых изменений в поверхностных слоях материалов под воздействием КПЭ, теоретическое понимание этих процессов остается неполным из-за их сложности и многообразия [62–65]. Одним из ключевых вопросов при моделировании воздействия КПЭ является генерация термоупругих волн.

В работе [38] была предпринята попытка моделирования тепловых процессов с учетом теплопереноса от внутреннего источника и генерации упругих волн. С помощью численного метода удалось воспроизвести биполярность термоупругой волны. Однако, механизм ее возникновения, в частности, связь между областями нагрева-охлаждения и фазами сжатия-растяжения, остался невыясненным.

Ранее в работах [66–68] было обнаружено, что усталостная долговечность сталей различных структурных классов облученных низкоэнергетическими сильноточными электронными пучками с энергией от 10 до 40 Дж/см² увеличивается в 2 – 5 раз по сравнению с необлученными образцами. Одной из причин такого увеличения, например, для перлитной стали, считается, во-первых, оплавление поверхностного слоя, приводящего к образованию столбчатой структуры. Поперечные размеры столбиков изменяются с ростом энергии пучка незначительно [68] в пределах от 0,3 до 0,6 мкм, а продольные размеры, которые характеризуют толщину оплавленного слоя, претерпевают существенное увеличение. Во-вторых, происходит упрочнение поверхностного слоя вследствие формирования мартенситной структуры, в-третьих, формирование в ячейках кристаллизации наноразмерного мартенсита и, в-четвертых, выделение на границах ячеек графита.

Обработка электронным пучком титановых сплавов [69–71] также приводит к формированию градиентной наноструктуры и упрочнению их поверхностных слоев, что увеличивает их износостойкость. Моделирование термического воздействия [71] электронного пучка на

титан, науглероженный электрическим взрывом, показало, что частицы углерода нанометрового диапазона растворяются за время порядка 10 мкс. Это позволяет утверждать, что в процессе комбинированной обработки следует использовать именно углеграфитовые волокна, диаметр микрофибрил в которых порядка десятков нанометров.

Воздействие электронных пучков на силумин изучалось в [72–74]. Установлено, что низкоэнергетические высокоточные электронные пучки способствуют растворению крупных частиц кремния в слое толщиной от 40 до 55 мкм с образованием ячеисто-дендритной структуры. Упрочнение силумина происходит вследствие формирования твердого раствора замещения, а также диспергирования структурных составляющих. В [73, 74] показано, что электронные пучки способствуют формированию в поверхностных слоях нанокристаллической структуры, которая также способствует его упрочнению.

Модели образования градиентных структур при воздействии концентрированных потоков энергии рассматривались в работах [3, 49, 75–78]. Основным механизмом образования наноразмерных структур при данном воздействии является гидродинамическая неустойчивость сдвигового течения расплавленного слоя относительно твердой подложки. В работах [3, 49] установлено, что образование наноструктуры в поверхностном слое материала при воздействии гетерогенных потоков плазмы электрического взрыва проводников обусловлено неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца, которая возникает вследствие разворота плазменного фронта и возникновении области параллельного течения плазмы и жидкого металла. Анализ зависимости инкремента неустойчивости от длины волны [49] показал, что она имеет два максимума в нано- и микродиапазонах, причем микроволновая мода образуется в результате взаимодействия слоев идеальной жидкости с

поверхностным натяжением на границе, а нановолновая мода благодаря вязкости. Другой механизм образования поверхностных периодических структур заключается в том, что в облучаемом материале по причине неоднородного нагрева по глубине возникают термокапиллярная и термогравитационная конвекции [75–78]. Если слой достаточно тонкий, то преобладает термокапиллярный режим конвекции, который обусловлен неоднородностью поверхностного натяжения [75]. Течения такого типа характеризуются не только движением жидкости вдоль свободной поверхности, но и деформацией самой поверхности [76]. В данных работах применяется приближение несжимаемой жидкости. Развитие этих моделей представлено в работах [77, 78] для пучков с плотностью мощности $\geq 10^6$ Вт/см². При таких значениях плотности мощности, как показывают эти работы, приближение несжимаемой жидкости недостаточно и поэтому необходимо пользоваться широкодиапазонным уравнением состояния.

Моделированию термокапиллярных течений жидкости на поверхности материалов также посвящены работы [55, 56, 79, 80]. В [79] проведено численное исследование течения в двухслойной среде с пренебрежением влияния сил тяжести. Установлено, что введение вязкого инкапсулянта приводит к снижению интенсивности термокапиллярного потока в инкапсулированном слое. Деформация границы раздела мала, если она проходит между жидкостью и твердым телом. Увеличение вязкости инкапсулянта приводит к образованию градиента давления в этом слое и деформации границы раздела, которые качественно отличаются от наблюдаемых на свободной поверхности жидкости при отсутствии данного слоя. Структура инкапсулированного слоя и деформация границ раздела зависит от вязкости и толщины. В [55] теоретически проанализировано воздействие движущегося локального источника тепла на структуру течения в тонком слое жидкости на горизонтальной

подложке. Рассмотрена двумерная задача в приближении пограничного слоя. Для случая малых значений числа Рейнольдса в сопровождающей системе координат получено стационарное уравнение, описывающее деформацию пленки жидкости. Полученное уравнение применимо, в частности, для условий горизонтального расположения подложки. В работе [56] предложена и обоснована математическая модель процесса кристаллизации, отражающая экспериментально установленные свойства образования структур в зонах неустойчивости. Ее суть сводится к построению математического объекта включающего в себя математические модели Кана-Хилларда [81], теплопереноса как обобщение задачи Стефана [82]. Результаты численных экспериментов показали, что в изотропном поверхностном натяжении формируется полосчатая неоднородность, которая затем в силу неустойчивости плоского фронта и развития процессов перекристаллизации претерпевает деформацию. Подобная ситуация наблюдается в процессе кристаллизации эвтектик, когда одна из фаз распадается на отдельные мелкие ячейки [83]. Дальнейшее развитие полосчатой структуры происходит в силу возникновения поверхностных волн, аналогичных поверхностным волнам Марангони. Работы [80, 84, 85] посвящены исследованию длинноволновой неустойчивости в задаче о термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое со свободной деформирующейся границей и твердым дном. В этих работах получены дисперсионные уравнения, из которых получены уравнения для определения критических значений параметров для всех трех основных типов потери устойчивости. При фиксированных значениях частоты и амплитуды колебаний построены нейтральные кривые монотонной и колебательной неустойчивости в виде зависимости числа Марангони от волнового числа. Определены области параметрических резонансов, отвечающих синхронным и субгармоническим режимам.

Найдены значения частоты, при которых происходит выход на высокочастотную асимптотику. Показано, что продольные колебания не оказывают никакого влияния на конвективную неустойчивость, а поперечные приводят к стабилизации границы раздела.

Таким образом, следует заключить, что анализ дисперсионного соотношения термокапиллярных волн в наномасштабном диапазоне практически не проводился.

1.3 Модели формирования градиентных структурно-фазовых состояний стального проката при термомеханической обработке

Термическое упрочнение арматурного проката в потоке непрерывных станов в свое время явилось одним из наиболее прогрессивных технологических процессов, обеспечивающих существенное повышение комплекса механических и эксплуатационных свойств проката, изготавливаемого из низколегированных сталей [86]. Ранее в 30-х годах прошлого века считалось, что низкоуглеродистую сталь нельзя закалить. Исследования, проведенные физиками и металловедом под руководством К.Ф. Стародубова [86] убедительно доказали возможность закалки на мартенсит низкоуглеродных сталей при больших скоростях охлаждения. Попытки реализовать большие скорости охлаждения в промышленных условиях предпринимались многими, но заканчивались безрезультатно. Были предложены разнообразные охлаждающие устройства, однако они не обеспечивали требуемой скорости охлаждения проката, что приводило к его искривлению и изгибу. При скоростях движения 20 м/с прокат неизбежно застревал, что вызывало аварии и большое количество брака. Причина слабого неравномерного охлаждения водой от температуры 1000°C проката, движущегося со скоростью 20 м/с относительно покоящейся воды, состоит в образовании

неоднородной по периметру изделия паровой пленки, когда реализуется режим пленочного кипения воды [87]. Режим пленочного кипения сильно снижает теплопередачу. Считалось, что образование паровой пленки при закалке неизбежно и не принимали попыток к недопущению её образования. Однако в результате экспериментов, проведенных В.Я. Савенковым, с подачей воды на горячее изделие с разными скоростями было установлено, что, начиная со скорости не менее 12 м/с образование паровой пленки не происходит [87]. В условиях прокатного стана это соответствует тому, что подачу воды в охлаждающее устройство необходимо осуществлять под давлением не менее 20 атм. Это в несколько раз больше, чем применялось ранее. В 1965 г. впервые в мире на «Криворожстали» на стане 250 успешно прошла испытание установка термического упрочнения проката. С этого момента, появился новый четвертый передел в черной металлургии – термическое упрочнение. За рубежом аналогичные технологии начали разрабатываться спустя 10 лет. Савенков В.Я. эмпирически выявил важный параметр и его величину – это относительная скорость воды по отношению к прокату, определяющий высокую скорость охлаждения, прямолинейность и гидротранспортирование проката.

Мы предлагаем новый механизм охлаждения. При стационарном температурном градиенте в 1000 °С образуется паровая пленка. Однако капли, возникающие из-за развития неустойчивости на границе пар-вода, проникают сквозь эту пленку.

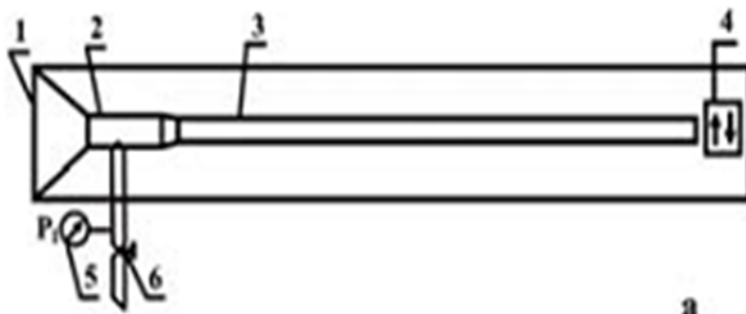
Как показано в **главе 2**, на границе раздела могут развиваться два вида неустойчивости: Кельвина–Гельмгольца и Релея-Тейлора в нано- и микроразмерном диапазоне длин волн. Если считать, что длина волны максимальной неустойчивости определяет размер капель, то образуются

капли наноразмера, с помощью которых происходит капельное охлаждение и термоудар, генерирующий упругую волну.

Таким образом, механизм теплообмена связан с развитием гидродинамических неустойчивости в системе прокат – паровая пленка – вода. Всё сказанное можно представить следующей последовательностью для одной секции (рисунок 1.2):

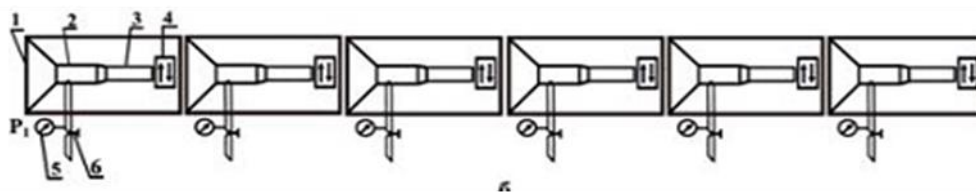
- для формирования мартенсита в низкоуглеродистых сталях требуются большие скорости охлаждения;
- преодоление кризиса пленочного кипения – большие относительные скорости;
- неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в поверхностном слое пар – вода в наноразмерном диапазоне.

При односекционном охлаждении возникли важные проблемы: низкая коррозионная стойкость, водородная хрупкость и пониженный коэффициент ударной вязкости, и это было связано с возникновением продольных трещин [88, 89]. Было установлено, что для их устранения этих дефектов необходимо использовать две и более секций (Рисунок 1.3). Это техническое решение было найдено эмпирически (без указания механизма) [90–92].



1 – узел сброса противотока; 2 – форсунка нагнетающая; 3 – камера охлаждения; 4 – отсечка; 5 – манометр; 6 – регулирующая записка

Рисунок 1.2 – Схема охлаждения с одной секцией



1 – узел сброса противотока; 2 – форсунка нагнетающая; 3 – камера охлаждения; 4 – отсечка; 5 – манометр; 6 – регулирующая задвижка

Рисунок 1.3 – Две и более секции

1.4 Физические механизмы и математические модели гидродинамических процессов при электродуговой наплавке

Электродуговая наплавка является одним из наиболее простых и эффективных способов создания градиентных структур [93–96]. Она позволяет создавать биметаллические изделия, у которых высокая прочность и низкая стоимость сочетаются с большой долговечностью в условиях эксплуатации. Поэтому, основная часть деталей может быть выполнена из низколегированных сталей. Применение этого метода для ремонта изношенных деталей позволяет сократить количество запасных частей эксплуатируемого оборудования, сократить время простоя при ремонтах, снизить расходы на обслуживание оборудования. Использование специально разработанной технологии создания поверхностного слоя с помощью наплавки позволяет увеличить срок службы в 80 раз [93]. Поэтому изучение механизмов и построение математических моделей процессов, приводящих к такому значительному эффекту, является важным научно-техническим направлением, имеющим огромное практическое значение. Кроме того, достижения в одном технологическом направлении плазменной технологии можно применять в других направлениях.

Центральной проблемой применения наплавки является перенос материала электрода на рабочую поверхность изделия [97]. Этот процесс является сложным, он включает в себя процесс формирования капель на конце электрода; движение капель в струе; взаимодействие плазменно-капельной струи с изделием; процессы в расплавленном слое изделия, обогащенного капельной составляющей струи [98]. В процессе наплавки плавящимся электродом формируется проводящая термическая плазма. Её свойства, параметры режимов сильно влияют на процессы формирования металлической ванны подложки, где формируется свойства модифицированной поверхности. Поэтому численное моделирование гидродинамических и тепловых полей является важным инструментом в создании технологий модифицирования поверхностей [99].

В [100–111] проведено моделирование и численные исследования вышеизложенных процессов. В [100] изучено влияние оболочки катода на температурное поле. Установлено, что разные потенциальные граничные условия на задней поверхности анодной пластины практически не влияют на поток тепла в катоде или в пределах дуги, однако оказывают влияние на плотность тока и распределение температуры вблизи анодной пластины. Когда единая расчетная область, включает дуги катода и анода, необходимо использование дополнительных условий на границе «плазма-электрод» для учета потоков энергии через нее. Для электрического тока 200 А расчет изотерм дает удовлетворительное согласие с экспериментом. В [101] исследовалось формирование самоорганизующихся структур электродов. В результате была разработана трехмерная двухтемпературная имитационная модель, которая показала постепенное появление точечной структуры с увеличением уровня охлаждения анода: от одного расплывчатого пятна для низких уровней охлаждения до последующего

покрытия анодной области малыми пятнами для интенсивного охлаждения.

Работа [104] посвящена сравнению моделей турбулентного течения для свободного горения высокоинтенсивной аргоновой дуги. В ней были модифицированы уравнения Навье-Стокса путем учета переноса излучения, потребляемой электрической мощности и электромагнитных сил. Для моделирования турбулентности, которая имеет значения для границы дуги из-за резкого температурного градиента между столбом дуги и окружающим газом были использованы $k - \epsilon$ модели турбулентности. Было установлено, что эта модель лучше описывает температурные профили в дуге. В [105] представлена модель потока плазмы в области анода плазменной пушки при постоянном токе. В ней уравнения переноса тепла и Максвелла решаются не только в области жидкости, но и в твердой части электрода. Она позволяет оценить среднюю температуру вольфрамовой и медной части анода. Второе главное достижение модели, то, что она учитывает впрыск газа в плазмотрон.

В [106] осуществлено, численное моделирование высокого давления дугового разряда с помощью самосогласованного моделирования большинства компонентов, включая электроды, и взаимодействие между ними. В частности, столб дуги и катодная часть разряда моделируются с помощью двухтемпературной гидродинамической модели и модели нелинейной поверхности нагрева, соответственно. Результаты моделирования приведены для свободной горячей дуги атмосферного давления аргона в диапазоне токов дуги от 10 до 200 А. Установлено, что электрическая мощность, вводимая в прикатодный слой, передается не только катоду, но и столбу дуги. Этот эффект не может быть описан с помощью модели локального термодинамического равновесия (LTE). Энтальпия переноса электронов существенно превышает тепловой вклад

проводимости электронов и тяжелых частиц, таким образом, является доминирующим механизмом переноса энергии от при катодного слоя в столб дуги. Поэтому температуры, рассчитанные с помощью LTE модели, значительно выше, чем при учете вклада электронов и тяжелых частиц [106].

Изучению процессов, происходящих в ванне расплава при плазменных воздействиях, посвящены работы [107–111]. В [107] методом конечных элементов решена задача исследования теплообмена и течения жидкости при импульсной дуговой сварке на нержавеющей стали. Предложенная модель позволила изучить эволюцию во времени сварочной ванны при постоянном и импульсном токе. Сравнение показывает, что использование импульсного тока дает более качественное сварное соединение. В [108] численное моделирование было дополнено экспериментами с использованием высокоскоростной съемки в инфракрасном диапазоне поверхности сварочной ванны. Обработка и анализ изображений показали хорошее согласие с численной моделью. В работе [109] анализировалось влияние различных факторов на геометрию сварочной ванны. Результаты анализа показывают, что градиент поверхностного натяжения оказывает наиболее существенное воздействие на геометрию сварочной ванны, тогда как магнитная проницаемость, коэффициент теплового расширения материала дают меньший вклад.

Работа [110] посвящена моделированию процессов в электрической дуге и сварочной ванне при наличии электрода разделения. Показано, что наличие этого электрода оказывает существенное влияние на температуру и поток поля дуги плазмы, при этом имеет незначительный эффект на пике температуры и напряжения на дуге. Увеличение размеров данного электрода показывает, что профили распределения плотности тока, теплового потока и температуры на аноде изменяются с однопиковых на

двухпиковые. Суммарное тепловыделение в аноде изменилось мало, несмотря на, присутствие небольшого количества кислорода. В [111] представлена унифицированная модель системы «сварочная дуга – ванна расплава». Установлено, что температуры и скорости, распределений в дуге не являются вращательно-симметричными.

В [102] на основе равновесной магнитогазодинамической модели проведен расчет течения и нагрева газа (аргона) в диафрагмированном канале плазмотрона в зависимости от положения и размеров диафрагмы, расхода и интенсивности закрутки газа. Установлены особенности изменения характеристик дуги в каналах переменного сечения для закрученных и незакрученных потоков. Показано, что диафрагмирование канала в условиях интенсивной закрутки газа обеспечивает на участке до диафрагмы локализацию потока плазмы в узкой приосевой области с четкой тепловой границей раздела с внешним потоком газа (эффект вихревой термоизоляции плазмы); протяженность участка стабилизации зависит от размеров отверстия диафрагмы и ее положения в канале. В [103] проведено численное исследование микроволнового разряда в струе аргона, аксиально инжектируемой в коаксиал с укороченным внутренним электродом. Установлено, что большую роль в формировании микроволнового разряда играет срез внутреннего электрода, и “продув” через его канал потока холодного газа, который охлаждает стенки, стабилизирует горение микроволнового разряда и способствует образованию крутого переднего теплового фронта.

Обзор методов математического моделирования образования отрыва каплей, представленный в работе [112], показывает, что существует две группы моделей. К первой группе относятся модели без определения формы капли [113–115], а ко второй – с определением формы капли [116–118].

Первая группа включает в себя модели называемые Static Force Balance Theory (SFBT) [113], Dynamic Force Balance Theory (DFBT) [114] и Pinch Instability Theory (PIT) [115]. Суть модели SFBT заключается в том, что процесс образования и отрыва капли обусловлен совместным действием сил поверхностного натяжения, тяжести, электромагнитной, а также аэродинамической силой, возникающей при взаимодействии капли металла с потоком защитного газа. Анализ силовых факторов, оказывающих влияние на характеристики переноса металла, носит оценочный характер, поскольку форма капли полагается сферической и плотность тока имеет равномерное распределение в области анодной привязки дуги. Модель DFBT отличается от SFBT тем, что в ней учитываются инерционные силы. PIT модель или модель неустойчивого плазменного шнура предполагает, что капли образуются в результате распада цилиндрической струи жидкости. Эта модель представляет собой обобщение теории неустойчивости Рэлея-Плато на случай токонесущей струи. Решение линеаризованной задачи магнитной гидродинамики дает дисперсионное уравнение [115], анализ которого позволяет найти длины волн, которым соответствует максимум квадрата циклической частоты. Недостатком этой модели является то, что в ней делается допущение о том, что полный ток сосредоточен в объеме жидкой струи, что не согласуется с экспериментом.

Вторая группа моделей включает модель формирования капли в рамках гидростатического приближения [116], приближение тонкой струи [117] и модели, базирующейся на уравнениях Навье-Стокса, Максвелла и теплопроводности [118]. Суть проблемы, затрагиваемой в данной модели, состоит в определении формы и объема предельно устойчивой капли. Она включает в себя уравнения гидростатики с учетом электромагнитных сил и позволяет найти силу сварочного тока, при которой наступает переход к

струйному режиму течения. Этот подход позволяет отследить формирование капли лишь до наступления потери устойчивости. Модель, использующая приближение тонкой струи [117], основана на следующих предположениях: 1) фронт плавления считается плоским; 2) скорость подачи проволоки соответствует скорости ее плавления; 3) отсутствует вихревое движение капли внутри капли; 4) форма столба дуги считается заданной. Решение уравнения Навье-Стокса в данном приближении позволяет отследить динамику формирования и отрыва капли. Поэтому в последнее время получили развитие модели, базирующиеся на уравнениях Навье-Стокса, Максвелла и теплопроводности [118–120]. Численное решение этих уравнений позволяет найти форму капли в различные моменты времени. Форма капли определяется действием электромагнитных сил, зависящих от распределения полного тока. В работах [118, 119] наблюдение за формированием и отрывом капли начинается с момента времени 20 мс. Наиболее интересным с точки зрения авторов [119] является время $t = 100$ мс. В этот момент времени, как показывают расчеты, на поверхности зарождающейся капли температура достигает 2963 К, что согласуется с экспериментальными данными [120]. Жидкий металл около осевой линии капли перемещается вниз и циркулирует вверх вдоль поверхности, тем самым перенося тепло из нижней части капли в верхнюю. Охлаждение нижней части капли также идет за счет испарения металла с ее поверхности. Радиальная составляющая электромагнитной силы является центростремительной и создает пинч-эффект в капле. Именно она выталкивает металл вниз в центр капли. С увеличением баланса электромагнитных сил, сил поверхностного натяжения и давления плазменной дуги происходит рост размеров капли. После образования шейки скорость в пределах капли увеличивается вследствие увеличения электромагнитной силы сжатия в шейке.

Недостатком этой модели является, то, что механизм отрыва капли остается до конца не выясненным. Не ясно, почему не происходит отрыва капли в моменты времени меньше 118 мс, и какие силы необходимо приложить, чтобы такой отрыв произошел. Таким образом, следует заключить, что представленные математические модели дают феноменологическое описание процессов формирования и отрыва капли. Однако в этих моделях не ясна роль термокапиллярной конвекции в начальные моменты формирования капли. Поэтому целью нашей работы является создание модели, учитывающей данный процесс. Следует отметить, что в [121] учтена конвекция Марангони, но ее исследование проведено в уже оторвавшейся капле.

Аналізу гидродинамических неустойчивостей на границе «плазма-расплав» посвящены работы [3, 122–124]. В [3] предложен механизм формирования тонкого приповерхностного наноструктурного слоя зоны легирования при обработке с оплавлением поверхности металлов импульсной плазменной струей, сформированной из продуктов электрического взрыва проводников. Механизм основан на возникновении неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В результате было получено дисперсионное уравнение вязких и капиллярных напряжений в расплаве. Проведен анализ зависимостей инкремента от длины волны возмущений поверхности с максимумом в нанометровом диапазоне при относительной скорости плазмы и расплава в диапазоне 100–1000 м/с, достигаемой в условиях обработки. В [122] описана иерархия классических моделей плазмы. В рамках этих моделей рассматриваются различные плазменные системы. В частности, такие процессы как гидродинамический резонанс Рэлея-Тимофеева, трансформация волн, магнитогидродинамические неустойчивости. Обзор современного состояния математической теории уравнений Эйлера идеальной однородной несжимаемой жидкости сделан в

работе [123]. Основное внимание уделялось различным типам неустойчивости и тому, как эти явления могут быть связаны с описанием турбулентности. Стохастическая неустойчивость и связанные с ней модели турбулентной диффузии рассмотрены в [124]. Главное внимание уделено вопросу получения оценок и скейлингов, характеризующих корреляционные эффекты и инкременты. Рассмотрены различные модели: квазилинейная аппроксимация Казанцева, стохастичность в системе конвективных ячеек, скейлинги Кадомцева-Погутце, перколяционные модели, баланс Рочестера-Розенблюта и др. Основной задачей являлось показать важность определения функциональной зависимости инкрементов стохастической неустойчивости и коэффициентов переноса от амплитуды турбулентных пульсаций и других ключевых параметров (характерных частот пульсаций, дрейфовых скоростей, потока энергии по спектру и др.), описывающих рассматриваемые системы.

В [125] исследована неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в многокомпонентных системах с помощью модели фазового поля. Она описывается модифицированными уравнениями Навье-Стокса и конвективными уравнениями Кана-Хилларда. Показано, что увеличение поверхностного натяжения или плотности стабилизирует границу раздела. С другой стороны, включение дополнительных слоев усиливает данную неустойчивость. Образование крупных вихревых структур в осесимметричных струйных течениях численно исследовалось в [126]. Установлено, что осесимметричный струйный поток газа неустойчив по отношению к малым нормальным возмущениям. Типичной формой развивающихся неустойчивых мод являются спиральные вихревые жгуты, опоясывающие ядро струи, и осесимметричные вихревые кольца. Развитие во времени последних приводит к формированию метастабильной регулярной структуры из равноотстоящих колец – вихревого поезда. Он в

свою очередь оказывается также неустойчивым и со временем распадается. В результате происходит процесс слияния вихревых колец с образованием одного мощного тороидального вихря. Важное фундаментальное значение работы [126] состоит в том, что в ней описан механизм перехода от простой формы поступательного движения (осесимметричное параллельное течение) к сложному вращательному движению в форме тороидального вихревого кольца.

Таким образом, следует заключить, что в настоящее время современные тенденции моделирования плазменных воздействий направлены на создание единой математической модели, описывающей процессы как в области, прилегающей к катоду, так и в ванне расплава.

1.5 Моделирование влияния воздействия внешних механических нагрузок на градиентные структуры

В последнее время было предложено большое количество методов и способов упрочнения поверхности. Однако создание теоретических моделей поведения материала с упрочненным слоем находится в стадии развития. Успехи в этом направлении мезомеханики, которая объединяет механику сплошной среды и физику пластичности, в объяснении и моделировании поведения материалов связываются с мощной и достаточно разработанной теорией упругости. Использование ее методов позволяет получать аналитические построение полей напряжений и моделировать их локализацию с учетом градиентной структуры.

При интенсивном контактном воздействии в поверхностных слоях возникают большие пластические деформации, достигающие значений $e = 10$ [127]. Следствием этого является образование слоя с ультрамелкой зеренной (УМЗ) структурой, которая в оптическом микроскопе не разрешается, и поэтому получило название «белого слоя». По данным

[128] толщина этого слоя при трении с высокими нагрузками не зависит от предварительной термообработки, структуры материала и составляет 20-40 мкм. Исходные зерна превращаются в поликристаллы с УМЗ размерами 10-100 нм. Аналогичная структура УМЗ образуется на рельсах германского производства в процессе эксплуатации с размером зерна 200 нм и повышением твердости до 10-12 ГПа (исходный материал 3 ГПа) [129]. Глубина слоя с УМЗ при пропуске 4 млн. тонн составила 40 мкм, а для пропуска 360 млн. – 70 мкм. Таким образом, в тяжело нагруженных условиях в тонком поверхностном слое образуются нанокристаллические структуры. Непосредственное их отделение и определение механических свойств слоя с УМЗ на сегодняшний день представляется невозможным. Поэтому их свойства могут быть определены из экспериментов по растяжению-сжатию нанокристаллических специально изготовленных макрообразцов [130]. В этой работе для армко-железа показано, что модуль Юнга при сжатии равен 200 ГПа, а при растяжении от 5 до 15 ГПа в зависимости схемы получения структуры с УМЗ. Табличные значения модуля Юнга для армко-железа составляют от 186 до 223 ГПа [131]. Различие в модулях Юнга значительно, и поэтому становится актуальной задача анализа напряженного состояния для многослойной полосы с различными механическими характеристиками для моделирования взаимодействия колеса с неоднородным по глубине рельсом. Кроме того, при импульсных поверхностных обработках (магнитоплазменная и дифференцированная закалка) образуются резкие градиентные структуры, которые способствуют значительному увеличению износостойкости. Однако у некоторых специалистов возникают сомнения в увеличении эксплуатационной стойкости рельсов с поверхностной обработкой из-за наличия резкого переходного слоя, как источника дополнительных концентраторов напряжений.

Перечисленные факты не позволяют однозначно определить роль градиентных структур, поэтому требуются дальнейшие исследования. В этой связи развитие методов расчета напряженного состояния рельсов с градиентными структурами при действии внешних нагрузок является актуальным.

В работах [132, 133] предлагалось рассмотреть упрочненный слой, как слой с отличающимися от матрицы упругими постоянными. Мотивацией этого служило, что деформация поверхностного слоя происходит в режиме упрочнения, где модуль упрочнения значительно ниже модуля Юнга, но при этом связь между напряжениями и деформациями предполагается линейной.

Таким образом, представленные данные указывают на необходимость рассмотрения разномодульных слоистых структур под действием внешнего давления. Для теоретического анализа воспользуемся наиболее простой моделью – теорией упругости, позволяющей учесть сложнонапряженное состояние, с изотропными свойствами внутри каждого слоя. Большое количество работ посвящено методам и расчету напряжений в многослойных средах [134–141]. В силу громоздкого аппарата получения решений использование готовых формул без надлежащей проверки представляется рискованным. Поэтому используем известную идею Макса Борна [142] о связи между граничными величинами в слоях, задаваемых матрицей перехода. Подобная схема, но несколько отличная от ниже изложенной, использовалась для неоднородных сред в теории упругости [140].

Выводы по главе

Приведенный анализ литературных источников показал, что механизмы и модели процессов формирования градиентных структур при

внешних энергетических воздействиях не достаточно исследованы. В связи с этим целью настоящей работы является разработать механизмы формирования градиентных структур в материалах при внешних энергетических воздействиях на основе создания комплекса физико-математических моделей.

Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи:

1. Получить явные приближенные аналитические зависимости инкремента от волнового числа, позволяющие параметризовать экспериментальные результаты поведения сдвиговых неустойчивостей на микро- и наноразмерных масштабах.
2. Экспериментально исследовать процессы, возникающие при электрическом взрыве фольги с торцевой геометрией подводящих электродов, определить характерные параметры и структуру получаемого гетерогенного плазменного потока и разработать физико-математическую модель формирования гетерогенного плазменного потока.
3. Разработать физико-математические модели образования поверхностно-периодических и наноструктур при воздействии гетерогенных плазменных потоков.
4. Предложить механизмы и создать математические модели процессов образования градиентных структур, возникающих при прерывистой закалке проката.
5. Создать физико-математическую модель распределения температурных полей и формирования частиц карбида титана при растворении графита в жидком титане при микросекундных воздействиях концентрированными потоками энергии.

6. Провести исследование методами численного моделирования тепло-гидродинамических процессов при сварке и наплавке и обосновать роль неустойчивостей в формировании градиентных структур.
7. Провести теоретический анализ и расчет напряжений, возникающих в переходной зоне материала с градиентной структурой для оценки возможностей повышения эксплуатационных свойств изделий с градиентными структурами.
8. Провести сопоставление расчетных и экспериментальных данных и установить аналитические и численные зависимости для определения параметров и режимов технологических установок и процессов.

ГЛАВА 2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КОРОТКОВОЛНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Как отмечалось выше, при внешних энергетических воздействиях экспериментально выявлены наноструктурные состояния вещества. Это состояние можно теоретически описать с единой позиции – гидродинамических неустойчивостей в коротковолновом диапазоне длин волн.

Получены и проанализированы соответствующие дисперсионные уравнения и выведены приближенные аналитические зависимости скорости роста возмущений от волнового числа в микро- и наномасштабах. Показано, что в коротковолновом приближении для моделирования течения вязкой жидкости можно использовать уравнения Эйлера, а вязкость учитывать в граничных условиях (вязко-потенциальная модель Джозефа). Указаны области параметров, при которых в зависимости декремента от волнового числа возникают два максимума.

Приводится вывод и анализ дисперсионных уравнений для неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца, Релея-Гейлора термокапиллярной неустойчивости Марангони, реализующиеся при воздействии гетерогенных плазменных потоков и электронных пучков. Результаты, полученные в настоящей главе, опубликованы в работах [3, 5, 49,50, 58, 165 - 167, 176].

2.1 Основное уравнение линейной теории

Исследование неустойчивости вязкой жидкости сопряжено значительными математическими трудностями. Так, исследование неустойчивости простейшего течения в канале с квадратичным профилем скорости (течение Пуазейля), проведенное впервые Гейзенбергом заняло шестьдесят страниц [142]. Были получены две кривые на плоскости

параметров (k , Re), между которыми заключена область неустойчивости течения. Через двадцать лет Линь проверил его решения [143] и экстраполировал обе кривые, которые замкнулись в одну. Выводы из полученного решения: вязкость не только рассеивает энергию и приводит систему к покою, но позволяет создавать структуры [144]. Математическая громоздкость задачи Гейзенберга-Линя обусловлена анализом краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами (краевая задача Орра – Зоммерфельда). В настоящее время это свойство вязкости в системе с подведенной энергией рассматривается в рамках целого научного направления – диссипативная динамика открытых систем [145].

Рассмотрим математическую задачу об устойчивости движения вязкой несжимаемой жидкости в декартовой системе координат (x, y, z) . Основными уравнениями, которым удовлетворяют проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат $u(t, \bar{r}), v(t, \bar{r}), w(t, \bar{r})$ и давление $p(t, \bar{r})$ будут уравнение неразрывности и уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь ρ – плотность, ν – коэффициент кинематической вязкости. Система уравнений дополняется граничными условиями, соответствующими конкретному случаю течения. Общим для этих течений является вид стационарного невозмущенного течения – скользящее

течение параллельное плоскости (x, y) . Тогда невозмущенное течение можно представить в виде:

$$u = u_0(z), v = v_0(z), w = 0, p = p_0(x, y) \quad (2.3)$$

Функции (2.3) являются точным решением системы (2.1) и (2.2) и удовлетворяют системе уравнений

$$-\frac{1}{p} \frac{\partial p_0}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0, -\frac{1}{p} \frac{\partial p_0}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

Рассматриваются малые возмущения (2.3)

$$u = u_0(z) + u_1(t, x, y, z), v = v_0(z) + v_1(t, x, y, z), w = w_1(t, x, y, z), p = p_0(z) + p_1(t, x, y, z) \quad (2.5)$$

Величины с индексом один называются возмущениями и удовлетворяют тем же уравнениям. Эти возмущения и их первые производные считаются малыми первого порядка. Подстановка выражений (2.5) в систему уравнений (2.1) и (2.2) и отбрасывание малых величин выше первого (линеаризация) приводит к системе линейных уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0, \\ D_0 u_1 + w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} &= -\frac{1}{p} \frac{\partial p_1}{\partial x} + v \Delta u_1, \\ D_0 v_1 + w_1 \frac{\partial v_0}{\partial z} &= -\frac{1}{p} \frac{\partial p_1}{\partial y} + v \Delta v_1, \\ D_0 w_1 &= -\frac{1}{p} \frac{\partial p_1}{\partial z} + v \Delta w_1, \\ D_0 &= \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

В настоящей работе будет использоваться метод нормальных мод, это означает, что в начальный момент времени задано отклонение поверхности от положения равновесия в виде экспоненты от координат поверхности. Тогда дисперсионные соотношения выводятся для пакетов плоских периодических бегущих волн

$$(u_1, v_1, w_1, p_1)(t, x, y, z) = (U, V, iW, P)(z) \exp(i(lx + my - \omega t)) \quad (2.7)$$

Здесь $\bar{k} = (l, m)$ – волновой вектор, ω – частота. Заглавными буквами обозначены комплексные амплитуды возмущений скоростей и давления. Для упрощения вывода удобно ввести обозначения

$$\varphi = lx + my - \omega t, \tau = r_0 - \omega, r_0 = lu_0 + mv_0, k^2 = l^2 + m^2 \quad (2.8)$$

тогда справедливы соотношения

$$D_0 u_1 = i\tau U \exp i\varphi, D_0 v_1 = i\tau V \exp i\varphi, D_0 w_1 = i\tau W \exp i\varphi, \Delta f = (F'' - k^2 F) \exp i\varphi \quad (2.9)$$

Здесь и далее штрихами обозначена производная по z . Подстановка (2.5) в (2.6) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитудных величин

$$\begin{aligned} lU + mV + W' &= 0, \\ \tau U + Wu_0' + lP / \rho + iv(U'' - k^2 U) &= 0, \\ \tau V + Wv_0' + mP / \rho + iv(V'' - k^2 V) &= 0, \\ \tau W - P' / \rho + iv(W'' - k^2 W) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Введем новую зависимую переменную $R = lU + mV$, путем комбинирования второго и третьего уравнения системы (2.10), получим

$$\begin{aligned} R + W' &= 0, \\ \tau R + W\tau' + k^2 P / \rho + iv(R'' - k^2 R) &= 0, \\ \tau W - P' / \rho + iv(W'' - k^2 W) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полученная система показывает, что анализ уравнений для трехмерных амплитуд возмущений (U, V, W, P) может быть сведен к анализу двумерных амплитуд возмущений (R, W, P) . В этом состоит основное содержание теоремы Сквайра. Из (2.11) можно выразить R, P через поперечную скорость W :

$$R = -W'; P = \frac{\rho\tau^2}{k^2} (W / \tau)' + i \frac{\rho v}{k^2} (W''' - k^2 W') \quad (2.12)$$

Функция W должна быть решением уравнения

$$W''' - (k^2 + k_1^2)W'' + k^2 k_1^2 W' + (k_1^2)'' W = 0 \quad (2.13)$$

Где

$$k_1^2 = k^2 + i\tau / \nu \quad (2.14)$$

Уравнение (2.13) является основным в теории малых возмущений для модели вязкой несжимаемой жидкости. При $m=0$ (плоская задача) уравнение (2.13) эквивалентно известному уравнению Орра-Зоммерфельда для этой модели [146]. Оператор в формуле (6.10) из [146] действует на функцию тока (φ), которая выражается через W : $\varphi = iW / n$.

2.2 Капиллярные волны на поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости

2.2.1 Классические результаты

Будем считать, что вязкая жидкость с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν , занимает полупространство $z < 0$ и находится в покое. На её поверхности действуют силы поверхностного натяжения с коэффициентом поверхностного натяжения σ , а поверхность в начальный момент времени отклонена от положения равновесия и изменяется по гармоническому закону в виде

$$\eta(x, y, 0) = \eta_0 \exp i(lx + my) \quad (2.15)$$

Здесь η_0 – начальная амплитуда.

В классических работах [147, 148] используется представление вектора скорости через скалярный и векторный потенциалы для вывода дисперсионного уравнения капиллярных волн на поверхности вязкой жидкости. В настоящем параграфе выведем дисперсионное уравнение, опираясь на основное уравнение теории малых возмущений поперечной скорости в модели несжимаемой вязкой жидкости (2.13). Используем метод нормальных мод в виде:

$$f(t, x, y, z) = F(z) \exp(i(lx + my) + \omega t) \quad (2.16)$$

Тогда $k_1^2 = k^2 + \omega / \nu$ не зависит от z и решение (2.13) легко выписывается

$$W(z) = C \exp(kz) + C_1 \exp(k_1 z) \quad (2.17)$$

Причем $\text{Re}(k_1 > 0)$. Здесь C и C_1 произвольные постоянные, для которых вместе с η_0 получим алгебраическую систему уравнений, исходя из граничных условий: одно кинематическое и три динамических граничных условия примут вид при $z=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = w; -p + 2\nu\rho \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right), \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \\ R = -W'; P = \frac{\rho \tau^2}{k^2} (W / \tau)' + i \frac{\rho \nu}{k^2} (W'' - k_2 W') \end{aligned} \quad (2.18)$$

В уравнениях (2.18) перейдем к амплитудам

$$\omega \eta_0 = W(0); -P(0) + 2\nu\rho W'(0) = -\sigma k^2 \eta_0, ikW(0) = R'(0). \quad (2.19)$$

С учетом (2.12) уравнения (2.19) выражаются через функцию W и её производные

$$\begin{aligned} W''(0) - (k_1^2 + 2k^2)W'(0) + k^3 \omega_c^2 W(0) / (\omega \omega_v) = 0, \\ W''(0) - k^2 W(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Где $\omega_c^2 = \sigma k^3 / \rho, \omega_v = \nu k^2$.

Подстановка (2.17) в (2.20) дает однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}C + a_{11}C_1 = 0, \\ a_{11}C + a_{12}C_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Её определитель выражается по формуле

$$\Delta = (\omega + 2\omega_v)^2 + \omega_c^2 - 4\omega_v^2 \sqrt{1 + \omega / \omega_v} \quad (2.22)$$

Уравнение $\Delta = 0$ называется дисперсионным уравнением и позволяет получить связь между частотой (ω) и волновым числом (k), то есть $\omega = \omega(k)$. Реальная часть частоты $\alpha = \text{Re}(\omega)$ определяет скорость роста амплитуды возмущений и при $\alpha > 0$ амплитуда растёт (инкремент), а при $\alpha < 0$ амплитуда убывает (декремент). Уравнение $\Delta = 0$ имеет иррациональность в третьем слагаемом, поэтому в простом виде зависимость $\omega = \omega(k)$, как для идеальной жидкости получить не возможно, поэтому использовались

различные приближения. Для получения явной зависимости α от k в [147, 148] использовались приближения: большой и малой вязкости.

Для очень большой вязкости используется условия: $C = \omega_c / \omega_v \ll 1$ в [147] или в [148] – $|\omega| / \omega_v \ll 1$. Тогда уравнение (2.22) преобразуется и дисперсионное уравнение становится квадратным с действительными коэффициентами:

$$\omega^2 + 2\omega\omega_v + \omega_c^2 = 0 \quad (2.23)$$

Решение (2.23) в указанном приближении

$$\omega = \begin{cases} -\omega_c^2 / 2\omega_v, \\ -2\omega_v + \omega_c^2 / 2\omega_v. \end{cases} \quad (2.24)$$

Для маловязкой жидкости использовалось условие $C \gg 1$, тогда приближенное решение дисперсионного уравнения (2.22) дается формулой

$$\omega = -2\omega_v \pm i\omega_c \quad (2.25)$$

Тогда для инкремента можно записать

$$a_{1\pm} = \begin{cases} -\omega_c^2 / 2\omega_v, & C \ll 1; \\ -2\omega_v, & C \gg 1. \end{cases} \quad (2.26)$$

Формулы (2.26) совпадают с формулами из монографий [147, 148].

Так как $C = \sqrt{\lambda / \lambda_0}$, где $\lambda_0 = 2\pi\rho v^2 / \sigma$, то условия большой и малой вязкости можно переформулировать как короткие $\lambda \ll \lambda_0$ и длинные волны $\lambda \gg \lambda_0$.

2.2.2 Параметризация дисперсионного уравнения для капиллярных волн на поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости

Оказывается, что эти классические результаты можно получить по-другому и при этом получить важные физические следствия [149]. В отличие от [149] введем новую переменную, связанную с частотой ω по формуле

$$z = \sqrt{1 + \omega / \omega_v} \quad (2.27)$$

Тогда дисперсионное уравнение $\Delta = 0$ сводится к алгебраическому уравнению четвертого порядка с одним параметром C :

$$z^4 + 2z^2 - 4z + 1 + C^2 = 0, C = \omega_c / \omega_v \quad (2.28)$$

Левую часть уравнения (2.28) можно разложить на множители

$$Q_1(z)Q_2(z) = 0, \quad (2.29)$$

$$Q_1(z) = (z^2 + pz + 1 + p^2/2 + 2/p), Q_2(z) = (z^2 + 1 + p^2/2 - pz - 2/p)$$

Здесь p – параметр, связанный с величиной C соотношением

$$p^6 - 4p^2C^2 + 4p^4 - 16 = 0 \quad (2.30)$$

Построим функцию $C^2(p)$ (рисунок 2.1). Так как $C^2 > 0$, то область изменения параметра p состоит из двух промежутков $(-\infty, -p_0)$ и (p_0, ∞) , где $p_0 = 1,295597743$ – корень уравнения $C=0$.

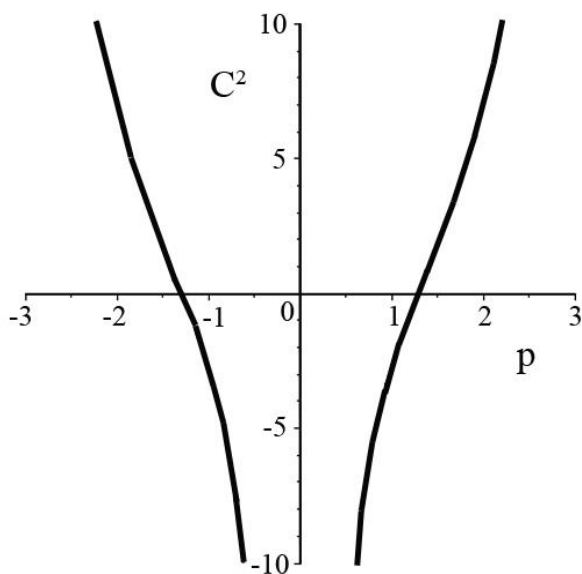


Рисунок 2.1. – Зависимость C^2 от параметра p

Корни уравнений $Q_1=0$ и $Q_2=0$ можно записать

$$z_{1\pm} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2p}; z_{2\pm} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2p} \quad (2.31)$$

Где

$$\Delta_1 = -p(p^3 + 4p + 8), \Delta_2 = -p(p^3 + 4p - 8) \quad (2.32)$$

Зависимости дискриминантов (2.32) представлены на рисунке 2.2.

Рассмотрим случай $p > 0$. Первый дискриминант отрицательный при всех $p > 0$, а второй при $0 < p < p_1$ является положительным и при $p > p_1$ отрицательным, где $p_1 = 1,365$. Тогда (2.31) переписывается

$$\begin{aligned} z_{1,\pm} &= -\frac{p}{2} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta_1|}}{2p}; \\ z_{2,\pm} &= \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{|\Delta_2|}}{2p}, p_0 < p < p_1; z_{2,\pm} = \frac{p}{2} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta_2|}}{2p}, p > p_1. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Так как реальная часть z ($\text{Re}(k_1 > 0)$) больше нуля, то корни Q_1 не допустимы. Поэтому их анализ можно не проводить. Оба корня Q_2 имеют реальную часть больше нуля, поэтому они допустимы. При $0 < p < p_1$ оба корня действительные, а при $p > p_1$ оба корня комплексные.

Найдем комплексные частоты для этих диапазонов. При $p_0 < p < p_1$:

$$\omega_{1\pm} = \omega_v \left(-\frac{2(p-1)}{p} \pm \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2} \right) \quad (2.34)$$

При $p > p_1$:

$$\omega_{2\pm} = \omega_v \left(-\frac{2(p-1)}{p} \pm i \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2} \right) \quad (2.35)$$

Тогда зависимость декремента от параметра p принимает вид:

$$\begin{aligned} a_{1\pm} &= \omega_v \left(-\frac{2(p-1)}{p} \pm i \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2} \right), p_0 < p < p_1; \\ a_{2\pm} &= -\frac{2(p-1)\omega_v}{p}, p > p_1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Таким образом, на интервале (p_0, p_1) две ветви декремента, а при $p > p_1$ — одна. Значит, при $p = p_1$ происходит бифуркация декремента. На рисунке 2.2 представлена безразмерная зависимость декремента (α/ω_v) от параметра p .

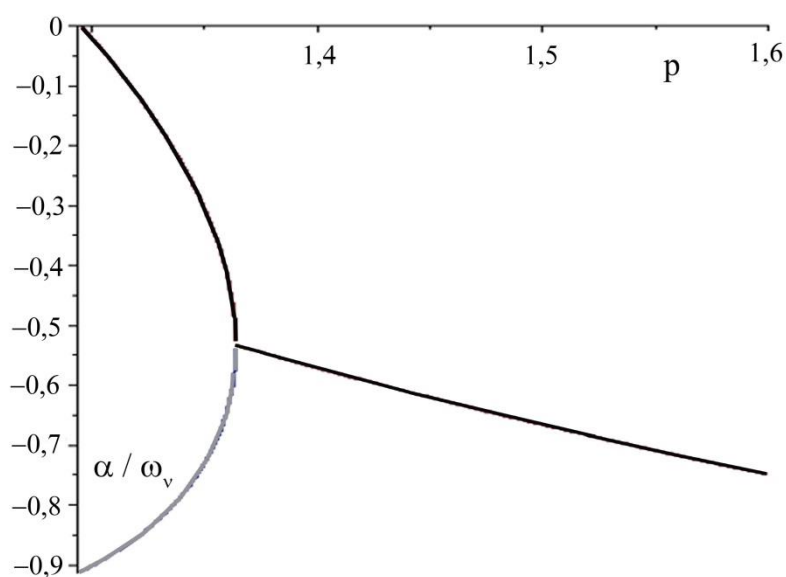


Рисунок 2.2 – Безразмерная зависимость декремента (α/ω_v) от параметра p

Для случая чисто капиллярных волн интервал (p_0, p_1) узок и в терминах параметра C соответствует интервалу $(0, C_1)$, где $C_1 = 0.763$. Учитывая, что $C = \omega_c/\omega_v$ и для металлов (например, силумина) участок двух ветвей соответствует длинам волн до двух нанометров. Кроме того, вычисленный здесь бифуркационный параметр C_1 совпадает с бифуркационным параметром $\theta^* = 1,31$ приведенным в [18], так как $\theta^* = 1/C_1$.

Основное вывод из проделанных рассуждений состоит в том, что добавление вязкости в дисперсионное уравнение для волн на поверхности приводит к усложнению анализа, к появлению бифуркации, разделяющей приближения малая – большая вязкость или длинные – короткие волны.

2.3 Неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Релея-Тейлора

В отличие от свободных волн на поверхности вязкой жидкости (пункт 2.2) анализ гидродинамическая ситуация при внешнем энергетическом воздействии на вязкий слой становится более богаче и сложнее. При неустойчивости Кельвина-Гельмгольца внешний поток энергии на слой вязкой жидкости передает движущийся параллельный поток идеальной жидкости с определенной скоростью, а при

неустойчивости Релея – Тейлора передача энергии осуществляется за счет сил инерции двух слоев разной плотности.

Вопросам анализа возникновения неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (НКГ) с учетом вязкости уделялось много внимания [150–165]. Однако, осталось ряд не изученных вопросов, например неустойчивость в наноразмерном диапазоне длин волн и немонотонная зависимость декремента от волнового числа с двумя максимумами. Обычно при исследовании неустойчивости ставится вопрос об определении нейтральной кривой в пространстве параметров. Это означает, что находится область параметров начала наступления неустойчивости. Мы ставим амбициозную задачу определить зависимость максимумы волновых чисел (k_m), при которых достигается максимум декремента, от параметров процесса в линейном анализе. Такая информация позволит судить о том, какие длины волн можно наблюдать при нелинейном развитии процесса. Как правило, дисперсионные уравнения при учете вязкости не решаются аналитически, поэтому необходимо максимально упростить ситуацию, из которой можно было бы получить информацию о зависимости максимумов волновых чисел от параметров.

2.3.1 Математическая задача

Рассмотрим устойчивость плоского стационарного скользящего течения двухслойной несжимаемой жидкости, находящегося в поле массовых сил с плотностью \bar{f} . Выберем направление оси x вдоль границы раздела между слоями $y = \eta(x, t)$ (рисунок 2.3), а ось y – перпендикулярно x в сторону второго слоя. Первый слой ($-\infty < x < \infty, -h < y < \eta(x, t)$) занимает вязкая жидкость с кинематической вязкостью ν и плотностью ρ_1 . Второй слой ($-\infty < x < \infty, \eta(x, t) < y < H$) – это идеальная с плотностью ρ_2 жидкость,

имеющая в стационарном состоянии постоянную скорость u_0 , направленную вдоль оси x . Пусть $\vec{f} = (0, -a)$, где a – ускорение слоев, σ_0 – коэффициент поверхностного натяжения.

Стационарное течение описывается ненулевыми функциями:

$$p_{01} = -a\rho_1 y, p_{02} = -a\rho_2 y, u_{02} = u_0 \quad (2.37)$$

Будем рассматривать возмущения стационарного состояния (2.37). Тогда решения уравнений гидродинамики можно представить в виде

$$u_n = u_{0n} + U_n(x, y, t), v_n = V_n(x, y, t), p_n = p_{0n}(y) + P(x, y, t) \quad (2.38)$$

Здесь введены обозначения возмущений: U_n – продольной и V_n – поперечной скоростей, P_n – давлений в n -ой жидкости. Возмущения и их производные считаются малыми первого порядка, отсюда подстановка (2.38) в систему уравнений гидродинамики ведет к системе линейных уравнений для возмущений. Условие на границе возмущенной границе $y = \eta(x, t)$ сносится на границу $y = 0$.

Для первого слоя система уравнений Навье-Стокса для возмущений принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial V_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} \right); \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для второго слоя система уравнений Эйлера для возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial U_2}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial x}; \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial V_2}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Граничные условия на внешних границах слоев следуют из условий не протекания и не проскальзывания:

$$\begin{aligned} \text{при } y = H : V_2 &= 0; \\ \text{при } y = -h : U_1 &= 0, V_1 = 0; \end{aligned} \quad (2.41)$$

На границе контакта (при $y = 0$) используются условия: два кинематических и два динамических для нормальных и касательных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = V_2; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = V_1 \\ -P_1 + 2\rho_1 \nu_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + P_2 = a(\rho_2 - \rho_1)\eta + \sigma_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Здесь используются две вязкости: одна ν в уравнениях, а другая – ν_1 в граничных условиях.

Решения (2.39) – (2.40) будем искать в виде:

$$(U_n, V_n, P_n) = (\bar{U}_n, \bar{V}_n, \bar{P}_n) \exp(\omega t - ikx), \quad \eta(x, t) = \eta_0 \exp(\omega t - ilx) \quad (2.44)$$

Здесь $\bar{U}_n, \bar{V}_n, \bar{P}_n$ – функции, зависящие от y , η_0 – произвольная постоянная.

Подстановка (2.44) в (2.39) – (2.40) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитудных величин (черту опускаем):

$$\begin{aligned} V_1^{IV} - (k_1^2 + k^2)V_1'' + V_1 k_1^2 k^2 &= 0, \\ V_2'' - V_2 k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Первое уравнение (2.46) – это основное уравнение линейной теории вязкой жидкости при постоянном значении κ_l (2.13), а второе получается из уравнения идеальной жидкости, например из (2.13) при устремлении κ_l к бесконечности (вязкость равна нулю).

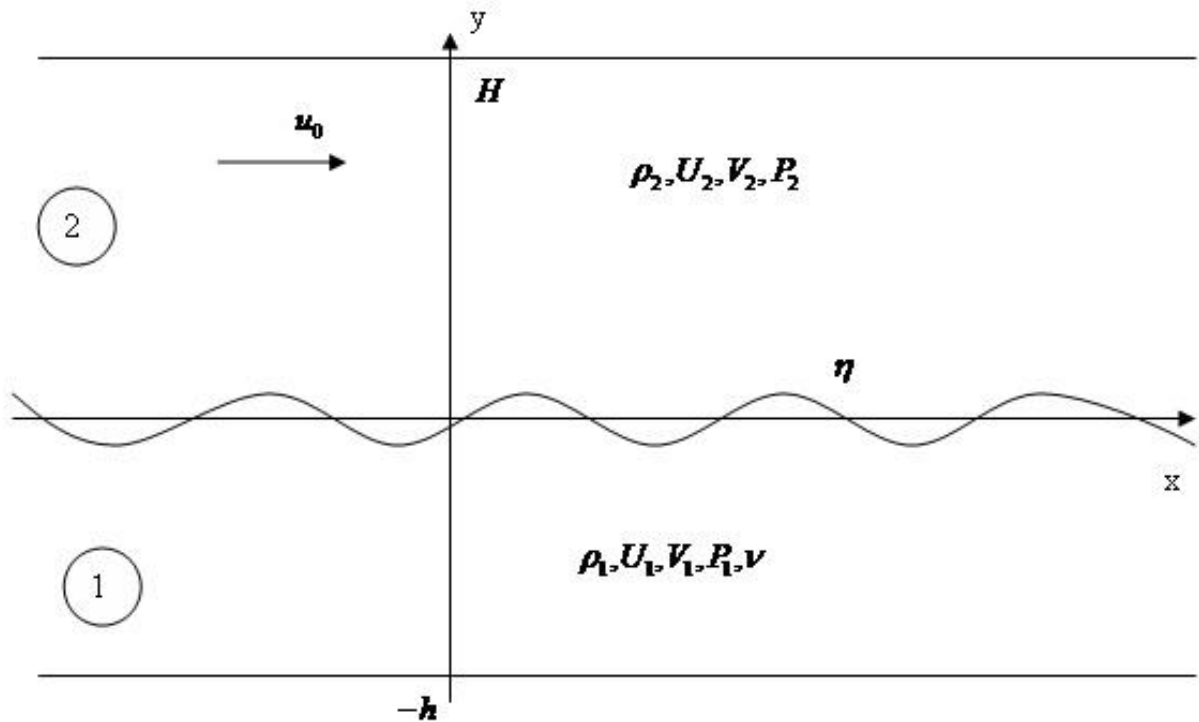


Рисунок 2.3 – Плоское течение двухслойной жидкости

Граничные условия после подстановки (2.44) в (2.41) и (2.42) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 V_2(H) = 0, U_1(-h) = V_1(-h) = 0; \\
 \eta_0 = \frac{V_1(0)}{\omega} = \frac{V_2(0)}{\Omega}; V_1''(0) + k^2 V_1(0) = 0; \\
 -\nu \rho_1 (V_1''(0) - V_1'(0) k_1^2) + 2\nu_1 \rho_1 k^2 V_1'(0) + \rho_2 \Omega V_2'(0) - A \eta_0 k^2 = 0;
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

где

$$\Omega = \omega - ik u_0, k_1^2 = k^2 + \omega / \nu, A = a(\rho_2 - \rho_1) - \sigma_0 k.$$

Краевая задача (2.46, 2.47) является базовой для дальнейшего анализа неустойчивостей Кельвина – Гельмгольца ($a=0$) и Релея – Тейлора ($a \neq 0$).

2.3.2 Вывод дисперсионного уравнения для конечных слоев, когда вязкость одинакова

Будем считать, что $\nu_1 = \nu$. Решения уравнений (2.46) с учетом первых трёх граничных условий на внешних границах слоев.

$$\begin{aligned}
 V_1(y) = B_1 (k_1 \operatorname{sh}(k(y+h)) - k \operatorname{sh}(k_1(y+h))) + \\
 + B_2 (\operatorname{ch}(k(y+h)) - \operatorname{ch}(k_1(y+h)))
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

$$V_2(y) = C_1 \operatorname{sh}(k(y - H)).$$

Подстановка (2.48) во вторые три (2.47) позволяет записать систему алгебраических уравнений для нахождения постоянных B_1 и B_2 :

$$a_{11}B_1 + a_{12}B_2 = 0, \quad a_{21}B_1 + a_{22}B_2 = 0;$$

где

$$a_{11} = z(z^2 + 1)\operatorname{ch}(d) - 2z\operatorname{ch}(zd) + \Omega(z\operatorname{sh}(d) - \operatorname{sh}(zd)), \quad (2.49)$$

$$a_{12} = z(z^2 + 1)\operatorname{sh}(d) - 2z\operatorname{sh}(zd) + \Omega(z\operatorname{ch}(d) - \operatorname{ch}(zd)),$$

$$a_{21} = -(z^2 + 1)\operatorname{sh}(zd) + 2z\operatorname{sh}(d), \quad a_{22} = -(z^2 + 1)\operatorname{ch}(d) + 2z\operatorname{ch}(d);$$

$$z = k_1 / k, \quad d = kh.$$

Из равенства определителя системы (2.49) получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} & (\mu\Omega^2 + \omega_0^2)(\operatorname{th} zd - z \operatorname{th} d) + \omega_v^2 G(z, d) = 0, \\ & G(z, d) = \left(-z(z^4 + 2z^2 + 5) + \operatorname{th} d \operatorname{th} zd (z^4 + 6z^2 + 1) + \frac{4z(z^2 + 1)}{\operatorname{ch} d \operatorname{ch} zd} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Для полу бесконечного вязкого слоя, т.е. при $h \rightarrow \infty$ получаем, что $\operatorname{th}(d), \operatorname{th}(zd), \operatorname{cth}(kH) \rightarrow 1$ и $\operatorname{ch}(d), \operatorname{sh}(d) \rightarrow \infty$ из (2.50) следует дисперсионное уравнение

$$((z^2 + 1)^2 - 4z) + C^2 + \mu(z^2 - 1 - i\omega_1)^2 = 0, \quad \omega_1 = ku_0 / \omega_v \quad (2.51)$$

Ранее такое уравнение было получено в [3]. Численный анализ этого уравнения привел к выявлению существования максимума декремента в нанометровом диапазоне. Ниже будет подробно проведен его анализ в коротковолновом диапазоне длин волн в связи с обнаруженными приближенными аналитическими зависимостями инкремента от волнового числа.

2.3.3 Дисперсионное уравнение для конечных слоев, когда вязкость учитывается на границе

Условимся, что $\nu = 0$, $\nu_1 \neq 0$. Это означает, что вместо основного дифференциального уравнения линейной теории четвертого порядка используется уравнение второго порядка. В первом уравнении системы (2.50) считаем, что $k_1 \rightarrow \infty$, тогда учетом граничных условий на внешних границах слоев и кинематического условия при условии $y=0$ получаем выражения для амплитуд поперечных скоростей:

$$V_1(y) = \frac{\omega sh(k(y+h))}{sh(kh)} \eta_0, V_2(y) = \frac{\Omega sh(k(H-y))}{sh(kH)} \eta_0 \quad (2.52)$$

В этом случае остается одно динамическое условие – скачок нормальных компонент тензора напряжений, а второе – равенство нулю касательных напряжений не используется.

$$\rho_1(2\nu_1 k^2 + \omega)V_1'(0) - \rho_2 \Omega V_2'(0) + \omega_0^2 \rho_1 \eta_0 k = 0 \quad (2.53)$$

Подстановка (2.61) в (2.62) даёт дисперсионное уравнение

$$\omega^2 + 2\omega(a + ib) + c = 0 \quad (2.54)$$

Где

$$a = \frac{\nu k^2 \rho_1 chkh}{R}, b = \frac{u_0 k \rho_2 chkH}{R}, c = \frac{(u_0 k)^2 \rho_2 chkH + shkH \omega_0^2}{R} = 0, \quad (2.55)$$

$$R = \rho_1 chkh + \rho_2 chkH.$$

Дисперсионное уравнение (2.54) было получено в работах [156, 157] для вязко потенциальной модели НКГ (вязкость присутствует в граничных условиях). В дальнейшем, оно было использовано в нашей работе, в которой было показано существование двух максимумов при определенных параметрах [49]. Этот факт позволяет использовать дисперсионное уравнение вязко-потенциальной жидкости, которое имеет простой вид, для качественного анализа неустойчивости Кельвина-

Гельмгольца границы раздела между идеальной и вязкой жидкостью. Численные расчеты зависимости инкремента от длины волны при определенных значениях параметров, соответствующих образованию внутренних нано слоёв при воздействии гетерогенных плазменных потоков на железо показали, что в случае тонкого движущегося слоя, в зависимости инкремента от длины волны наблюдается два максимума: в микро- и нано- диапазоне. Это соответствует развитию двухмодовой неустойчивости.

Двухмодовая неустойчивость в НКГ при численном анализе полного дисперсионного уравнения обнаружена в работе Li X., Tankin в 1991 году [164]. Прошло 35 лет со времени её публикации и цитирований более 200-х, а соотнести полученные значения длин волн с микро- и нано - размерами до нашей работы [49] не предпринималось.

2.3.4 Приближенный анализ Д. Тейлора

Перепишем дисперсионное уравнение (2.51) в ω представлении

$$(\omega + 2\mu k^2)^2 + \mu(\omega + i\nu_0 k)^2 + \omega_c^2 - 4\nu^2 k^3 \sqrt{k^2 + \omega/\nu} = 0, \quad (2.56)$$

$$\mu = \rho_2 / \rho_1, \omega_c^2 = \sigma k^3 / \rho_1, \operatorname{Re} \sqrt{k^2 + \omega/\nu} \geq 0.$$

Если при $\mu=0$ это уравнение полностью изучено (волны на поверхности вязкой жидкости), то при $\mu \neq 0$ это уравнение описывает неустойчивость Кельвина – Гельмгольца плоских полубесконечных слоев много вопросов. Например, при некоторых параметрах возможно существование гидродинамического и вязкостно обусловленного максимумов.

В работе Тейлора [150], выполненной в 1940 году, впервые проведен приближенный аналитический анализ дисперсионного уравнения в предположении, что отношение плотностей малая величина (вода – воздух). В настоящее время аналитические исследования дисперсионных

уравнения НКГ с учетом вязкости практически отсутствуют, поэтому обратимся к получению его результатов со своей модернизацией.

Выразим комплексную частоту по формуле $\omega = \alpha + i\Omega$, α – характеризует скорость роста амплитуды возмущений (декремент или инкремент в зависимости от знака), Ω – действительная частота, характеризует колебательный по времени процесс.

В уравнении (2.56) перейдем к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{\omega}{2\nu k^2}, \quad x = \frac{k_0}{k}; \quad k_0 = \frac{U^2 \rho_2}{\sigma} \quad (2.57)$$

Тогда (2.56) примет вид

$$(1 + \xi)^2 - \sqrt{1 + 2\xi} + \mu\xi^2 + i\xi x\sqrt{\mu\theta} + \theta x(1 - x)/4 = 0. \quad (2.58)$$

Где параметры определяются по формулам

$$\mu = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \theta = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \left(\frac{\sigma}{\nu U} \right)^2. \quad (2.59)$$

Обратная величина θ получила название число Тейлора. Далее Тейлор записывает $\xi = s + it$, и предполагая, что $t \ll s$, получает своё важное уравнение

$$(s + 1)^2 - \sqrt{1 + 2s} - \theta x(1 - x)/4 = 0. \quad (2.60)$$

Это уравнение даёт зависимость безразмерной скорости роста (s) от безразмерной длины волны (x) для различных параметрах θ . Анализ этого уравнения проведен численно-аналитическим методом и построена зависимость максимумов длин волн x_m от параметра θ . В этом состоит огромная заслуга Джеффри Тейлора. Скорость роста амплитуды гармоники с волновым числом k можно выразить

$$\alpha = 2\nu k_0^2 s(x) / x^2 \quad (2.61)$$

Максимальное значение $\alpha(x)$ соответствует такому значению x_m , при котором производная от функции $\alpha(x)$ равна нулю. Это условие можно записать в виде

$$s'(x) = \frac{s(x)}{x} \quad (2.62)$$

Дифференцируем уравнение (2.60) по x :

$$2s'(s+1) - \frac{s'}{\sqrt{1+2s}} + \theta(1-2x)/4 = 0 \quad (2.63)$$

После преобразований получим систему

$$\begin{cases} (s+1)^2 - \sqrt{1+2s} = \theta x_m (x_m - 1) / 4, \\ 2s(s+1) - \frac{s}{\sqrt{1+2s}} = \theta x_m (2x_m - 1) / 4. \end{cases} \quad (2.64)$$

Наш вклад в анализ уравнения Тейлора заключается в получении системы (2.64) и её аналитическом решении

$$x_m = \frac{1}{2} \frac{3s^2 \sqrt{1+2s} - \sqrt{1+2s} + 2s\sqrt{1+2s} + 1}{s^2 \sqrt{1+2s} - \sqrt{1+2s} + 1 + s} + \quad (2.65)$$

Полученное решение даёт значение x_m в безразмерном аналитическом виде. Графики зависимостей $\alpha(x)$, и приведены на рисунке 2.4. При нулевой вязкости $s \rightarrow \infty$, тогда $x_m = 3/2$, что соответствует гидродинамическому максимуму. Таким образом, при $\mu \sim 0$ не появляется вязкостно обусловленный максимум.

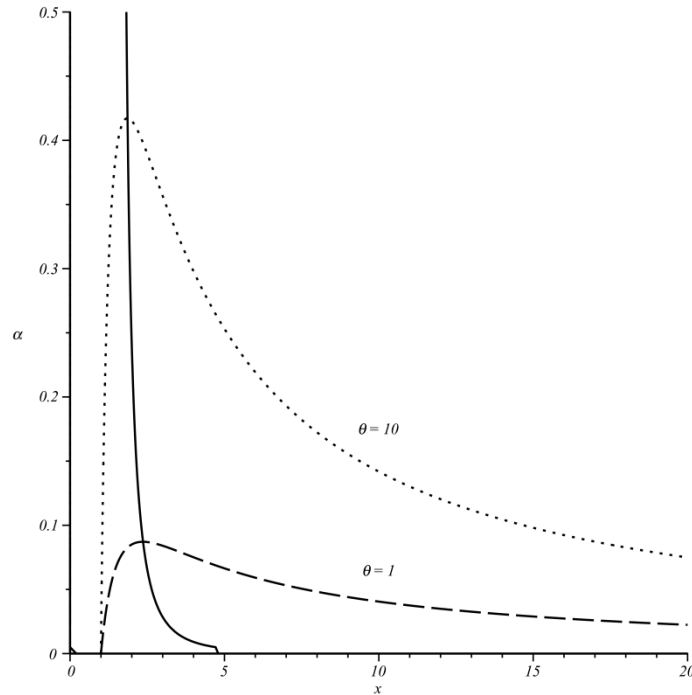


Рисунок 2.4 Штриховые линии – зависимости безразмерной скорости роста (α) от безразмерной длины волны (x) для двух значений параметра $\theta=1$ и 10, и сплошная линия – линия максимумов.

2.3.5 Анализ в приближении коротких волн.

Для коротких волн ($\nu k^2 \gg \omega$) уравнение (2.56) сводится к алгебраическому уравнению второго порядка с комплексными коэффициентами:

$$\omega^2 + 2\omega(a + ib) - c = 0,$$

$$a = a_0 k^2, b = b_0 k, c = \frac{1 + \mu}{\mu} b^2 - \frac{\omega_0^2}{1 + \mu}, a_0 = \frac{\nu}{1 + \mu}, b_0 = \frac{\mu \mu_0}{1 + \mu}. \quad (2.66)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.54), что означает эквивалентность вязко-потенциальной модели и модели коротких волн. Найдем решения уравнения (2.66).

Выделения мнимой и действительной частей (2.79) даёт систему:

$$\begin{cases} \xi^2 - \eta^2 = C, \\ \xi\eta = 1. \end{cases} \quad (2.67)$$

Где

$$\xi = \frac{a + \alpha}{\sqrt{ab}}, \eta = \frac{\Omega + b}{\sqrt{ab}}, C = \frac{\delta}{ab}, \delta = a^2 + c - b^2. \quad (2.68)$$

Решение (2.67) имеет вид:

$$\xi = \sqrt{\frac{C + \sqrt{C^2 + 4}}{2}}, \eta = \sqrt{\frac{C - \sqrt{C^2 + 4}}{2}} \quad (2.69)$$

Тогда скорость роста выражается:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + 4a^2b^2}}{2}} - a \quad (2.70)$$

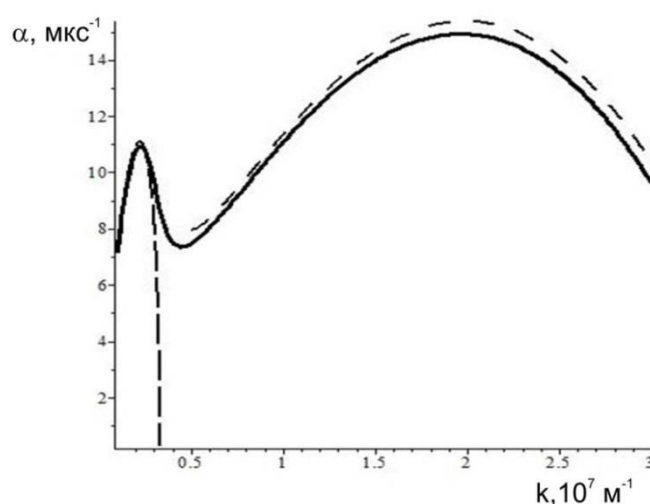


Рисунок 2.5 – Сплошная линия - зависимость скорости роста от волнового числа. Штриховые – приближенные зависимости для двух максимумов.

Формула (2.70) нами впервые была получена в [165]. Зависимость скорости роста от волнового числа при значениях $\mu \sim 10$, $u_0 = 30$ м/с, $\sigma_0 = 1,91$ Н/м, $\rho_1 = 7800$ кг/м³ и $\nu = 3 \cdot 10^{-6}$ м²/с приведена на рисунке 2.5. Из этого рисунка видно, что зависимость скорости роста от волнового числа имеет два максимума. Это новое обстоятельство и открывает возможности по моделированию поведению материала в условиях сдвиговых течений в нано- и микро- масштабах.

Формула (2.70) пригодна для численных расчетов, но не подходит для получения формул волновых чисел, при которых достигается

экстремальные значения α , потому, что приводит к громоздким выражениям. Поэтому найдем простые приближенные выражения, справедливы вблизи максимумов и явно зависящие от параметров задачи. При анализе таких формул выявляется механизм, который отвечает за появление того или иного максимума.

При нулевой вязкости ($\nu = 0$) (2.70) можно представить в виде:

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} x\sqrt{1-x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases} \quad (2.71)$$

Где

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad x = \frac{k}{k_0}, \quad k_0 = \frac{\mu u_0^2 \rho_1}{(1+\mu)\sigma_0}, \quad \alpha_0 = \frac{\mu^{3/2} u_0^3 \rho_1}{(1+\mu)^2 \sigma_0}. \quad (2.72)$$

Здесь через x обозначено безразмерное волновое число, а другие величины: σ_0 – поверхностное натяжение, u_0 – скорость движения второго слоя, ρ_1, ρ_2 – плотности первого и второго слоя, $\mu = \rho_2 / \rho_1$. Зависимость (2.72) имеет один максимум, характеристики которого определяются по формулам

$$\alpha_m = \frac{2\alpha_0}{3\sqrt{3}}, \quad x_m = \frac{2}{3}. \quad (2.73)$$

Длина волны на максимуме скорости роста выражается по формуле

$$\lambda_m = 3\pi(1+\mu)\sigma_0 / \mu u_0^2 \rho_1. \quad (2.74)$$

Для того, чтобы λ_m принадлежала нано метровому диапазону длин волн необходимо иметь скорости движения слоя более 10 км/с. Это очень сужает возможности моделирования. Этот максимум и его вязкий вариант будет называться гидродинамическим.

Рассмотрим случай $\nu \neq 0$, тогда (2.70) с учетом обозначений, входящих в (2.72), можно записать в виде:

$$\bar{\alpha} = x \sqrt{\frac{f(x) + \sqrt{f(x)^2 + g(x)^2}}{2}} - \sqrt{\varepsilon} x^2. \quad (2.75)$$

Где

$$f(x) = \varepsilon x^2 - x + 1, \quad g(x) = mx; \quad (2.76)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\nu \rho_1 U}{\sigma_0} \right)^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}, \quad m = 2\sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (2.77)$$

Формула (2.75) сложна для анализа, поэтому воспользуемся приближениями, в которых принципиальную роль играют соотношения между функциями $f(x) = \varepsilon x^2 - x + 1, |f(x)|$ и $g(x) = 2\sqrt{\varepsilon \mu} x$ [50]. Их взаимное расположение приведено на рисунке 2.6. Последующий анализ был проведен в наших работах [166, 167] и называется графо – аналитическим.

Абсциссы нулей функции $f(x)$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2, \\ x_2 &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon} - 1 - \varepsilon - 2\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Найдем координаты точек пересечения прямой с параболой $f(x)$ и $-f(x)$.

Для $f(x)=g(x)$

$$\begin{aligned} x_{p1} &= \frac{1 + m - \sqrt{(1 + m)^2 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \approx \frac{1}{1 + m} + O(\varepsilon), \\ x_{p2} &= \frac{1 + m + \sqrt{(1 + m)^2 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \approx \frac{1 + m}{\varepsilon} - \frac{1}{1 + m} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Для $-f(x)=g(x)$

$$\begin{aligned} x_{m1} &= \frac{1 - m + \sqrt{(1 - m)^2 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \approx \frac{1}{1 - m} + O(\varepsilon); \\ x_{m2} &= \frac{1 - m - \sqrt{(1 - m)^2 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \approx \frac{1 - m}{\varepsilon} - \frac{1}{1 - m} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Далее проведем аппроксимацию функции (2.75). Возможны варианты

$$1) \cdot |f(x)| > g(x),$$

тогда $\alpha(x)$ можно приближенно записать

$$\alpha_1 \approx \begin{cases} \alpha_{11}(x), & f(x) < 0; \\ \alpha_{12}(x), & f(x) > 0; \end{cases} \quad (2.81)$$

$$\alpha_{11}(x) = \frac{xg(x)}{2\sqrt{|f(x)|}} - x^2\sqrt{\varepsilon}, \quad \alpha_{12}(x) = x\sqrt{f(x)}\left(1 + \frac{g(x)^2}{8f(x)^2}\right) - x^2\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.81)$$

$$\alpha_{11} = \frac{xg(x)}{2\sqrt{-f(x)}} - x^2\sqrt{\varepsilon}, \quad (2.82)$$

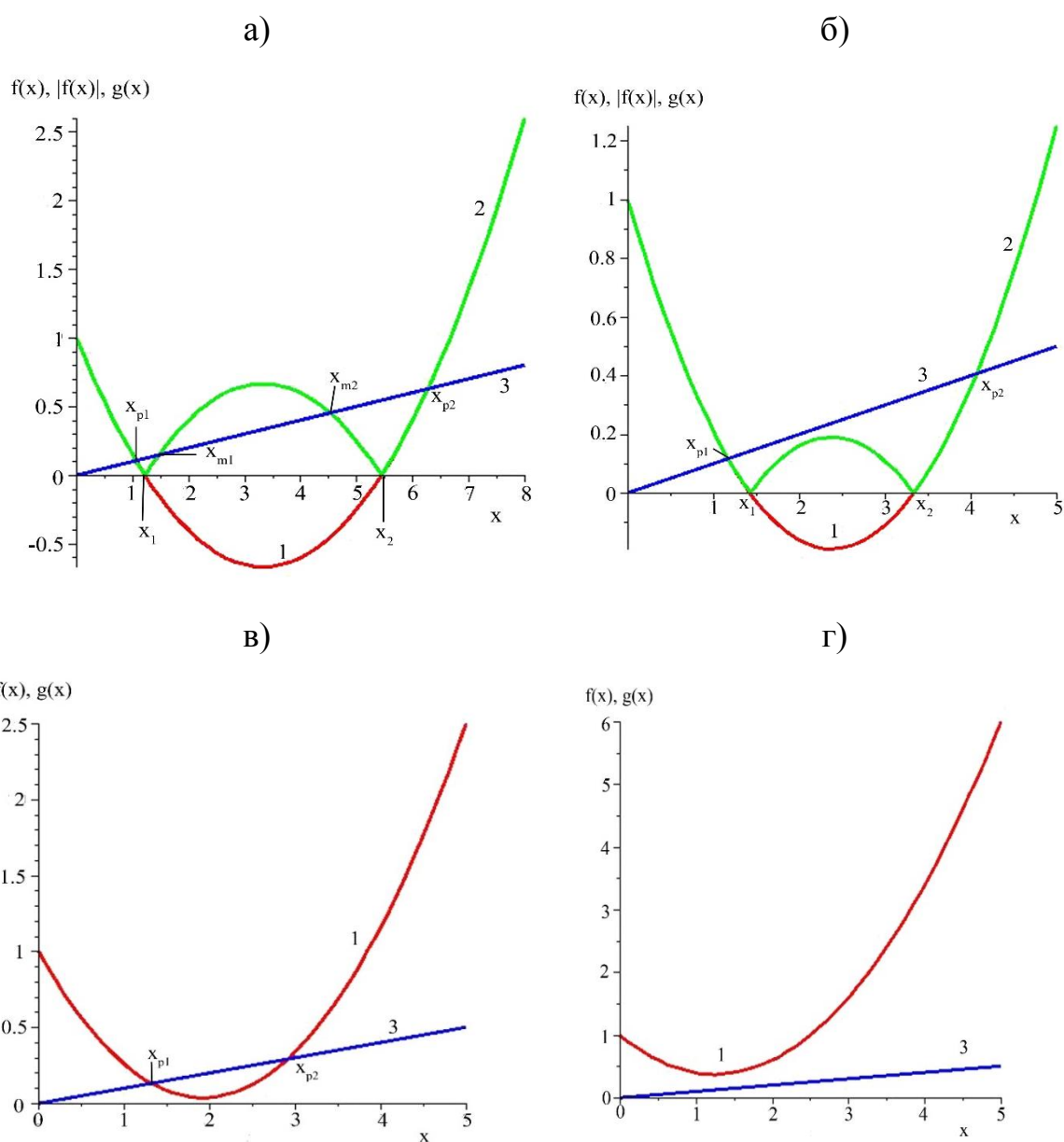


Рисунок 2.6. Возможные варианты пересечения параболы $f(x)$ и прямой

g(x)

2). $|f(x)| < g(x)$, тогда $\alpha(x)$ можно приближенно записать

$$\alpha_2 \approx x\sqrt{g(x)/2} \left(1 + \frac{f(x)}{2g(x)} + \frac{f(x)^2}{8g(x)^2} \right) - x^2 \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.83)$$

Рассмотрим два случая: а) - есть пересечения параболы с осью x (рис. 2.6 а, б), на плоскости параметров (рис.2.7), эта зона включает подобласти I и II; б) – нет пересечения параболы с осью x (рис. 2.7 в, г) на плоскости параметров эта зона включает подобласти III и IV.

а) При $0 < \varepsilon < 0,25$ уравнение $f(x)=0$ имеет два корня. Условие того, что прямая касается параболы, находится из уравнения $x_{1m} = x_{2m}$ и задается в виде

$$\varepsilon_1(m) = (1 - m)^2 / 4 \quad (2.84)$$

Это уравнение задаёт линию 1 рис. 2.7. Она разделяет область параметров на нижнюю (I) и верхнюю части (II).

б) При $\varepsilon > 0,25$ уравнение $f(x)=0$ не имеет корней. Условие касания прямой и параболы имеет вид:

$$\varepsilon_2(m) = (1 + m)^2 / 4 \quad (2.85)$$

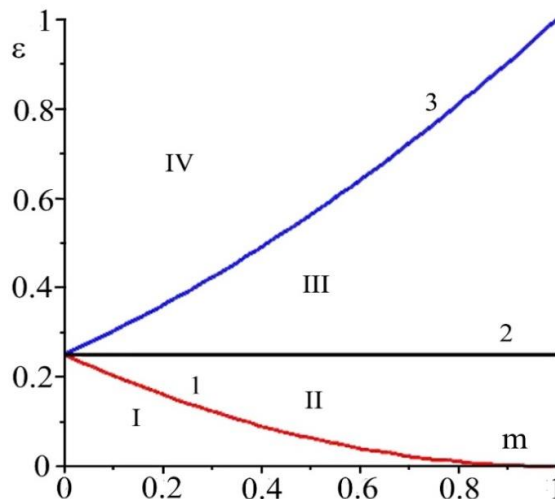


Рисунок 2.7. Плоскость параметров (ϵ, m) с указанием характерных зон.

Это уравнение задаёт линию 2 на рис. 2.7, которая разделяет область параметров на III и IV.

В области I функция $g(x)$ пересекает функцию $|f(x)|$ в четырех точках, тогда аппроксимирующая функция будет иметь вид:

$$\alpha_I = \begin{cases} \alpha_{12}(x), 0 < x < x_{p1}, \\ \alpha_{22}(x), x_{p1} < x < x_{m1}, \\ \alpha_{11}(x), x_{m1} < x < x_{m2}, \\ \alpha_{22}(x), x_{m2} < x < x_{p2}, \\ \alpha_{12}(x), x > x_{p1}. \end{cases} \quad (2.86)$$

В области II функция $g(x)$ пересекает функцию $f(x)$ в двух точках, тогда аппроксимирующая функция будет иметь вид:

$$\alpha_{II} = \begin{cases} \alpha_{12}(x), 0 < x < x_{p1}, \\ \alpha_{22}(x), x_{p1} < x < x_{p2}, \\ \alpha_{12}(x), x > x_{p2}. \end{cases} \quad (2.87)$$

Зависимости α_I и α_{II} представлены на рисунке 2.8.

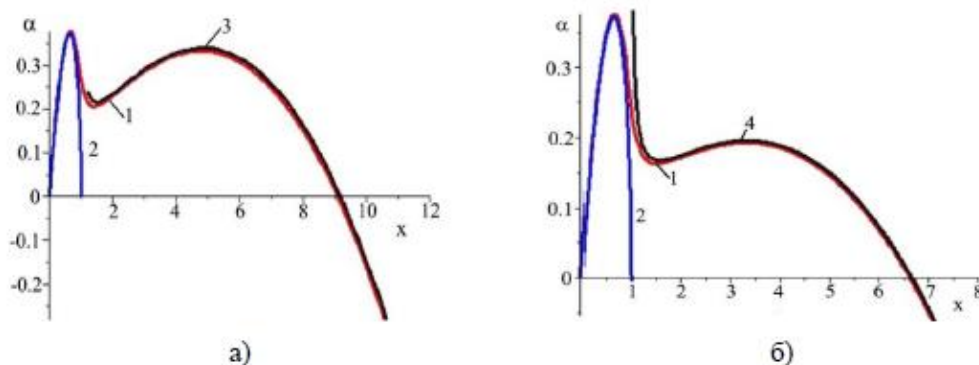


Рисунок 2.8. Зависимости безразмерной скорости роста возмущений от безразмерного волнового числа. а) - α_I и б)- α_{II} . Линии 1-(2.75), 2- α_{12} , 3- α_{11} , 4- α_{11} .

В области III получаем выражение аналогичное (2.87). В области IV можно пренебречь g , тогда получаем

$$\alpha_{IV} = x\sqrt{f(x)} - x^2\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.88)$$

Эта формула описывает вязкий гидродинамический максимум, так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем формулу (2.71) для НКГ идеальных жидкостей. Многие исследователи получали эту формулу и делали вывод, что вязкость слабо влияет на НКГ. Однако, в областях I, II и III всегда возникает вязко обусловленный максимум, что позволяет утверждать, что вязкость в НКГ имеет важную и принципиальную роль.

Поиск зависимостей x_m от параметров проведен в нашей работе [167] с помощью исследования поведения полученных приближений. Однако этот подход сопряжен с чрезвычайно громоздкими выкладками. Ниже рассмотрим более простой способ получения явных приближенных зависимостей для $x_m(\lambda_m)$.

Представим комплексную частоту в виде $\omega = \alpha + i\Omega$, где α – скорость роста, Ω – частота. Приведём уравнение (2.66) к системе двух уравнений: действительная и мнимая части. Эту систему можно свести к одному уравнению и записать в виде:

$$\alpha^4 + 4E\alpha^3 + (4E^2 + G)\alpha^2 + 2EG\alpha + E^2K = 0, \quad (2.89)$$

где

$$G = E^2 + K, \quad E = \frac{\nu k^2}{1 + \mu}, \quad K = K_1 - K_2, \quad K_1 = \frac{\omega_c^2}{1 + \mu}, \quad K_2 = \frac{\mu(kU)^2}{(1 + \mu)^2}.$$

С помощью неопределенных множителей уравнение (2.89) факторизуется на два квадратных уравнения, решение которого можно представить в виде

$$\alpha_1 = \sqrt{F_0} \left(x \sqrt{\varepsilon x^2 - x + 1} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon \mu x^2}{(\varepsilon x^2 - x + 1)^2}} - \sqrt{\varepsilon x^2} \right),$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\varepsilon F_0} x^2 \left(\sqrt{\frac{\mu x^2}{-\varepsilon x^2 + x - 1}} - 1 \right), \quad (2.90)$$

где

$$F_0 = \frac{\mu^3 \rho_1^2 U^6}{\sigma^2 (1 + \mu)^6}.$$

Здесь ветвь α_1 относится к гидродинамическому максимуму и её можно не исследовать. Вторая ветвь описывает вязко обусловленный максимум, поэтому рассмотрим подробнее.

Формулу (2.90) представим в безразмерном виде и для $x=1/\lambda$ получим зависимость для скорости роста

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu}}{\lambda^2 \sqrt{\lambda - \varepsilon - \lambda^2}} - \frac{1}{\lambda^2}, \alpha = \alpha_2 / \sqrt{\varepsilon F_0} \quad (2.91)$$

Необходимо провести параметрический (μ , ε) анализ функции (2.91) при малом значении ε . Для определения экстремальных значений в зависимости (2.91) найдем производную по λ

$$\alpha'(\lambda; \mu, \varepsilon) = \frac{(6\lambda^2 - 5\lambda + 4\varepsilon)\sqrt{\mu}}{2\lambda^3(\lambda - \varepsilon - \lambda^2)^{3/2}} + \frac{2}{\lambda^3} \quad (2.92)$$

Определим функцию

$$P(\lambda; \varepsilon) = \frac{6\lambda^2 - 5\lambda + 4\varepsilon}{(\lambda - \varepsilon - \lambda^2)^{3/2}}. \quad (2.93)$$

Таким образом, решение уравнения $\alpha'(\lambda; \mu, \varepsilon) = 0$ сводится к анализу следующего алгебраического уравнения

$$P(\lambda; \varepsilon) = \beta, \text{ где } \beta = -4/\sqrt{\mu} \quad (2.94)$$

В этом случае получается, что параметры ε и μ разделились и можно исследовать это уравнение для больших и малых значениях μ .

Приближение λ_1 при $\mu \ll 1$ имеет вид:

$$\lambda_{1\max} \approx 2,09\varepsilon(1 - 2,5\sqrt{\varepsilon/\mu}) \quad (2.95)$$

При $\mu \gg 1$ получаем

$$\lambda_{2\max} = 5/6 - 4\varepsilon/5 - \frac{4}{(1 + 3,12 \cdot \varepsilon)\sqrt{\mu}} \approx 5/6 - \frac{4}{\sqrt{\mu}} \quad (2.96)$$

Для оценки воспользуемся параметрами (сталь – сталь)

$$\nu \sim 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \sigma \sim 1 \text{ Дж}/\text{м}^2, \rho_1 \sim 10^4 \text{ кг}/\text{м}^3, \mu \sim 1. \quad (2.97)$$

для оценки вязко обусловленного максимума в размерном виде из (2.95) получим

$$\lambda_{1\max} = 2 \frac{\nu^2 \rho_1}{\sigma(1 + \mu)^3} \left(1 - 2,5 \frac{\nu \rho_1 U}{\sigma(1 + \mu)^2} \right) \approx 20(1 - 0,006 \cdot U)_{\text{нм}} \quad (2.98)$$

Таким образом, нашли приближенное значение λ_m для вязко обусловленного максимума, который в пределе нулевой скорости составляет 20 нм и при нулевой вязкости не существует.

Установлено, что вязкость принципиально изменяет зависимость декремента от длины волны, из-за появления второго максимума. Указан диапазон параметров, при которых возможен второй максимум. Найдены приближенные значения для длин волн, в которых достигаются максимальные значения декремента в вязких средах. Эти данные позволят подобрать технологические параметры при формировании наноструктурированных состояний. Использование полученных в данной работе результатов позволит не только объяснить, но и предсказывать условия формирования нано материалов.

2.4 Анализ дисперсионного уравнения для термокапиллярной неустойчивости полу бесконечного слоя

Термокапиллярная неустойчивость (ТКН) или неустойчивость Марангони обусловлена зависимостью коэффициента поверхностного

натяжения от температуры и использовалась для моделирования формирования ячеек в 90-х годах для полу бесконечного слоя [5, 58, 168–175]. Даже линейный анализ ТКН представляет определенные трудности, так как в самом простом случае – полу бесконечного слоя сводится к анализу многопараметрического трансцендентного дисперсионного уравнения. Это свойственно всем неустойчивостям, в которых учитывается вязкость. Поэтому используются различные упрощения, связанные с ограничением на параметры. Так, например, в [168] используется приближение малости числа Прандля ($Pr = \nu/\chi$; ν – коэффициент кинематической вязкости, χ – коэффициент температуропроводности) и рассмотрено два случая капиллярных и термокапиллярных волн. Для термокапиллярных волн в низкочастотном приближении ($|\omega| \ll \chi k^2$) получено квадратное уравнение, для которого проведен параметрический анализ. В [169] проведен численный анализ дисперсионного уравнения для конечного слоя и построены зависимости инкремента от длины волны. В этих работах деформация поверхности учитывается не в полной степени, о чем будет сказано ниже.

В [170, 171] рассмотрено высокочастотное приближение ($|\omega| \gg \chi k^2$) и считалось, что число Прандля порядка единицы. Из дисперсионного уравнения получили зависимость декремента от волнового числа с двумя максимумами. Для металлов значение числа Прандля составляет $Pr \sim 0.01$, поэтому предложенный анализ к нашей ситуации не подходит. В [172] проводится численный анализ дисперсионного уравнения с учетом деформации поверхности. В [173] численно решается краевая задача на определение собственных значений. В [174] проведен линейный анализ устойчивости осциллирующей конвекции Марангони в полу- бесконечном глубоком слое жидкости со свободной поверхностью. В частности, они представили некоторые численно рассчитанные кривые предельной

устойчивости и критические значения числа Марангони для начала конвекции и соответствующие аналитические результаты в асимптотическом пределе высокой частоты колебаний. В [175] исследовали начало конвекции Марангони в полу бесконечном глубоком слое покоящейся жидкости. Был проведен асимптотический и численный анализ нейтральных кривых как длинноволновых, так и коротковолновых возмущений. Найдены критические значения частоты и волнового числа. В [5] использовалась модель термокапиллярности с учетом давления набегающего потока плазмы для объяснения поверхностно периодических структур при воздействии гетерогенных плазменных потоков. В [58, 176] получено дисперсионное уравнение с учетом термокапиллярности для конечного слоя. В приближении малой глубины получено уравнение, численное решение которого позволило построить зависимость инкремента от длины волны с одним максимумом.

В большинстве проведенных исследований основной упор делается на получение и анализ нейтральной кривой – связь параметров при $\omega=0$. Это важная информация для выяснения области параметров, при которых наступает неустойчивость. С помощью этого подхода находится волновое число, при котором декремент переходит через ноль, то есть критическое волновое число. Это оказывается не достаточно, так важную роль играют те волновые числа, при которых возникает максимум инкремента.

2.4.1 Вывод дисперсионного уравнения

Выберем декартову систему координат (x, y, z) . Рассматривается вязкая несжимаемая теплопроводная жидкость, занимающая полу бесконечную область $(z < 0)$, на свободной поверхности $(z=0)$ которой поглощается тепло. Будем считать, что коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры

$$\sigma = \sigma_0 - \sigma_T (T - T_{00}). \quad (2.99)$$

Стационарное состояние определяется нулевыми скоростями и постоянным установившимся градиентом температуры по глубине слоя ($G_0 = T_0'(z) = \text{const}$).

Для исследования неустойчивости стационарного состояния используем возмущения скорости (\vec{V}), температуры ($T_0(z) + T(x, y, z, t)$) и свободной поверхности ($\eta(x, y, t)$). Линеаризуем уравнения Навье - Стокса и уравнение теплопроводности

$$\text{div } \vec{V} = 0, \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{V}, \frac{\partial T}{\partial t} + w G_0 = \chi \Delta T. \quad (2.100)$$

Здесь $\vec{V} = (u, v, w)$ – вектор возмущенной скорости и его компоненты на оси x, y, z ; ρ, ν, χ – плотность, кинематическая вязкость, температуропроводность расплава; p – давление в слое жидкости; T – возмущение температуры $T_0(z)$.

Граничные условия на поверхности при $z=0$:

$$\begin{aligned} -p + 2\nu\rho \frac{\partial w}{\partial z} &= \sigma \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right), \rho\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \rho\nu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \frac{\partial \eta}{\partial t} = w. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + a \frac{\partial T_0}{\partial z} \eta_x \right), \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} + a \frac{\partial T_0}{\partial z} \eta_y \right) \quad (2.102)$$

Здесь параметр a введен для того, чтобы сравнить дисперсионные уравнения, полученные в [169] при $a=0$ и при $a=1$ [170–174]. Если положить $\sigma_0 = 0$ и $a=0$, $\sigma_T \neq 0$, то получим задачу о термокапиллярной неустойчивости с недеформированной плоской границей (задача Пирсона). Поэтому мы случай $a=0$ назвали как учет деформация поверхности не в полной степени.

Граничные условия при $z \rightarrow -\infty$ примем нулевыми:
 $u = v = w = 0, T = 0$.

Зависимость возмущений соответствующих величин от координат и времени представим в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= U(z) \exp(\varphi), v(x, y, z, t) = V(z) \exp(\varphi), \\ w(x, y, z, t) &= W(z) \exp(\varphi), \\ p(x, y, z, t) &= P(z) \exp(\varphi), T(x, y, z, t) = T(z) \exp(\varphi), \\ \eta(x, y, t) &= \eta_0 \exp(\varphi); \varphi = \omega t - i(lx + my). \end{aligned} \quad (2.103)$$

где ω – частота возмущения; $\vec{k} = (l, m)$ – волновой вектор, i – мнимая единица.

Подстановка зависимостей (2.103) в (2.100 – 2.102) позволяет получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} R(z) &= iW'(z), \quad P(z) = \frac{\rho v}{k^2} (W'''(z) - k_1^2 W'(z)), \\ W''(z) - k_1^2 W'(z) - \frac{1}{\rho v} P'(z) &= 0, \quad T''(z) - k_2^2 T(z) - G_0 W(z) / \chi = 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Где

$$\begin{aligned} R &= lU + mV; \\ k_1^2 &= \omega / \nu + k^2, k_2^2 = \omega / \chi + k^2, k^2 = l^2 + m^2. \end{aligned} \quad (2.105)$$

После использования (2.105) получаем для (2.104)

$$\begin{aligned} W''''(z) - (k^2 + k_1^2) W''(z) + k^2 k_1^2 W(z) &= 0; \\ T''(z) - k_2^2 T(z) - G_0 W(z) / \chi &= 0. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Используем формулы (2.101, 2.102 и 2.105) для получения граничных условий:

$$\begin{aligned} -P(0) + 2\nu\rho W'(0) &= -\eta_0 k^2 \sigma_0, \\ \nu\rho (W''(0) - k^2 W(0)) &= -k^2 \sigma_T G_0 \Sigma_0, \\ \omega\eta_0 = W(0), T'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Где

$$\sigma_T = \text{const} > 0, \Sigma_0 = a\eta_0 + T(0) / G_0. \quad (2.108)$$

После преобразований система (2.107) примет вид

$$\begin{aligned} W'''(0) - (k_1^2 + 2k^2)W'(0) - k^3\omega_c^2 W(0)/(\omega\omega_\nu) &= 0, \\ W''(0) + k^2W(0) - \omega_T k^2 \Sigma_1(0)/\omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Где

$$\begin{aligned} \omega_c^2 &= \frac{\sigma_0}{\rho} k^3, \quad \omega_T = \frac{\sigma_T G_0}{\nu \rho}, \quad \omega_\nu = \nu k^2, \\ \Sigma_1(0) &= aW(0) + \omega/G_0 T(0). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Решения (2.106) имеют вид

$$\begin{aligned} W(z) &= A_1 \exp(kz) + A_2 \exp(k_1 z), \\ T(z) &= C \exp(k_2 z) - \frac{G_0}{\omega} (A_1 \exp(kz) - A_2 \delta \exp(-k_1 z)); \delta = \frac{\nu}{\chi - \nu}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Считаем, что $\text{Re}(k_1) > 0$ и $\text{Re}(k_2) > 0$. Здесь A_1 , A_2 и C произвольные постоянные. Выразим температуру на поверхности

$$T(0) = \frac{G_0}{\omega k_2} (A_1(k - k_2) + \delta A_2(k_2 - k_1)) \quad (2.112)$$

Где

$$\delta = \frac{\nu}{\chi - \nu}. \quad (2.113)$$

Определим Σ_1 через коэффициенты A_1 и A_2

$$\begin{aligned} \Sigma_1(0) &= aW(0) + \omega/G_0 T(0) = a(A_1 + A_2) + \frac{1}{k_2} (A_1(k - k_2) + \delta A_2(k_2 - k_1)) = \\ &= (a - 1 + k/k_2)A_1 + (a + \delta - \delta k_1/k_2)A_2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Подставив (2.114) в (2.109) получим систему уравнений относительно A_1 и A_2 .

$$\begin{aligned} (\omega\omega_\nu(z^2 + 1) + \omega_c^2)A_1 + (2z\omega\omega_\nu + \omega_c^2)A_2 &= 0, \\ (\omega_T(z_1(a - 1) + 1) - 2z_1\omega)A_1 + (\omega_T((az_1 + \delta(z_1 - z) - z_1\omega(z^2 + 1)))A_2 &= 0; \\ z = \sqrt{1 + \omega/\nu k^2}, z_1 = \sqrt{1 + \omega/\chi k^2}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Для ненулевого решения системы (2.114) определитель системы должен равняться нулю. Полученное уравнение связывает частоту (ω) и

модуль волнового вектора (k) и является дисперсионным уравнением. Представим это уравнение в виде $R_\sigma - R_T = 0$, где

$$\begin{aligned} R_T &= \omega_v \omega_T \\ &((1 - z/z_1)\delta(\omega^2 + 2\omega\omega_v + \omega_c^2) + (1 - 1/z_1)(2\omega\omega_v z + \omega_c^2) + a\omega(\omega + 2\omega_v(1 - z))) \\ R_\sigma &= \omega^2((\omega + 2\omega_v)^2 + \omega_c^2 - 4z\omega_v^2) \end{aligned} \quad (2.115)$$

Полученное дисперсионное уравнение является основным для дальнейшего анализа.

2.4.2 Коротковолновое приближение

Для металлов справедливо неравенство $\chi \gg v$, тогда число Прандтля $\delta \approx v/\chi = \varepsilon \ll 1$. Кроме того, используем приближение низкочастотных колебаний или коротких волн $|\omega| \ll \chi k^2$, которое рассмотрены в [169]. Тогда справедливы приближенные равенства

$$z_1 \approx 1 + \frac{\omega}{2\omega_\chi} \approx 1 + \varepsilon \frac{\omega}{2\omega_v}; \quad \frac{1}{z_1} \approx \frac{1}{1 + \omega/2\omega_\chi} \approx 1 - \varepsilon \frac{\omega}{2\omega_v}. \quad (2.116)$$

Используем полученные соотношения, пренебрегая величинами ε^2 , преобразуем (2.115) к виду

$$(z+1)^2((z^2+1)^2 + \omega_c^2/\omega_v^2 - 4z) - \frac{\omega_T}{2\omega_v}((z^2-1)(a+\varepsilon) + \varepsilon\omega_c^2/\omega_v^2) = 0 \quad (2.117)$$

Введем безразмерные параметры

$$C^2 = \frac{\omega_c^2}{\omega_v^2}, \quad C_1 = \frac{\omega_T(a+\varepsilon)}{2\omega_v}, \quad C_2 = \varepsilon \frac{\omega_T}{2\omega_v} \frac{\omega_c^2}{\omega_v^2}. \quad (2.118)$$

Используя введенные параметры, перепишем (2.117) в виде

$$\begin{aligned} (z+1)^2 F(z, C) - C_1(z^2-1) - C_2 &= 0; \\ F(z, C) &= (z^2+1)^2 + C^2 - 4z \end{aligned} \quad (2.119)$$

Полученное уравнение будет использовано при анализе термокапиллярных течений при воздействии электронных пучков на металлы и сплавы.

Выводы по главе

1. Получено условие разделения на длинные и короткие волны для модели вязких поверхностных волн.
2. Получено дисперсионное уравнение для возмущений на границе раздела слоев идеальной и вязкой жидкости. Показано, что неустойчивость Кельвина-Гельмгольца возникает как в микро-, так и в нано-диапазоне.
3. Показано, что дисперсионное уравнение, полученное в вязко-потенциальном приближении и дисперсионное уравнение коротких волн идентичны.
4. Получена параметризация инкремента неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в коротковолновом приближении.
5. Выведено дисперсионное уравнение в случае термокапиллярной неустойчивости.

ГЛАВА 3. ФОРМИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАДИЕНТНЫХ СТРУКТУР С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЗРЫВА ФОЛЬГИ ПРИ КОАКСИАЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ЭЛЕКТРОДОВ

Как уже отмечалось выше (пункт 1.1), одним из перспективных импульсных методов является метод воздействия на материалы продуктами электрического взрыва проводников при коаксиально расположенных электродах. Продукты электровзрыва проводника содержат твердые частицы и газо-плазменную составляющую – гетерогенные плазменные потоки (ГПП). Над электродами устанавливается направляющий канал, а в область взрыва помещается порошок. Из-за высокого давления частицы порошка имеют скорости порядка 1 км/с. Этот гетерогенный поток воздействует на поверхность исследуемой детали. Данный метод обработки позволяет вносить в поверхность различные порошки, и создавать соответствующую модификацию образца. При воздействии ГПП материал образца расплавляется на определенную глубину, и поэтому конденсированная составляющая проникает в поверхностные слои, производя тем самым легирование. Поэтому данный метод получил название электровзрывное легирование (ЭВЛ) [1].

Метод ЭВЛ включает следующие процессы:

электрический взрыв (электрические разряд и образование металлической плазмы, разлет плазмы под действием теплового и магнитного давлений, ускорение порошка плазмой);

- формирование гетерогенного плазменного потока в канале;
- взаимодействие гетерогенного потока с поверхностью;
- внедрение частиц ускоренного порошка в поверхностный слой;

- тепловое воздействие на материал образца;
- испарение и расплавление материала поверхностного слоя;
- гидродинамическое течения в расплавленном слое;
- затвердевание расплавленного сплава;
- структурно – фазовые превращения в зоне термического влияния.

Из представленных физических процессов наиболее важное значение имеют процессы, приводящие к созданию прерывистого воздействия на мишень и формирование микро- и нанорельефа. В данной главе представлены физические механизмы и математические модели этих процессов. Полученные в настоящей главе результаты опубликованы в [179, 180, 184].

3.1 Аппаратурное и методическое обеспечение формирования гетерогенных плазменных потоков

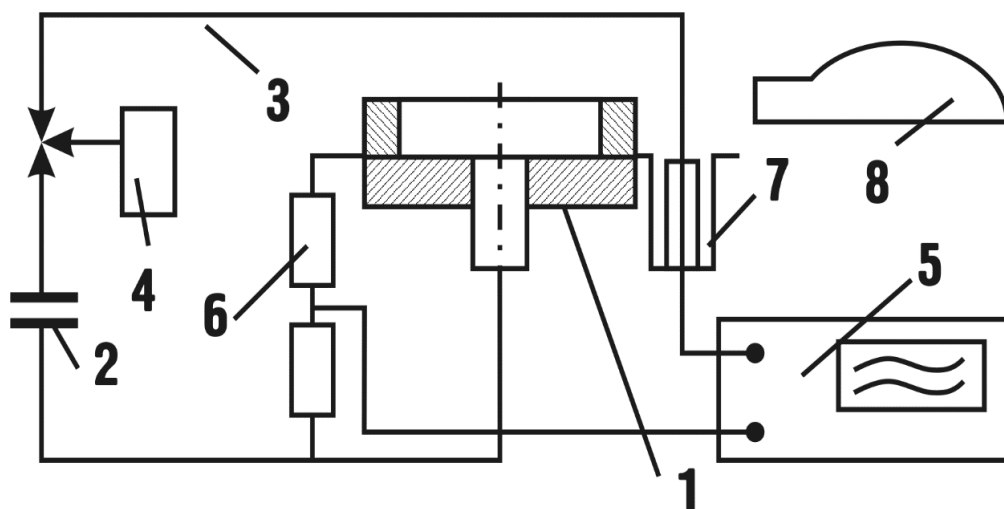
В настоящем параграфе приведены экспериментальные данные по формированию гетерогенных плазменных потоков, предложена схема формирования гетерогенного плазменного потока и математическая модель движения плазмы.

Важным обстоятельством для построения математических моделей образования градиентных структур с помощью гетерогенных плазменных потоков является знание основных параметров и зависимостей протекающих при этом процессов [1]. В нашем случае этими основными факторами будут конфигурация разряда, его динамика, зависимость силы тока от времени и механизм разлета.

Для изучения свойств гетерогенных плазменных потоков использовалась установка, включающая батарею импульсных конденсаторов, зарядное и разрядное устройства, и плазменный

ускоритель. Плазменный ускоритель выполнен в виде двух коаксиально расположенных цилиндрических электродов с замыкающей перемычкой, которая плотно прижата кольцом-каналом перпендикулярно их осям. Перемычка в наших экспериментах выбирается в виде тонкой алюминиевой фольги толщиной 10 мкм, толстых алюминиевых и медных пластин толщиной 0,1 – 1,0 мм.

Особенностью выбора устройства для регистрации разлета плазмы торцевого плазменного ускорителя является характерное время протекания процесса порядка 100 мкс. На рисунке 3.1 приведена принципиальная оптическая схема установки, включающая сверхскоростной фоторегистратор (СФР) с разверткой процесса по кадрам, разрядное устройство, позволяющее синхронизировать начало разлёта и съёмки.



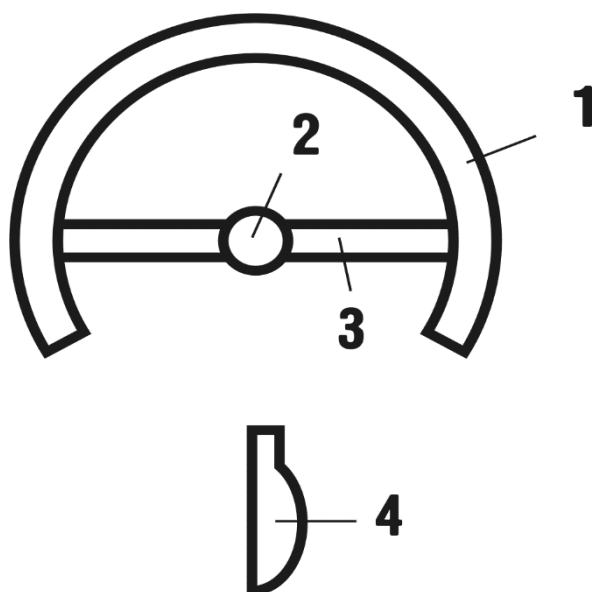
1 – плазменный ускоритель; 2 – батарея конденсаторов; 3 – форвакуумный разрядник; 4 – поджигающее устройство; 5 – запоминающий осциллограф;
6 – делитель напряжения; 7 – коаксиальный шунт; 8 – СФР

Рисунок 3.1 – Схема установки

Съемка разлета плазменного потока осуществлялась перпендикулярно оси ускорителя через окошко в прижимном кольце (рисунок 3.2). Поле зрения составляло 60x60 мм². Эксперименты

проводились в воздухе при атмосферном давлении. Выбирались алюминиевые фольги толщиной 10 мкм. В известных экспериментах [181–184] СФР съёмка производилась при вылете плазмы из сопла или через прижимную шайбу. Это не позволяло зарегистрировать начало формирования потока.

Разработанная методика отличается от известных, тем, что она позволяет наблюдать процесс разлета плазмы с начала формирования разряда. Это достигается тем, что наряду с круглыми фольгами, прижатыми по периметру кольцом, толщина которого ограничивает поле зрения, в наших экспериментах использовались фольги в виде полоски, которые зажимались кольцом с прорезью.



1 – прижимное кольцо; 2 – центральный электрод; 3 - взрывающаяся полоска; 4 – СФР.

Рисунок 3.2 – Схема фоторегистрации

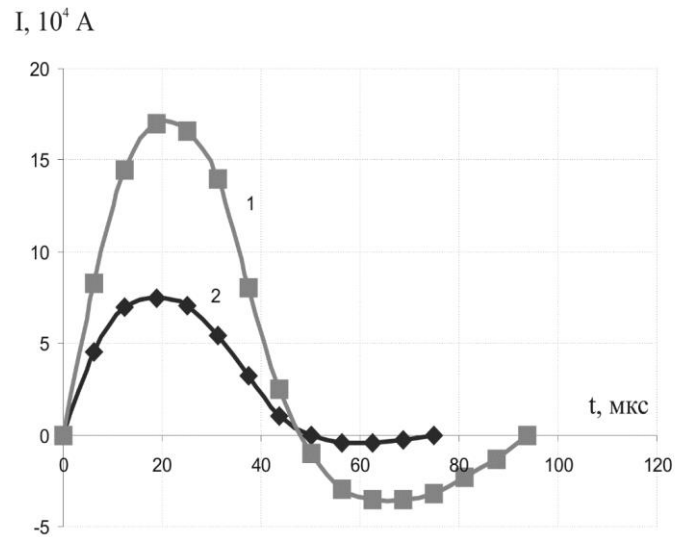
3.2 Результаты экспериментальных исследований

Для измерения зависимости силы тока от времени необходимо избавиться от электрических помех и добиться симметричного

распределения токов. С этой целью был изготовлен медный цилиндрический бандаж толщиной 0,9 мм, соединяющий крышку затворного устройства с корпусом. Сопротивление участка бандажа, на котором измерялось напряжение, составляло $4,4 \cdot 10^{-7}$ Ом. Измерения зависимости напряжения от времени проводились при помощи запоминающего осциллографа. Абсолютное значение тока рассчитывалось делением напряжения на сопротивление участка бандажа. При коротком замыкании в первом полупериоде зависимость силы тока от времени имеют форму синусоиды, а при переходе во второй полупериод происходит резкое уменьшение максимальной амплитуды, что связывается со скачкообразным изменением сопротивления форвакуумного разрядника (рисунок 3.3). Последнее обстоятельство доказывается зависимостью производной тока от времени, измеренной с помощью пояса Роговского, которая имеет скачок при переходе во второй полупериод. При коротком замыкании разрядного контура основное сопротивление сосредоточено в форвакуумном разряднике и в первом полупериоде пренебрежимо мало ($R=10^{-7}$ Ом). Это позволило, используя формулы идеального колебательного контура, провести расчеты параметров установки: ёмкость $C=2,7$ мФ, индуктивность $L=0,084$ мкГн и период полуразряда $T_{1/2}=47 \pm 1,5$ мкс. Имея ёмкость и индуктивность одного конденсатора ИМ-5-150: $C_0=150$ мкФ, $L_0=600$ нГн, можно определить индуктивность батареи 30 нГн и подводящих шин 54,7 нГн. Полученные данные используются для расчетов параметров математической модели. Максимальные значения тока составляют 170 кА и 85 кА. Такое различие объясняется тем, что часть тока в виде плазменного фокуса выносится из области разряда.

Из полученных кинограмм (рисунок 3.4) видно, что в начальный момент времени (до 10 мкс) в области центрального электрода образуется сферически расширяющаяся зона и в то же время происходит разряд

между электродами. При $t \geq 10$ мкс образуется квазистационарная конфигурация, имеющая струю в центре и основание, параллельное диэлектрической шайбе.



1 – короткое замыкание; 2 – пробой через плазму

Рисунок 3.3 – Зависимость силы тока от времени (осциллограммы)

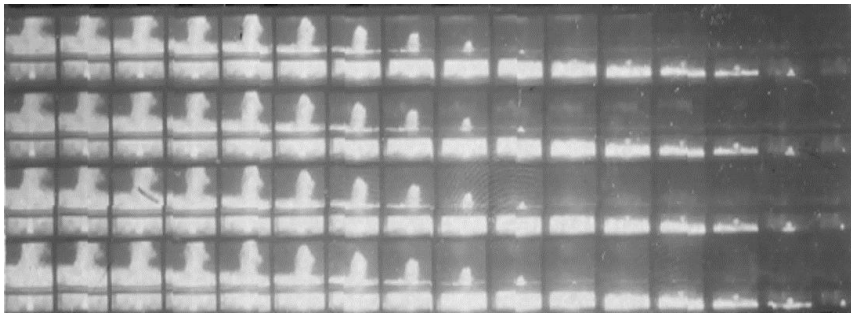
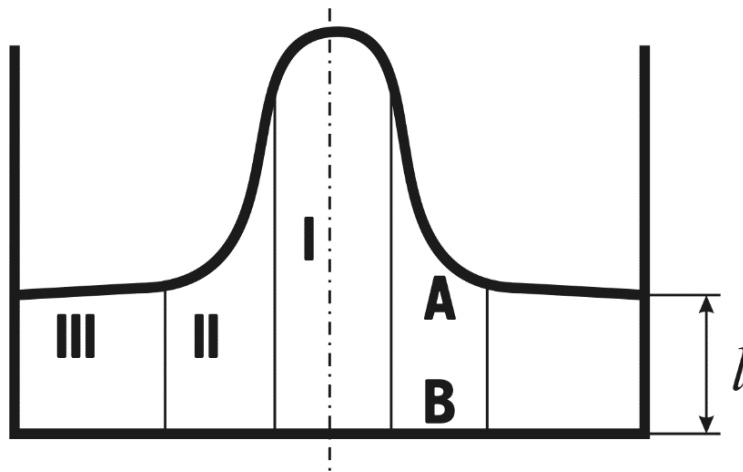


Рисунок 3.4 – Покадровая съемка (10^6 кад/с) при напряжении $U_0=1,2$ кВ

В результате анализа съёмки можно выделить три характерные зоны в формировании потока (рисунок 3.5). В первой зоне течение параллельно оси. Во второй зоне происходит поворот течения на 90° . В третьей зоне линии электрического тока параллельны диэлектрической шайбе.

Зависимость логарифма координаты от логарифма времени показана на рисунке 3.6 при разных напряжениях конденсаторной батареи.



I – область осевого тока, II – переходная область (разворот тока), III – область радиального растекания

Рисунок 3.5 – Схема разлета взрывающейся полосы

Из представленных графиков следует, что при напряжении $U_0 = 1$ кВ зависимость $\ln z$ от $\ln t$ является прямой линией. При напряжениях $U_0 > 1$ кВ происходит отклонение от этой прямой в некоторый момент времени. Это отклонение связывается со сменой механизма ускорения, включаются силы магнитного давления. Следовательно, при напряжениях меньше 1 кВ работает тепловой режим разлета, при больших значениях напряжений действует тепловое и магнитное давления. Эта смена механизмов будет отражена в математической модели.

Характер течения и динамику зоны III можно изучать теоретически, считая, что отрезок АВ на рисунке 3.5 параллелен оси Z и квазистационарно меняется со временем.

Полученные экспериментальные данные позволяют охарактеризовать плазму, как структуру, состоящую из двух характерных зон: высокоскоростная струя – типа плазменного фокуса с низкой плотностью и высокоплотная шайба с низкой скоростью.

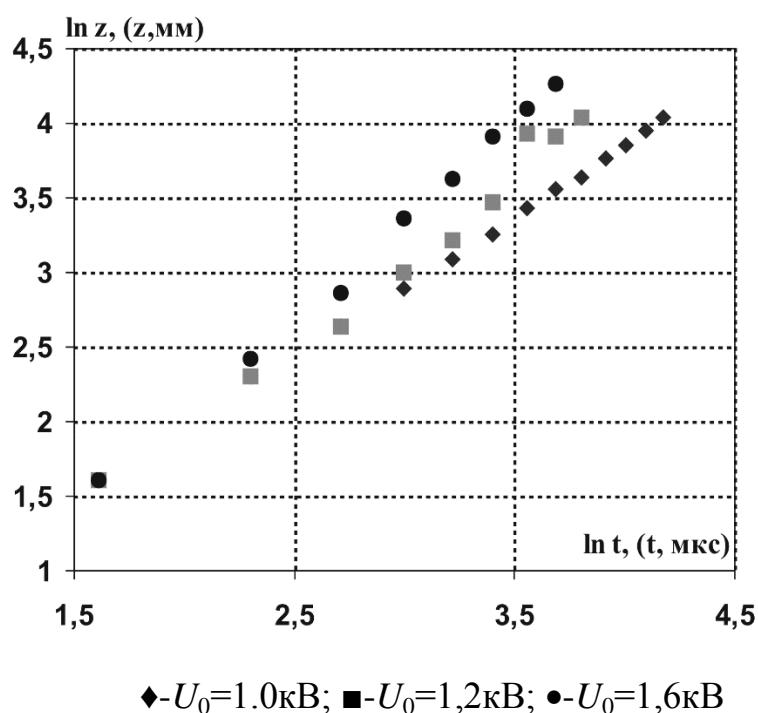


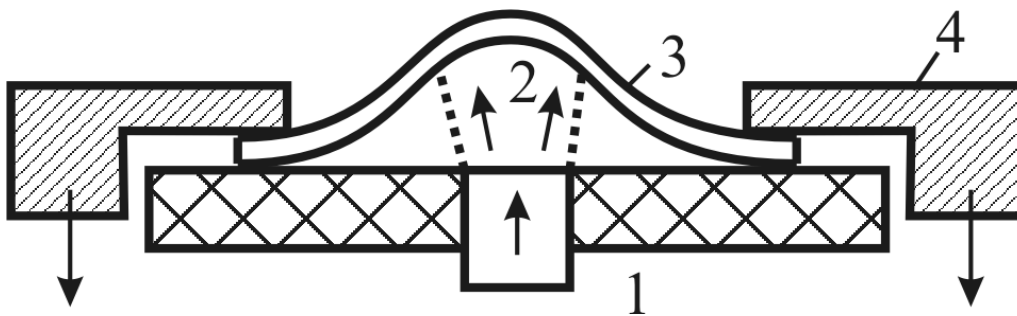
Рисунок 3.6. – Зависимость координаты зоны III от времени при напряжениях на конденсаторной батарее

3.3 Результаты исследований по деформированию невзрывающихся пластин

Моделирование особенностей процессов формирования ГПП на основе не взрывающихся пластин основано на импульсном деформировании металлических пластин заключается в пропускании электрического тока батареи конденсаторов через толстую листовую заготовку (толщина ~ 1 мм), замыкающую торцевые коаксиальные электроды [184]. При этом центральный электрод является подводным, а кольцевой заземлен и к нему прижимают заготовку. На рисунке 3.7 представлена схема реализации данной методики.

При разряде батареи конденсаторов через центральный электрод 1 (рисунке 3.7), образующийся плазменный столб 2, деформирующуюся пластинку 3 и кольцевой электрод 4 протекает ток. Плазменный столб

позволяет избежать разрыва электрической цепи при движении центральной части заготовки. Азимутальное магнитное поле, созданное вокруг подводящего электрода и плазменного столба, воздействует на радиально-растекающиеся по заготовке токи. Это приводит к возникновению магнитного и газодинамического давлений, в результате чего начинается деформирование и движение пластины. Зависимость электротока от времени при движении пластины и при КЗ совпадают. Этот факт можно объяснить тем, что при отходе пластинки от подводящего электрода возникающий плазменный канал имеет сопротивление в первом полупериоде не больше сопротивления первоначального контакта.



1 – центральный электрод, 2 – плазменный столб, 3 – деформирующаяся пластинка, 4 – кольцевой электрод

Рисунок 3.7 – Схема разряда через невзрывающуюся пластину

Для теоретического определения величины и распределения магнитного давления по радиусу будем считать, что ток однородный по электроду и плазме (при $d_s > 10$ мм это видно из эксперимента). Тогда для индукции магнитного поля из закона полного тока имеем:

$$B_\varphi = \mu_0 \cdot I \cdot r / (4\pi \cdot r_s^2), \text{ при } r \leq r_s, B_\varphi = \mu_0 \cdot I / (4\pi \cdot r_s), \text{ при } r \geq r_s. \quad (3.1)$$

Выделив кольцевой элемент пластины Δr при $r \leq r_s$ и используя непрерывность плотности тока можно записать для радиальной

составляющей силы тока, текущей через кольцевой элемент $2 \cdot r \cdot \Delta r$ получим:

$$\Delta I = 2I \cdot \Delta r / r, \text{ при } r \leq r_0; \Delta I = 2I \cdot r \cdot \Delta r / r_0^2, \text{ при } r \geq r_0. \quad (3.2)$$

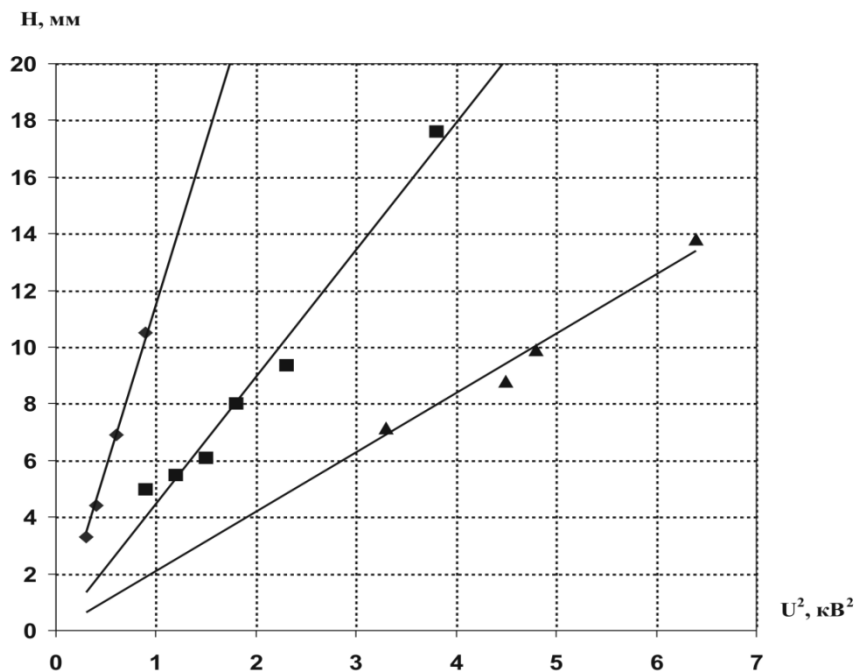
Учитывая, что магнитное давление на пластину можно выразить как отношение силы, действующей на кольцевой элемент, к его площади, запишем: $P(r) = 2\pi r B_\phi \Delta I / \Delta S$, и используя выражения (3.1) и (3.2), получаем:

$$P(r) = \frac{\mu_0 I^2}{\pi r_0^2} (r / r_0)^2, \text{ при } r \leq r_0, P(r) = \frac{\mu_0 I^2}{\pi r_0^2} (r / r_0)^{-2}, \text{ при } r \geq r_0. \quad (3.3)$$

Необходимо отметить, что полученное расчетным путем магнитное давление немонотонно зависит от радиуса с максимумом $P_m = \mu_0 \cdot I^2 / (\pi \cdot r_0^2)$ при $r = r_0$. Эта зависимость показывает, что при $r_0 \rightarrow 0$ получаем: $P_m \rightarrow \infty$. Учитывая это и то, что при малых значениях радиуса центрального электрода возникает благодаря пинч-эффекту тонкая плазменная струя, создающая дополнительное давление на пластину, то получаем значительную локализацию давления в центре заготовки. В этом случае при уменьшении радиуса центрального электрода прогибы пластины должны увеличиваться при одной и той же энергии батареи. Указанная тенденция подтверждается экспериментально.

На рисунке 3.8 приведены экспериментальные данные по зависимости глубины прогиба от квадрата напряжения зарядки (т.е. энергии) для различных значений радиуса центрального электрода для круглых пластин и для узких полосок, при этом их прогибы неразличимы. Из графиков видно, что при малых значениях диаметра центрального электрода прогибы становятся большими при одинаковом значении напряжения.

Таким образом, опыты по невзрывающимся пластинам позволили: выявить решающую роль такого параметра плазменного ускорителя, как диаметр центрального электрода в формировании потока плазмы. и механизм действия магнитодинамических сил; доказать эквивалентность по прогибу полосок и круглых пластин, что позволило при переносе этих результатов на тонкие фольги осуществить СФР съёмку начала формирования плазменного потока.



Диаметр центрального электрода \blacklozenge —10 мм; \blacksquare —15 мм; \blacktriangle —25 мм.

Рисунок 3.8 – Зависимость глубины прогиба от квадрата напряжения (круглые пластины и полоски)

3.4 Математическая модель формирования гетерогенных плазменных потоков

Процессы в плазменных ускорителях характеризуются сложным комплексом гидродинамических, тепловых и электромагнитных явлений, поэтому для математического моделирования необходимо привлекать систему уравнений нестационарной магнитогазовой динамики

излучающей плазмы. Решение этих уравнений в силу своей сложности возможно только численными методами, которые бы позволили детально описать для торцевого плазменного ускорителя механизмы взаимодействия плазменного фокуса (зона I) с растекающимся перпендикулярно оси потоком (зона III). Наличие свободной поверхности резко усложняет задачу даже для численного моделирования газодинамической задачи, и поэтому постановка и численное решение магнитоплазменной задачи является предметом специального исследования. С другой стороны, известные численные модели электромагнитных ускорителей содержат различные серьезные допущения, которые могут значительно исказить интегральные параметры плазменных потоков. Поэтому при моделировании плазменных потоков сложились определенные приемы и модели, связанные с упрощением исходной системы уравнений и позволяющие связать параметры установки с параметрами плазменных потоков. Такие модели для коаксиального ускорителя («модель шайбы») и для ускорителя с напуском газа («модель снегоочистителя») были предложены в 60-х годах, с помощью которых проведен ряд оптимизационных исследований. Для торцевого ускорителя, который рассматривается в данной работе, упрощенная модель ранее не предлагалась.

Ниже рассмотрим упрощенную задачу движения потока и разряда для торцевого ускорителя. На эту роль подходит исследование динамики зоны вне электродов (зоны III на рисунке 3.5). В качестве модели выбираем движение плазменного кольца-шайбы, внутренний диаметр которого коммутирует со струёй, а внешний – с периферийным электродом установки (рисунок 3.9). Задача состоит в расчете параметров плазменной перемычки, движущейся между коаксиальными электродами под действием собственного магнитного поля и газодинамического

давления. Ниже получим уравнения движения и уравнение Кирхгофа, а начальные условия выберем с учетом специфики нашей ситуации.

Схема разлета плазменной шайбы представлена на рисунок 3.9, где указано на разделение тока батареи на два направления вдоль шайбы, который замыкается на батарею и вдоль оси, который вылетает из ускорителя. Тогда силу тока батареи можно представить $I_0=I_1+I_2$, где I_1, I_2 - токи соответственно по шайбе и вдоль оси. На этом предположении основано объяснение различия в амплитудных значениях тока через взрывающуюся фольгу и деформируемую пластину. Поэтому это предположение может быть использовано в построении приближенной математической модели. Для простоты принимаем треугольный профиль скорости, давление при $z=0$ зависит от средних значений температуры и плотности, а сила сопротивлению движению пропорциональна квадрату скорости.

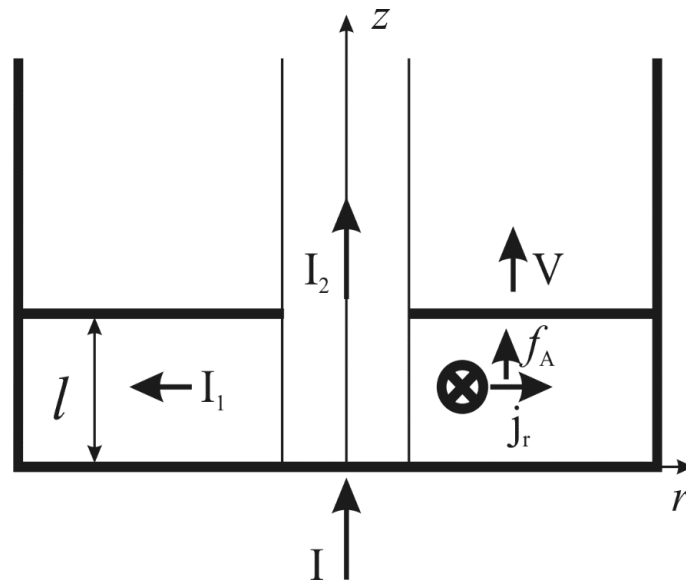


Рисунок 3.9 – Схема процесса разлета плазменного потока

В качестве исходных уравнений модели выбираем законы изменения импульса и массы и закон Кирхгофа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho V}{\partial z}, \quad \frac{\partial \rho V}{\partial t} = -\frac{\partial \rho V^2}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + f_A, \quad (3.4)$$

$$Q/C_0 + \frac{d}{dt}(L_0 I + \Phi) + (R_0 I + R_p I_1 + U_E) = 0.$$

где V - скорость вдоль оси z , ρ - плотность плазмы, p - давление, f_A - объёмная плотность силы Ампера, Q - заряд на батарее во время разряда, I - сила тока через батарею, I_1 - сила тока через плазменную шайбу и параметры задачи: C_0 , L_0 , R_0 - ёмкость батареи, индуктивности и сопротивления батареи, Φ , R_p - магнитный поток плазменной шайбы и ее сопротивление, U_0 , U_E - напряжение на батарее, индуцированное в плазме напряжение. Определим интегральные характеристики течения импульс, массу шайбы, силу Ампера, магнитный поток плазменной шайбы и ее сопротивление, индуцированное в плазме напряжение за счет ее движения по формулам:

$$P = \int_0^l \int_a^b \rho V(z, r, t) 2\pi r dr dz; \quad M = \int_0^l \int_a^b \rho(z, r, t) 2\pi r dr dz$$

$$F_A = \int_0^l \int_a^b j_r B_\phi(z, r, t) 2\pi r dr dz; \quad U_E = \int_0^l \int_a^b V B_\phi(z, r, t) 2\pi r dr dz \quad (3.5)$$

$$\Phi = \int_0^l \int_a^b B_\phi(z, r, t) 2\pi r dr dz; \quad R = \left(\int_0^l \int_a^b (j_r(z, r, t) 2\pi / \sigma) 2\pi r dr dz \right) / I$$

Учитывая, что $\frac{d}{dt} \int_0^l f(z, t) dz = \dot{l} \cdot f(l, t) + \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} f(z, t) dz$. при условии: $f(0, t) = 0$

и $\dot{l} = V$. Усредняя первые два уравнения (3.4) по пространству, получим уравнения движения и изменения массы для всей шайбы как целого:

$$\frac{dP}{dt} = F_A - \rho_0 V^2 S + RT \frac{M}{l\mu}, \quad \frac{dM}{dt} = 0 \quad (3.6)$$

При выводе уравнений (3.6) воспользовались: $V(0, t) = 0$, уравнением идеального газа $p(0, t) = RT\rho/\mu$, и законом сопротивления в виде $p(l, t) = \rho_0 V^2$. Здесь ρ_0 , T , μ , R - соответственно плотность окружающей среды,

температура и молярная масса плазмы, универсальная газовая постоянная. Выражения для давления отражают характер сопротивления движению плазменного сгустка и газодинамическое давление за счет высокой температуры. Из второго уравнения (3.6) следует, что масса шайбы остается постоянной. Принимая, что распределение скорости по оси (z) будет треугольным с максимумом V при $z=l$, то из определения импульса P из (3.5) следует $P=MV/2$.

Выразим силу Ампера F_A через силу тока в контуре. Считаем, что токи по зонам I и III пропорциональны току батареи $I_1=kI$, $I_2=(1-k)I$, и они однородны, тогда учитывая, что $B_\varphi = \mu_0 \cdot I_2 / 2\pi \cdot r$ и $j_r = I_1 / 2\pi r l$ получим $F_A = I_1 I_2 A$, где $A = \mu_0 \cdot \ln(a/b) / 2\pi$, a и b -геометрические размеры соответственно периферийного и центрального электродов. Вводя обозначения: $A_1 = 2k(1-k)A/M$, $A_2 = RT/\mu$, $\alpha = 2\rho_0 S/M$ систему уравнений (2.6) можно свести к системе:

$$\frac{dV}{dt} = A_1 \cdot I^2 + A_2 / l - \alpha \cdot V^2, \quad \frac{dl}{dt} = V. \quad (3.7)$$

Для преобразования уравнения Кирхгофа рассчитаем магнитный поток, сопротивление плазмы и индуцированное напряжение по формулам

$$(3.5). \text{ Магнитный поток: } \Phi = \int_{\Sigma} B d\Sigma = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left(\int_a^b \frac{l}{r} dr \right) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} l \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = A I_1 l.$$

Отсюда для индуктивности плазмы получаем $L = \Phi / I_1 = A \cdot l$. Индуцированное падение напряжения: $U_E = V A I_1$. Тогда уравнение Кирхгофа можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (L_0 I + l \cdot A I_1) + (R_0 I + (R_p + VA) I_1) + Q/C &= 0 \\ \frac{dQ}{dt} &= I_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, выведенная система уравнений математической модели имеет вид (3.7) и (3.8), которую необходимо решать при начальных условиях

$$l(0)=V(0)=I(0)=0, Q(0)=U_0C_0 \quad (3.9)$$

Здесь U_0 -начальное напряжение на батарее конденсаторов.

Для анализа полученной системы уравнений оценим величины, входящие в (3.7) – (3.9). Для этого используем данные установки и параметры материалов:

- размеры электродов: $a=5$ мм, $b=25$ мм; $S=2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$;
- индуктивность и ёмкость батареи: $L_0=0.84 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$, $C_0=3$ мФ;
- характерные скорость и длина сгустка плазмы : $V=1$ км/с, $l=50$ мм;
- плотности алюминия и воздуха: $\rho=2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_0=1.3 \text{ кг/м}^3$;
- удельная проводимость плазмы: $\sigma=3.3 \cdot 10^7 \text{ 1/(Ом}\cdot\text{м)}$;
- толщина и масса фольги: $h=10$ мкм, $M=4 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$;
- сопротивление батареи: $R_0=10^{-7} \text{ Ом}$;
- амплитудное значение тока и время полпериода: $I_m=10^5 \text{ А}$, $T_{1/2}=5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$.

Тогда для параметров системы получаем: $A=3.2 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$, $A_1=6 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/(м кг)}$, $\alpha=50 \text{ м}^{-1}$, $R_V \approx 3.2 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}$; $R_p \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}$. Для первого уравнения системы (3.7) получаем оценки каждого слагаемого $dV/dt \approx V/T_{1/2} = 2 \cdot 10^7 \text{ м/с}^2$; $A_1 I_m^2 \approx 12 \cdot 10^7 \text{ м/с}^2$; $\alpha V^2 \approx 10 \cdot 10^7 \text{ м/с}^2$. Для первого уравнения системы (2.8) получаем оценки каждого слагаемого $U_0 \approx 10^3 \text{ В}$;

$$C^{-1} \int_0^t I dt \approx 0.5 I_m T / C = 0.8 \cdot 10^3 \text{ В};$$

$$\frac{d}{dt} (L_0 I) \approx L_0 I_m / T = 0.2 \cdot 10^3 \text{ В}; \frac{d}{dt} (\ell \cdot A) I \approx \ell A I_m / T = 32 \text{ В};$$

$$(R_0 + R_p + VA) I \approx (10^{-7} + 4 \cdot 10^{-5} + 3.2 \cdot 10^{-4}) I_m = 32.4 \text{ В}.$$

Из приведенных оценок следует, что все члены, входящие в уравнение движения (3.6), имеют один порядок, а в системе уравнений (3.7) можно оставить слагаемые, связанные только с батареей. Тогда её решение станет не зависимым от движения плазмы и может быть представлено в виде: $I = I_m \sin(\omega t)$, где $\omega = 2\pi/T$ и $I_m = U_0 C_0 \omega$ однозначно выражаются через параметры установки и начальное напряжение батареи. Такое представление количественно не согласуется с экспериментальными данными по току, так как максимальное значение тока в разряде через фольгу составляет 50% от I_m (рисунок 3.3). Однако из него следует, что зависимость силы тока от времени в первом полупериоде близка к синусоиде, но с другим значением I_m . Поэтому рассмотрим упрощенную модель с целью изучить её возможность в моделировании зависимости координаты третьей зоны от времени при условии, что амплитудное значение тока будет подгоночным параметром.

Исследуем возможность математического моделирования движения третьей зоны *только с учетом магнитодинамического давления*, т.е. при $A_2=0$. Тогда (3.5) примет вид:

$$\frac{dV}{dt} = A_1 I_m^2 \sin^2(\omega t) - \alpha V^2, \quad \dot{l} = V \quad (3.10)$$

С начальными условиями: $V(0)=l(0)=0$. Введем безразмерные переменные:

$$x = \omega t, \quad y = V/V_0, \quad z = l/l_0 \quad (3.11)$$

тогда систему (3.10) запишем:

$$y' + y^2 = 2f \sin^2(x), \quad z' = y; \quad y(0) = z(0) = 0 \quad (3.12)$$

где обозначено $V_0 = \omega/\alpha$, $l_0 = V_0/\omega$, $f = A_1 I_m^2 \alpha / 2\omega^2$.

В системе уравнений (3.12) введена безразмерная величина, f от которой как от параметра, зависит решение задачи и, следовательно,

характер развития зоны III во времени. Нас интересует диапазон изменения аргумента x от нуля до π , что соответствует изменению времени от нуля до $T_{1/2}$, до которого были произведены измерения координаты третьей зоны. Поэтому математическая задача ставится следующим образом: изучить поведение решения задачи (2.12) в зависимости от параметра f .

Первое уравнение (3.12) является общим уравнение Риккати, которое можно свести к линейному уравнению Матье с помощью замены $y=u'/u$. Тогда (3.12) преобразуется к виду: $u'' - 2f \sin^2(x)u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Последующая подстановка $\xi = \sin^2(x)$ и $\eta(\xi) = u(x)$ дает:

$$2\xi(1-\xi)\eta'' + (1-2\xi)\eta' - f\xi\eta = 0, \quad \eta(0) = 1, \quad \eta'(0) = 0 \quad (3.13)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, решение которого в виде ряда:

$$\eta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k. \quad \text{После преобразований получаем рекуррентное}$$

соотношение:

$$c_k = (2c_{k-1}(k-1)^2 + fc_{k-2})/(k(2k-1)), \quad c_0 = 1, \quad c_1 = 0 \quad (3.14)$$

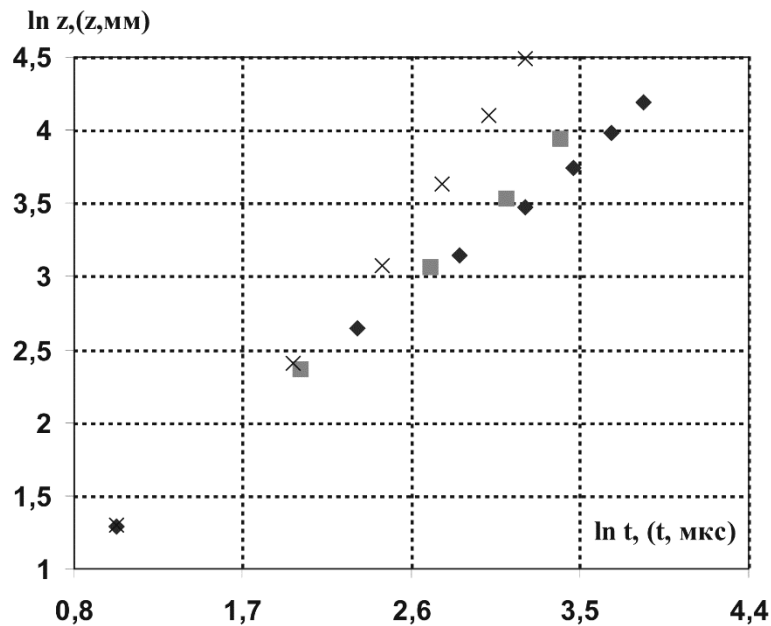
Здесь ограничились тридцатью членами по ξ , при этом параметр f остается неопределенным. Далее строим теоретическую зависимость $\ln(z)$ от $\ln(x)$ для того, чтобы сравнить с экспериментальной зависимостью $\ln(z)$ от $\ln(t)$, представленной на рис. 3.6. Если экспериментальная зависимость $\ln(z)$ от $\ln(t)$ близка к линейной, то теоретическая зависимость ни при каких значениях параметра f не является токовой. Это указывает на неправомочность однопараметрического моделирования движения, а физически означает, что только одна сила Ампера не обеспечивает механизма ускорения.

Учтем действия газодинамического и магнитного давлений. Перейдем к безразмерным переменным в системе уравнений (3.8) и (3.9). $x=t/t_0, z=l/l_0, y=V \cdot t_0/l_0, q=Q/(C_0 \cdot U_0)$. Тогда получаем систему уравнений модели:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= kf_1 \cdot \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + f_2/z - y^2 & \frac{dz}{dx} &= y \\ (1 + kf_3z) \frac{d^2q}{dx^2} + f_3 \left(\frac{dq}{dx}\right) y + q &= 0 & (3.15) \\ y(0) = z(0) = \frac{dq}{dx}(0) &= 0, & q(0) &= 1 \end{aligned}$$

и параметры задачи:

$$\begin{aligned} f_1 &= 2k(1-k)A(C_0U_0)^2/(M \cdot l_0), \\ f_2 &= 2RT(T_{1/2})^2/\mu l_0, f_3 = 2k(1-k)A \cdot l_0/L_0 \end{aligned} \quad (3.16)$$



При ◆- $f_1=6, f_2=1$; ■- $f_1=20, f_2=1$; ×- $f_1=80, f_2=1$

Рисунок 3.10 – Моделирование движения зоны III

Как следует из оценок $f_3 \approx 0$. Тогда появляются только два безразмерных параметра f_1, f_2 , которые определяют зависимость координаты третьей зоны от времени для различных для различных

значений напряжений. Система уравнений решается численно. Полученные решения системы для различных параметров f_1 , f_2 представлены на рисунке 3.10.

Теоретическая зависимость $ln(z)$ от $ln(x)$ имеет участки линейной зависимости и близка к экспериментальной. Математическая модель, основанная на вариации двух параметров, демонстрирует хорошее согласие с экспериментальными данными и позволяет установить совместное влияние теплового и газодинамического давлений на исследуемый процесс.

Таким образом, полученные в данной работе экспериментальные данные по формированию гетерогенного плазменного потока получили адекватную интерпретацию в рамках математической модели, учитывающей механизмы теплового и магнитного давлений.

3.5 Численная модель формирования гетерогенных плазменных потоков

Предложенная выше модель формирования гетерогенного плазменного потока дает качественное объяснение поведению гетерогенного плазменного потока в зоне, где линии тока параллельны диэлектрической шайбе. Для получения более полной картины, как показывают работы [185–187], необходимо прибегнуть к численным магнитогидродинамическим моделям. В качестве примера можно привести модель течения плазмы в установке Филиппова [185, 189]. В этой работе предложена одножидкостная модель течения токовой плазменной оболочки, которая показала хорошее согласие с экспериментальными данными. В нашей работе мы также применим одножидкостную магнитогидродинамическую модель. На рисунке 3.11 представлена расчетная схема. В области $0 < r < r_1$ задается входной электрический ток,

плотность которого равна $j_0 = \frac{I_0}{\pi r_1^2} \sin\left(\frac{\pi}{T}\right)$, где T – полупериод импульса, I_0 – амплитуда тока. В области $r_2 < r < r_3$ будем считать потенциал V равным нулю.

Для расчета течения плазмы на нижней границе ставилось условие равенства нулю скорости, а на остальных считалось равным нулю давление. Система уравнений модели имеет вид:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{F}_V; \nabla \cdot \vec{v} = 0; \nabla \cdot \left(\sigma \nabla V + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0; \quad (3.17)$$

$$\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \sigma \nabla V = 0$$

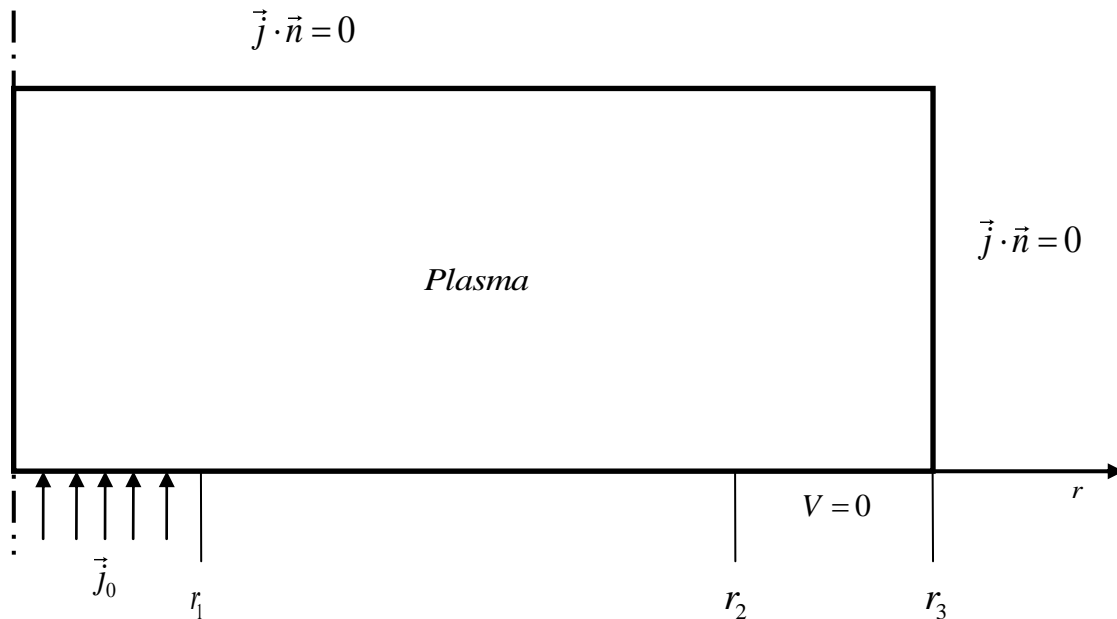


Рисунок 3.11 – Расчетная схема магнитогидродинамической модели

где \vec{v} – вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, μ – динамическая вязкость, \vec{F}_V – объемные силы, которые задаются суммой силы Лоренца и силы тяжести: $\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_0 \vec{g}$. Распределение температур в расчетной области определялось, исходя из уравнения конвективной теплопроводности с объемным источником тепла.

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + S_V, \quad (3.18)$$

где T – температура, C_p – удельная теплоемкость, k – коэффициент теплопроводности, S_V – объемные источники тепла. Объемным источником тепла является только эффект Джоуля $S_V = \vec{j} \cdot \vec{E}$. Система уравнений (3.17) и (3.18) решалась методом конечных элементов. Данные для расчетов приведены в таблице 1. Результаты моделирования представлены на рисунках 3.12 и 3.13. Рисунок 3.12а демонстрирует распределение электрического тока в момент времени 11 мкс. Из данного рисунка видно, что существуют две характерные области. В первой области линии тока перпендикулярны плазменной шайбе, а во второй соответственно параллельны. Это подтверждает правильность предположений о течении тока при построении модели движения плазмы в зоне III. Анализ полей силы Лоренца (рисунок 3.12 б) показал, что вблизи оси перпендикулярной поверхности электрода она будет стягивать плазменный поток в пинч.

Таблица 3.1 – Характеристики материала и параметры установки

Характеристика	Значение
плотность алюминия и воздуха	2700 кг/м ³
плотность воздуха	1,3 кг/м ³
удельная проводимость плазмы	3,3 · 10 ⁷ См/м;
толщина фольги	10 мкм
масса фольги	4 · 10 ⁻⁵ кг
характерная скорость сгустка плазмы	1 км/с
характерная длина сгустка плазмы	50 мм
размеры электродов	$a = 5$ мм, $b = 25$ мм; $S = 2 \cdot 10^{-3}$ м ²
сопротивление батареи	10 ⁻⁷ Ом
индуктивность батареи	0,84 · 10 ⁻⁷ Гн
ёмкость батареи	3 мФ
амплитудное значение тока	10 ⁵ А
время полупериода	5 · 10 ⁻⁵ с

На рисунке 3.13 представлены линии тока плазмы и поле скоростей. Действительно в центральной части электрода наблюдается струя, которая по мере удаления от его поверхности распадается, что подтверждается результатами высокоскоростной киносъемки. В области вне электродов (зона III) течение плазмы приобретает вихревой характер. Похожая картина наблюдается в устройстве типа плазменный фокус [189] и устройствах с плазменными устойчивыми шнурами [190, 191].

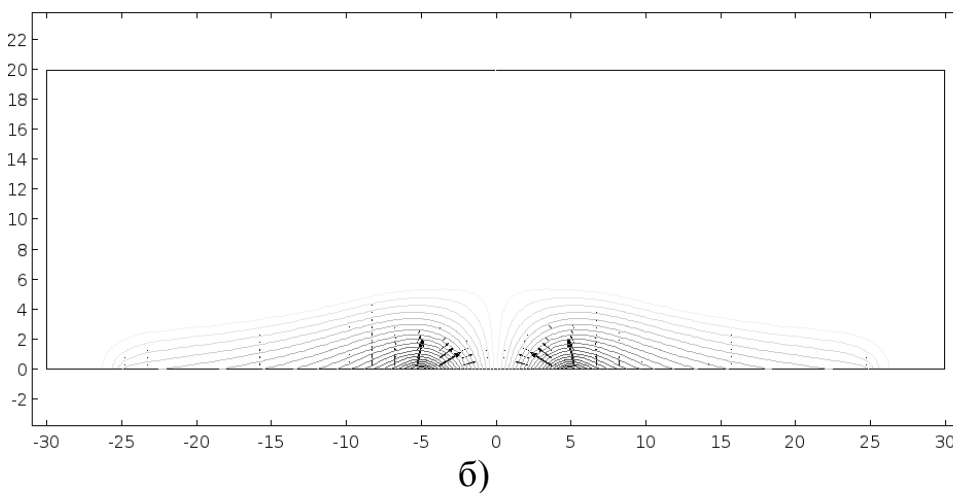
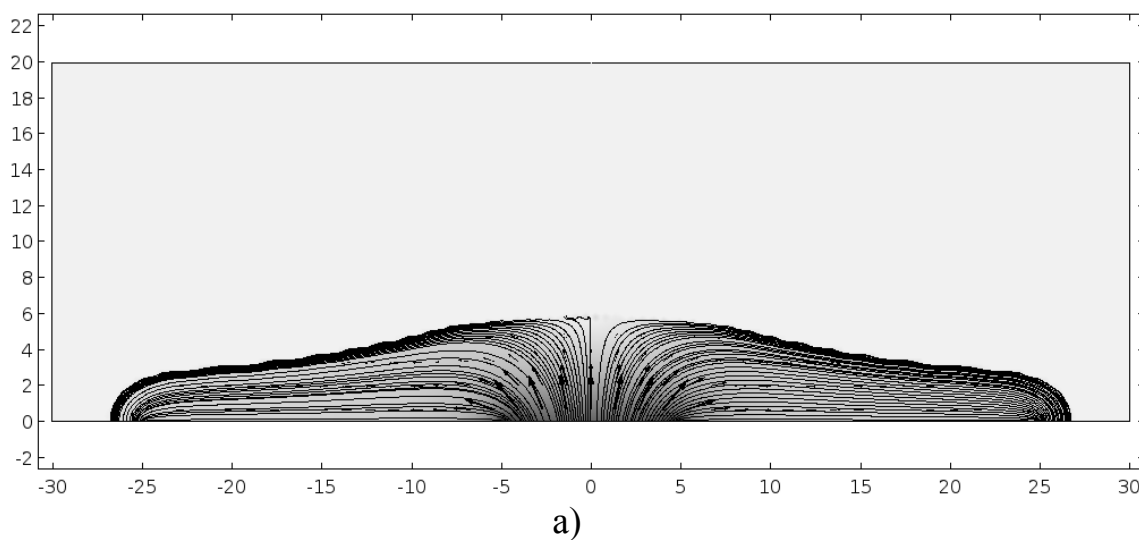


Рисунок 3.12 – Распределение электрического тока (а), поле силы Лоренца (б)

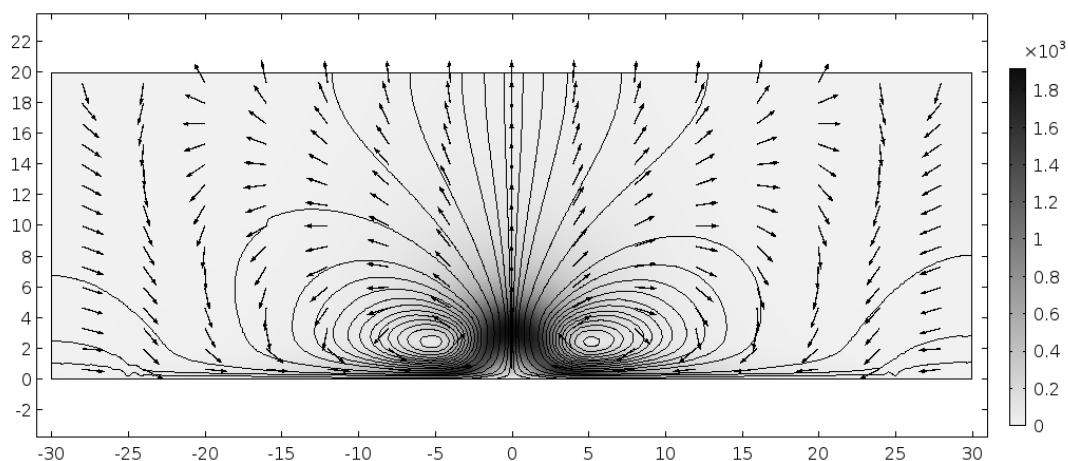


Рисунок 3.13 – Линии тока плазмы и векторное поле скоростей

Выводы по главе

1. С помощью метода скоростной киносъемки установлено, что гетерогенный плазменный поток в торцевом плазменном ускорителе имеет три характерные зоны. В первой зоне течение параллельно оси z ускорителя. Во второй зоне происходит разворот течения на 90° . В третьей зоне линии электрического тока параллельны диэлектрической шайбе.
2. Исследование движения плазменного потока в зоне III с помощью упрощенной модели показало, что она адекватно описывает движение плазменного потока, наблюдавшегося в эксперименте.
3. Методом конечных элементов получены распределения тока плазмы, электрического тока и поле силы Лоренца. Показано, что параллельное течение в зонах I и III неустойчиво. В зоне I формируется плазменный фокус под действием силы Лоренца, а в третьей зоне вихревые структуры, по-видимому, обусловлены неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца.
4. Предложен механизм образования поверхностных периодических структур, который заключается в том, что из-за наличия градиента

температур на границе «плазма / расплав» возникает термокапиллярная неустойчивость.

5. Разработана математическая модель формирования поверхностных периодических структур на основе термокапиллярной неустойчивости. Модель включает в себя уравнения гидродинамики вязкой жидкости, конвективной теплопроводности и условия на границе «плазма/расплав». Получена критическая длина волны, на которую приходится максимум декремента неустойчивости. Ее значения совпадают с размерами поверхностных периодических структур.
6. Предложен механизм и создана гидродинамическая модель формирования наноструктур при обработке гетерогенными плазменными потоками, созданными электрическим взрывом проводников. Модель включает в себя уравнения гидродинамики вязкой и идеальной жидкости, а также кинематические и динамические граничные условия. В основу модели положены представления о возникновении неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на границе «плазма/расплавленный слой»

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЗДАНИЯ ГРАДИЕНТНЫХ СТРУКТУР ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ПУЧКОВОЙ ОБРАБОТКЕ

В настоящее время концентрированные потоки энергии широко используются для обработки поверхности различных материалов. К их числу относятся низкоэнергетические высокоточные электронные пучки микросекундной длительности, воздействие которых может вызывать упрочнение поверхностного слоя, сглаживание рельефа поверхности, формирования микро- и нанокристаллических состояний материалов. К основным преимуществам электронно-лучевой обработки следует отнести: возможность широкого регулирования режимов и тонкого управления тепловыми процессами; пригодность для обработки металлических и неметаллических материалов; высокий коэффициент полезного действия (до 98 %); возможность автоматизации процесса.

Перспективным методом модификации поверхности является метод комбинированной обработки, включающий обработку гетерогенными плазменными потоками, созданными электрическим взрывом проводников и последующее воздействие электронным пучком. Значительные успехи в получении уникальных характеристик модифицированных поверхностей комбинированным методом на лабораторных образцах приводят к необходимости их внедрения в производство изделий, работающих в экстремальных условиях. На этом пути необходимо проводить широкомасштабные исследования, определяющие зависимости эксплуатационных параметров изделий от технологических параметров метода комбинированной обработки. Для сокращения времени таких исследований требуются разработки механизмов и создания математических моделей процессов комбинированной обработки

материалов: передача тепла мишени, генерация волн напряжения, структурно-фазовые превращения в жидком и твердом состоянии, гидродинамические течения в расплавленном слое.

Результаты, полученные в данной главе, опубликованы в [213, 240, 241].

4.1 Математическая модель теплового воздействия электронных пучков

При математическом описании воздействия импульсных потоков энергии на материалы важным является построение модели, учитывающей кинетику фазовых переходов, химических реакций, распространения упругих волн и процессы эволюции ансамблей дислокаций, точечных дефектов. Это требует рассмотрения задач физической химии, механики жидкости и газа и физики твердого тела. Подобного рода задачи в том или ином приближении решались в работах [35, 192–194], при этом параметры импульсных источников изменялись в широком диапазоне: тепловой поток $10^5 - 10^9$ Вт/см², время воздействия $10^{-4} - 10^{-12}$ с. В этом диапазоне происходит нагрев поверхности до температуры кипения и выше, а в объём материала распространяются волны деформаций, температуры, химических реакций.

В настоящем параграфе рассматривается влияние процессов испарения на распространения тепла в умеренном диапазоне тепловых потоков $10^4 - 10^6$ Вт/см² и времени воздействия порядка $10^{-4} - 10^{-3}$ с. Это соответствует низкоэнергетическим сильноточным электронным пучкам (НСЭП) [195]. Удельная энергия при НСЭП составляет $E_S = 10 - 50$ Дж/см². Для оценки толщины испаренного вещества используем формулу $x_i = E_S / H_V$, где H_V – теплота испарения, отнесенная к единице объёма (для титана - 40 кДж/см³), и получим, что $x_i = 2,5 - 50$ мкм. Полученная

оценка позволяет утверждать, что процессы испарения необходимо учитывать, как при моделировании тепловых процессов, так и при анализе полученных поверхностных структур.

Ниже рассмотрен новый механизм теплового воздействия, учитывающий косвенно наличие испаренной прослойки. Расчеты по уравнению теплопроводности производятся только для жидкого и твердого состояния, при этом движением волны испарения в материал пренебрегаем. Новизна заключается в том, что граничные условия задаются следующим образом:

при $x=0$; $0 < t < t_i$ задается постоянный тепловой поток q_0 ;

при $x=0$; $t_i < t < t_R$ задается температура $T(0,t) = T_R(t)$;

при $x=0$; $t > t_R$ тепловой поток обнуляется.

Здесь время t_i соответствует тому моменту, когда энтальпия на поверхности достигла энтальпии испарения; момент времени t_R соответствует времени нахождению испарившегося материала в камере вблизи поверхности обрабатываемого изделия; $T_R(t)$ – необходимо брать из решения газодинамической задачи по разлету пара (ниже считаем её равной температуре испарения).

Далее будем рассматривать одномерный случай нагрева и охлаждения пластины толщиной l . Система координат выбрана так, что ось x направлена вглубь образца (рис 4.1). При $x=0$ задан тепловой поток, а на тыльной стороне пластины отсутствует теплообмен. В координатном виде уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4.1)$$

Где H – энтальпия, являющаяся функцией температуры T , λ – коэффициент теплопроводности. Энтальпия будет иметь вид:

$$H(T) = \int_0^T C(T)\rho(T)dT, \quad C(T)\rho(T) = \begin{cases} C_S\rho_S, T < T_S, \\ L_L\rho_L/\Delta T_1, T_S < T < T_L, \\ C_L\rho_L, T_L < T < T_V \\ L_V\rho_L/\Delta T_2, T > T_V. \end{cases} \quad (4.2)$$

где C – теплоемкость, ρ – плотность. Теплопроводность тела изменяется по следующему закону:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_S, T < T_S, \\ \lambda_S + \frac{\lambda_L - \lambda_S}{\Delta T_1}(T - T_S), T_S < T < T_L, \\ \lambda_L, T_L < T < T_V, \\ \lambda_L + \frac{\lambda_V - \lambda_L}{\Delta T_2}(T - T_V), T > T_V. \end{cases} \quad (4.3)$$

Индексы S , L , V относятся к твердому телу, жидкости и газу соответственно. L_L и L_V – удельная теплота плавления и испарения. Полагаем $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 100$ К. Для решения уравнения (4.1) зададим начальные и граничные условия. Начальное условие определяется постоянной температурой, равной 300 К.

$$T(0, x) = T_0, \quad 0 < x < l. \quad (4.4)$$

Граничное условие при $x=l$ имеет вид:

$$\frac{\partial T(t, l)}{\partial x} = 0, t > 0. \quad (4.5)$$

Для учета эффекта испарения используются смешанные граничные условия при $x = 0$, вначале до момента начала испарения задается тепловой поток

$$\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = -\frac{E_S}{t_0}, 0 < t < t_1. \quad (4.6)$$

Время смены типа граничного условия t_1 определяется из условия равенства энтальпии на поверхности энтальпии испарения при нормальном давлении, то есть из уравнения $H(0, t_1) = H_V$. В течение времени от t_1 до конца действия электронного пучка (t_0) в систему подводится энергия,

которая тратится на испарение и разлет испарённого вещества. В эти моменты времени энтальпия на границе разлета пар-жидкость остается постоянной, равная теплоте испарения H_V . Эта граница сдвигается в область пластины (до 1 мкм), но этим смещением пренебрегаем и считаем, что граничное условие имеет вид:

$$H(0,t) = H_V, t_1 < t < t_0. \quad (4.7)$$

После окончания действия импульса пар контактирует с поверхностью пластины, а так как время разлета пара достигает несколько сотен микросекунд, поэтому температуру поверхности образца приравниваем температуре испарения:

$$T(0,t) = T_V, t_0 < t < t_2. \quad (4.8)$$

После прекращения контакта пара с поверхностью температура поверхности может изменяться в условиях отсутствия теплообмена, потому задается условие отсутствия теплообмена

$$\frac{\partial T(t,0)}{\partial x} = 0, t > t_2 \quad (4.9)$$

Теплофизические значения технически чистого титана [196, 197]: $T_S = 1998$ К; $L_m = 304$ кДж/кг; $T_V = 3560$ К; $L_v = 8900$ кДж/кг; $\rho_S = 4,5 \cdot 10^3$ кг/м³; $\rho_L = 4,1 \cdot 10^3$ кг/м³; $C_S = 318$ Дж/(кг·К); $C_L = 400$ Дж/(кг·К); $\lambda_S = 25$ Вт/(м·К); $\lambda_L = 10$ Вт/(м·К). Численное решение задачи (4.1) – (4.6) проводили при значениях λ_L , изменяющегося в диапазоне от 20 до 40 Вт/(м·К). Выбор коэффициента теплопроводности жидкого титана определялся из условия совпадения расчетного и экспериментального значения глубины проплавления.

Для определения времени t_2 проинтегрируем уравнение (4.1) по x от нуля до l

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T(t,0)}{\partial x}, W(t) = \int_0^l H(t,x) dx \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) будем интегрировать по времени от нуля до t_2

$$W(t_2) - W(0) = -\int_0^{t_1} \lambda \frac{\partial T(t,0)}{\partial x} dt - \int_{t_1}^{t_0} \lambda \frac{\partial T(t,0)}{\partial x} dt - \int_{t_0}^{t_2} \lambda \frac{\partial T(t,0)}{\partial x} dt \quad (4.11)$$

Получим выражения для каждого слагаемого правой части (4.11)

$$\begin{aligned} -\int_0^{t_1} \lambda \frac{\partial T(t,0)}{\partial x} dt &= \frac{E_s t_1}{t_0} \\ -\int_{t_1}^{t_0} \lambda \frac{\partial T(t,0)}{\partial x} dt &= -(T_v - T_2) \int_{t_1}^{t_0} \frac{\lambda_L}{x_L} dt \\ -\int_{t_0}^{t_2} \lambda \frac{\partial T(t,0)}{\partial x} dt &= -(T_1 - T_v) \int_{t_0}^{t_2} \frac{\lambda_L}{x_L} dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь $x_v(t)$ и $x_L(t)$ – зависимости координат фронта испарения и плавления от времени, которые находятся в процессе счета и показаны на рисунке 4.1.

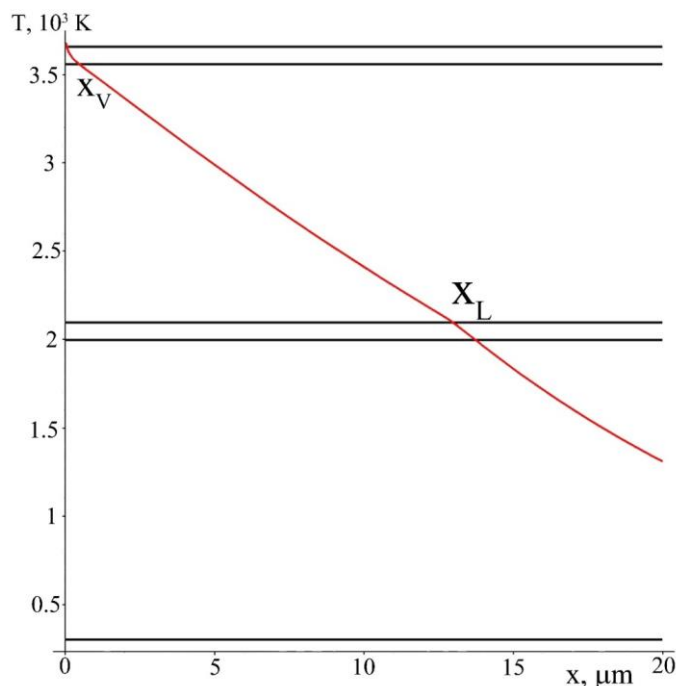


Рисунок 4.1 – Распределение температуры в момент времени 31 мкс при плотности энергии 60 Дж/см^2 и времени импульса 100 мкс

В систему подводится энергия на единицу площади, равная $W(t_2) - W(0) = E_s$, тогда уравнение (4.11) с учетом (4.12) примет вид:

$$E_s \left(1 - \frac{t_1}{t_0}\right) + (T_V - T_2) \int_{t_1}^{t_0} \frac{\lambda_V}{x_V} dt + (T_1 - T_V) \int_{t_0}^{t_2} \frac{\lambda_L}{x_L} dt = 0, \quad (4.13)$$

Из уравнения (4.13) находится t_2 . Расчет температуры проводили с помощью неявной разностной схемы первого порядка по времени и второго порядка по пространству. Промежутки по времени – 1 мкс, по пространству – 0,1 мкм. При этом алгебраическую систему уравнений решали методом прогонки. Толщина пластины l принята равной 600 мкм; она достаточна, чтобы обеспечить сравнение результатов с результатами для пластинки бесконечной толщины за время до 2000 мкс. В таблице 4.1 показаны значения глубины проплавления при различных режимах обработки электронным пучком. Видно, что расчетные и экспериментальные значения практически совпадают. Из данных таблицы 4.1 следует, что зависимость глубины проплавления от поверхностной плотности энергии носит линейный характер.

Таблица 4.1 – Зависимость глубины проплавления от плотности энергии

E_s , Дж/см ²	t_0 , мкс	$h_{\text{плав}}$, мкм	
		экспер.	расчет
18	50	6	7
21	50	8	8
25	50	13	15
45	100	31,1	31,2
50	100	36	35,0
60	100	50,1	50

При значениях плотности энергии в интервале от 10 до 30 Дж/ см² процессы испарения практически не играют роли, так как температура на поверхности не достигает температуры испарения. По окончании действия

импульса температура на поверхности резко снижается, поэтому глубины проплавления очень малы ~ 10 мкм. При значениях $E_s > 30$ Дж/см² температура на поверхности достигает температуры испарения. Паровая прослойка, которая образовалась в ходе этого процесса, как уже говорилось выше, создает тепловой буфер. В результате температура на поверхности остается практически постоянной от момента времени, когда $T = T_v$ до момента окончания действия импульса. Этот промежуток времени будет зависеть от плотности энергии. Чем больше плотность энергии, тем больше времени температура на поверхности остается постоянной. Это приводит к тому, что глубина проплавления увеличивается. Полученная зависимость глубины проплавления от плотности энергии будет служить основанием для выбора оптимальных режимов обработки низкоэнергетическими сильноточными электронными пучками.

4.2 Генерация термоупругих волн при импульсном нагреве

В последние годы традиционно высок интерес исследователей к анализу процессов, сопровождающих воздействие концентрированных потоков энергии (КПЭ) на поверхность материалов [59–61]. Это обусловлено, в первую очередь, реальными прикладными перспективами применения КПЭ для повышения эксплуатационных свойств изделий. И если экспериментальными исследованиями влияния КПЭ на модификацию поверхностных слоёв материалов установлены основные закономерности структурно-фазовых изменений, то теоретические представления поведения материалов при воздействии КПЭ находятся на начальной стадии своего развития ввиду сложности и многообразия протекающих процессов [62–65, 195]. Одной из центральных проблем при моделировании процессов, связанных с КПЭ, является генерация

термоупругих волн. Работа [28] исследовала тепловую ситуацию, включая теплоперенос от внутреннего источника и возникновение упругих волн, и смогла численно продемонстрировать биполярность термоупругой волны. Однако, механизм, связывающий сжатие-растяжение с участками нагрева-охлаждения, остался нераскрытым.

В данной работе, опираясь на аналитическое решение термоупругой задачи для слоя конечной толщины при поверхностном температурном нагреве, мы устанавливаем причины и механизм формирования биполярной термоупругой волны. Кроме того, мы отслеживаем развитие напряженных состояний вблизи обеих поверхностей образца.

Для иллюстрации мы рассмотрим задачу о температурных напряжениях в плоском образце толщиной l_0 , который изначально не имеет внутренних напряжений и подвергается воздействию теплового потока. Тепловой режим будет определяться температурным нагревом поверхности. Ось x направляем перпендикулярно поверхности образца, а две другие оси лежат в плоскости воздействия потока энергии. Тогда, плоскость $x = 0$ будет лицевой поверхностью, а плоскость $x = l_0$ – тыльной. Предположим, что в поперечном сечении поток энергии однороден и выбираем одномерную постановку задачи, т.е. все функции зависят от одной пространственной переменной x , при этом $0 \leq x \leq l_0$. Будем рассматривать одноосное напряженно-деформируемое состояние, при котором ненулевыми являются компоненты тензоров деформаций $\varepsilon_x(x, t)$. Для постановки математической задачи применяем уравнения движения и теплопроводности, а также соотношения Дюгамеля – Неймана, динамическую задачу несвязанной термоупругости [198]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \quad \frac{1}{\chi} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \sigma_x = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma T \quad (4.14)$$

Возьмем- $c = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho}$ – скорость распространения продольных волн, ρ, χ – плотность и температуропроводность материала, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$ – коэффициент термоупругой связи, α_t – коэффициент линейного расширения, $u = u(t, x)$ – компонента вектора перемещений, λ, μ – коэффициенты Ламе, $T = T(t, x)$ – распределение температуры.

При действии потока энергии тепловая ситуация со стороны лицевой поверхности может задаваться в виде температурного нагрева

$$T(t, 0) = \Psi_0(t) \quad (4.15)$$

Будем задавать $\Psi_0(t)$ в виде трапеции. В этом случае температура поверхности растет за время t_1 от нуля до T_0 , в течение времени t_2 поддерживается постоянной, а затем понижается от T_0 до нуля за время t_3 . Правую часть (4.15) задаем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_0(t) = & \frac{t}{t_1} (H(t) - H(t - t_1)) + (H(t - t_1) - H(t - t_1 - t_2)) - \\ & - \frac{t - t_1 - t_2}{t_3} (H(t - t_1 - t_2) - H(t - t_1 - t_2 - t_3)), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$H(z)$ – функция Хевисайда. Формула (4.15) с учетом (4.16) обобщает начальные условия, при которых решены следующие задачи при $l_0 \rightarrow \infty$: задача Даниловской – мгновенный скачок температуры ($t_1 = 0, t_2 \rightarrow \infty, t_3 = 0$), задача с конечным временем повышения температуры до определенного значения (t_1 – конечно, $t_2 \rightarrow \infty$) и случай подъема и спада температуры за одно и то же время ($t_1 = t_3, t_2 = 0$) [197]. Пренебрегаем давлением от потока энергии и считаем, что отсутствует закрепление образца в области действия потока. Тогда граничные условия для напряжения нулевые:

$$\sigma_x(t, 0) = \sigma_x(t, l_0) = 0 \quad (4.17)$$

Начальные условия задачи:

$$\sigma_x(0, x) = 0, \quad T(0, x) = T_2, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial t}(0, x) = 0 \quad (4.18)$$

Поставленная задача имеет два характерных пространственных масштаба: динамический, равный толщине образца $l_0 \sim 1$ мм, и тепловой – $l_T \sim 10$ мкм. Поэтому уравнение динамики рассматриваем на отрезке от нуля до l_0 , а уравнение теплопроводности – на полубесконечной прямой с нулевой температурой на бесконечности.

В безразмерных переменных математическая задача (4.14) – (4.18) приводится к виду

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + \dot{\theta} &= \sigma'', \quad 0 < \xi < 1, \tau > 0; \quad \alpha \dot{\theta} = \theta'', \quad \xi > 0, \tau > 0; \\ \theta(\tau, 0) &= \Psi_0(\tau), \quad \theta(\tau, \infty) = 0; \\ \sigma(\tau, 0) &= \sigma(\tau, 1) = 0; \quad \sigma(0, \xi) = \sigma(0, \xi) = \dot{\sigma}(0, \xi) = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Безразмерные переменные задаются по формулам

$$\xi = \frac{x}{l_0}, \quad \tau = \frac{tc}{l_0}, \quad \sigma = \frac{\sigma_x}{\gamma T_0}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad \alpha = \frac{l_0 c}{\chi}, \quad \tau_1 = \frac{t_1 c}{l_0}, \quad \tau_2 = \frac{t_2 c}{l_0}, \quad \tau_3 = \frac{t_3 c}{l_0}. \quad (4.20)$$

Для решения задачи (4.19) используем преобразование Лапласа. Тогда для изображений получаем систему дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_L''(p, \xi) - p^2 \sigma_L(p, \xi) &= p^2 \theta_L(p, \xi), \quad \sigma_L(p, 0) = \sigma_L(p, 1) = 0, \\ \theta_L''(p, \xi) - b^2 \theta_L(p, \xi) &= 0, \quad \theta_L(p, 0) = \Psi(p), \quad \theta_L(p, \infty) = 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $b^2 = \alpha p$ и $\Psi(p)$ – преобразование Лапласа функции $\Psi_0(\tau)$, заданной по формуле (4.16). Решение задачи (4.21) запишем в виде

$$\begin{aligned} \theta_L(p, \xi) &= \frac{\Psi(p)}{b} \exp(-b \xi), \\ \sigma_L(p, \xi) &= \frac{p \Psi(p)}{(p - \alpha)} \left(W(\xi) - W(1) \frac{\sinh(p \xi)}{\sinh(p)} \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\Psi(p) = \frac{1}{p^2} \left(\frac{1 - \exp(-p\tau_1)}{\tau_1} - \exp(-p(\tau_1 + \tau_2)) \frac{1 - \exp(-p\tau_3)}{\tau_3} \right), \quad (4.23)$$

$$W(\xi) = \exp(-p\xi) - \exp(-b\xi).$$

Первое слагаемое во втором уравнении (4.22) отражает напряжение, порожденное тепловым воздействием. Второе же слагаемое представляет собой результат сложения прямой волны с волнами, отраженными от лицевой и тыльной поверхностей:

$$\sigma_L(p, \xi) = \sigma_{L\infty}(p, \xi) + \sigma_{L\leftarrow}(p, \xi) + \sigma_{L\rightarrow}(p, \xi). \quad (4.24)$$

Применяя формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{L\infty}(p, \xi) &= \frac{p\Psi(p)W(\xi)}{(p-\alpha)}, \\ \sigma_{L\leftarrow}(p, \xi) &= -\frac{p\Psi(p)W(1)}{(p-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-p(1-\xi+2n)), \\ \sigma_{L\rightarrow}(p, \xi) &= \frac{p\Psi(p)W(1)}{(p-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-p(1+\xi+2n)). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Второе слагаемое в (4.24) отображает волны, идущие от тыльной границе к лицевой границе (обратные волны), а прямые волны описывает третье слагаемое в (4.24). Найдем оригиналы напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{L\infty} &= \frac{(\exp(-p\xi) - \exp(-\xi\sqrt{\alpha p})) - (\exp(-p(\xi + \tau_1)) - \exp(-\xi\sqrt{\alpha p} - p\tau_1))}{\tau_1 p (p - \alpha)} + \\ &+ \frac{(\exp(-p(\xi + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - \exp(-\xi\sqrt{\alpha p} - p(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)))}{\tau_3 p (p - \alpha)} - \\ &- \frac{(\exp(-p(\xi + \tau_1 + \tau_2)) - \exp(-\xi\sqrt{\alpha p} - p(\tau_1 + \tau_2)))}{\tau_3 p (p - \alpha)} \rightarrow \\ &\rightarrow \sigma_{\infty}(\tau, \xi) = \frac{F(\tau, \xi) - H(\tau - \tau_1)F(\tau - \tau_1, \xi)}{\alpha\tau_1} + \\ &+ \frac{H(\tau - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)F(\tau - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3, \xi) - H(\tau - \tau_1 - \tau_2)F(\tau - \tau_1 - \tau_2, \xi)}{\alpha\tau_3}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
F(\tau, \xi) &= H(\tau - \xi)(\exp(\alpha(\tau - \xi)) - 1) + \operatorname{Erfc}\left(\frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau}}\right) - \\
&- \frac{1}{2}\left(\exp \alpha(\tau + \xi) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\alpha\tau}\right) + \exp \alpha(\tau - \xi) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\alpha\tau}\right)\right), \quad (4.27) \\
\operatorname{Erfc}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \exp(-y^2) dy.
\end{aligned}$$

Сопоставление формул (4.26) и (4.27) с выражениями, полученными для полубесконечного слоя, показывает их соответствие. Формула (4.27) демонстрирует полное совпадение с аналогичной формулой из работы [30]. Применение теоремы об умножении оригиналов позволит нам определить изображения для прямой и обратной волн:

$$\begin{aligned}
\sigma_{n \rightarrow}(\tau, \xi) &= \frac{\Phi(\tau - \xi - (2n + 1)) - \Phi(\tau - \xi - (2n + 1 + \tau_1))}{\alpha\tau_1} + \\
&+ \frac{\Phi(\tau - \xi - (2n + 1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - \Phi(\tau - \xi - (2n + 1 + \tau_1 + \tau_2))}{\alpha\tau_3}, \quad (4.28) \\
\sigma_{n \leftarrow}(\tau, \xi) &= \frac{\Phi(\tau + \xi - (2n + 1)) - \Phi(\tau + \xi - (2n + 1 + \tau_1))}{\alpha\tau_1} + \\
&+ \frac{\Phi(\tau + \xi - (2n + 1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - \Phi(\tau + \xi - (2n + 1 + \tau_1 + \tau_2))}{\alpha\tau_3}.
\end{aligned}$$

Здесь используется обозначение

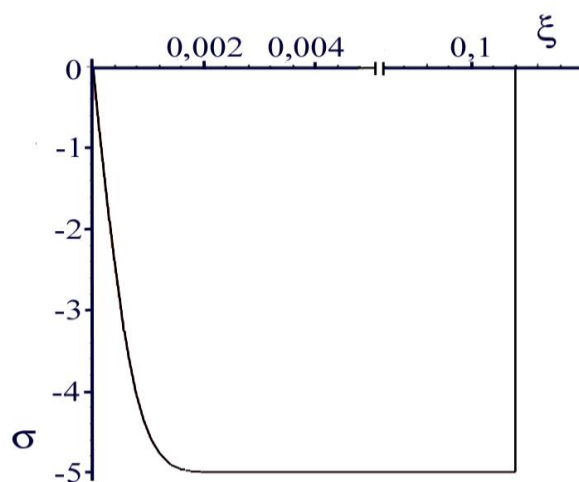
$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= H(z - 1)(\exp(\alpha(z - 1)) - 1) + \operatorname{Erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{z}}\right) - \\
&- \frac{1}{2}\left(\exp \alpha(z + 1) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha}(2z + 1)}{2\sqrt{z}}\right) + \exp \alpha(z - 1) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha}(1 - 2z)}{2\sqrt{z}}\right)\right). \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Полученные оригиналы зависят от четырёх безразмерных параметров $\alpha, \tau_1, \tau_2, \tau_3$. Произведем расчеты для двух условий. Применяем параметры эксперимента, приведенные в [28]: длительность импульса $t_0 = 40$ нс, плотность энергии $E_S = 48$ Дж/см², толщина образца $l_0 = 0,615$ мм. В экспериментах участвовали образцы из стали, термомеханические постоянные которых возьмем равными $\chi = 6,4 \cdot 10^{-6}$ м²/с и $c = 6 \cdot 10^3$ м/с.

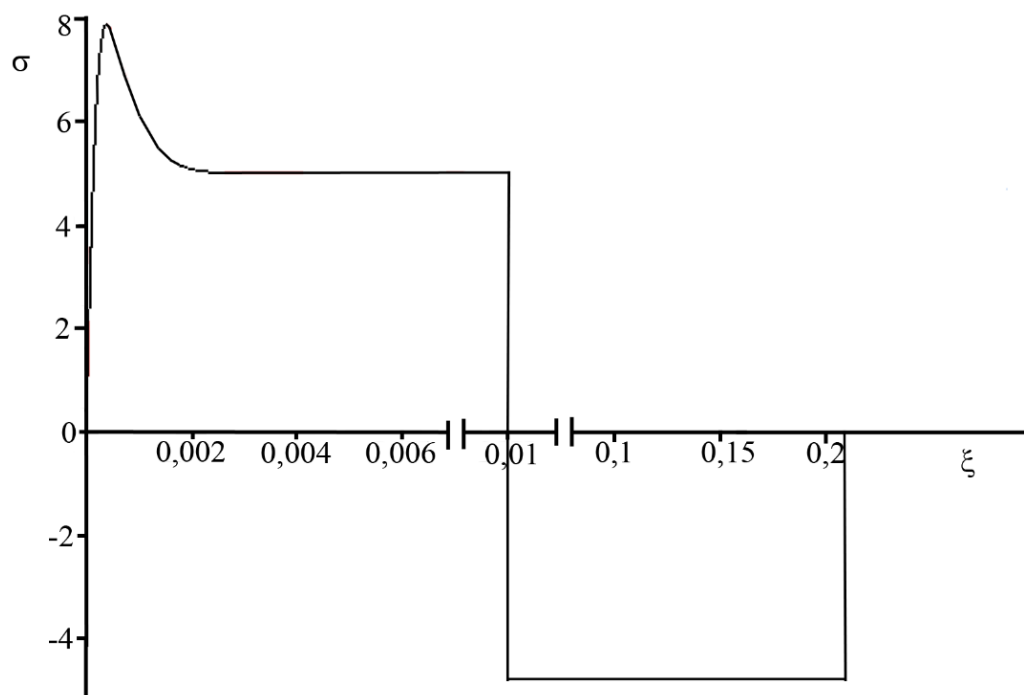
Значения безразмерных величин, соответствующие первой и второй толщине: $\alpha = 6 \cdot 10^5$, $\tau_0 = 0,4$. Профиль начальной температуры выбираем в виде равнобедренного треугольника, тогда $\tau_1 = \tau_3 = \tau_0/2$, $\tau_2 = 0$.

Представленные на рисунках 4.2 – 4.4 графики показывают, как распределяются напряжения внутри образца в различные моменты времени после начала нагрева. Все величины приведены к безразмерному виду, что позволяет обобщить результаты. Безразмерный параметр показывает, насколько велика длина генерируемой термоупругой волны по сравнению с размером образца. Время нагрева, обозначенное как τ , также определяет длительность фазы сжатия в волне (рисунок 4.2, а). Вблизи поверхности образца (на расстоянии до 1,2 мкм, что соответствует $\xi = 0,002$) напряжения быстро увеличиваются, а затем достигают постоянного уровня. На ранних этапах ($\tau = 0,11$) волна сжатия еще не сформировалась полностью (рисунок 4.2а) и продолжает распространяться вглубь материала до момента времени $\tau = 0,2$.

В моменты времени $\tau > 0,2$, а именно, при $\tau = 0,21$ (рисунок 4.2, б), начинается охлаждение, и напряжения становятся растягивающими с пиком на глубине при $\xi \approx 0,0005$ (0,3 мкм) (рисунок 4.2, б) и с распространяющейся полкой.



а)

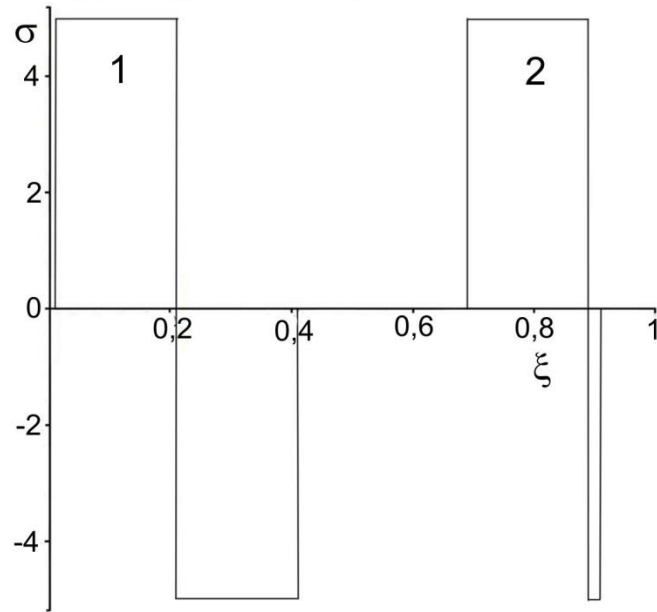


б)

а) 0,11; б) 0,21

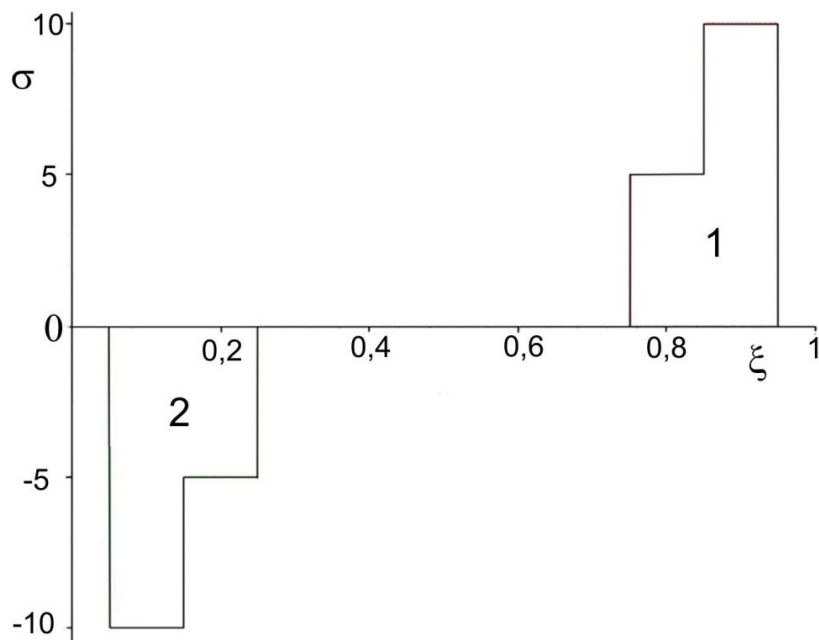
Рисунок 4.2. –Зависимость напряжения от координаты

К завершению температурного нагрева, при $\tau = 0,4$, термоупругая волна полностью сформировалась. Как видно из рисунка 4.3 (кривая 1), показывающего зависимость напряжения от координаты в момент $\tau = 0,41$, волна имеет биполярный характер. Это означает, что участки сжатия и растяжения расположены симметрично. Если же температурный нагрев будет несимметричным, то и распределение зон сжатия и растяжения станет несимметричным. При достижении тыльной поверхности волна отражается. В результате отражения, участок сжатия в падающей волне компенсируется отраженной волной растяжения. Это приводит к тому, что в зоне, расположенной менее чем в 0,2 (120 мкм) от тыльной поверхности, напряжение остается нулевым вплоть до момента времени $\tau = 1,2$ (рисунок 4.4, кривая 2).



1 – 0,41, 2 – 1,09

Рисунок 4.3 – Зависимость напряжения от пространственной координаты



1 – 1.15, 2 – 2.15

Рисунок 4.4 – Зависимость напряжения от пространственной координаты
для моментов времени

Начиная с момента времени $t = 1.1$, происходит суперпозиция отраженной волны растяжения с областью растяжения в падающей волне. В результате амплитуда напряжения удваивается (рисунок 4.4, кривая 1), что является причиной возникновения откола. Для точного определения местоположения откола необходимо учитывать временную зависимость прочности материала, что требует применения соответствующих моделей. Таким образом, определение координаты откола представляет собой отдельную сложную задачу. К моменту времени $\tau = 1,4$ волна претерпевает полное отражение и распространяется в направлении лицевой поверхности. Отражение от лицевой поверхности приводит к формированию максимальных напряжений сжатия в узкой области (до 120 мкм) (рисунок 4.4, кривая 2). Эти напряжения сжатия вызывают упрочнение материала, которое проявляется в виде локального максимума микротвердости.

В экспериментах, приведенных в [65], пик микротвердости возникает на глубине около 100 мкм от лицевой поверхности для тонких пластин. Сходство между теоретическими расчетами и экспериментальными наблюдениями служит доказательством корректности выбранной модели. Исследование несвязанной термоупругой задачи, основанное на параболическом уравнении теплопроводности и заданном треугольном распределении температуры на поверхности, позволило установить, что биполярность термоупругой волны обусловлена сменой процессов нагрева и охлаждения. Были идентифицированы участки с удвоенным расширением на тыльной границе и удвоенным сжатием на лицевой поверхности.

4.3 Диффузионная модель растворения углерода в жидком титане

Рассмотрим в качестве примера растворение тугоплавкого элемента в жидком титане на примере углерода. В настоящей работе предлагается математическая модель и метод решения задачи о распределении углерода в карбиде титана и в жидком растворе титана с углеродом с учетом диаграммы состояний и изменения температуры за счет фазовых переходов и теплообмена с окружающей средой в процессе обработки электронным пучком. Главной особенностью этой модели является учет зависимости температуры среды, окружающей ячейку, от времени. Эта задача может быть сведена к неавтономному сингулярному дифференциальному уравнению второго порядка, качественный аналитический анализ которого затруднителен [41, 46, 200]. Поэтому выбран численный метод исследования некоторых конкретных режимов с определенными параметрами.

В представленной модели рассматривается ячейка, содержащую частицу углерода частицу углерода размером r_0 и помещенную в жидкий титан, занимающий определенный объем с характерным размером R_0 . На границе раздела С - Ti происходит химическая реакция с образованием карбида титана с выделением теплоты. В сторону углерода начинает распространяться волна образования карбида титана с координатой $r_1(t)$. Углерод, диффундирующий через прослойку TiC, вступает в реакцию с титаном с образованием карбида и тем самым обеспечивается движение фронта $r_2(t)$. Также углерод растворяется в жидком титане. Таким образом, получается трехслойная структура в ячейке: твердый углерод – $0 < r < r_1$, карбид титана – $r_1 < r < r_2$, раствор углерода в жидком титане – $r_2 < r < R_0$. Математическая модель диффузионной задачи, предполагающая постоянство температуры, состоит из уравнений,

описывающих диффузию, и спецификаций начальных и граничных условий. Уделим внимание случаю $T_e < T < T_m$, здесь T_e, T_m – температуры эвтектики титан – карбид титана и карбид титана – графит.

Уравнения диффузии (шар – $n = 2$, цилиндр – $n = 1$, плоская пластина – $n = 0$) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_V(r,t)}{\partial t} &= \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_1 r^n \frac{\partial c_V(r,t)}{\partial r} \right), \quad r_1(t) < r < r_2(t) \\ \frac{\partial c_V(r,t)}{\partial t} &= \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_2 r^n \frac{\partial c_V(r,t)}{\partial r} \right), \quad r_2(t) < r < R_0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Граничные условия на концах интервалов

$$\begin{aligned} c_V(r_1(t) + 0, t) &= c_{V1}, \quad c_V(r_2(t) - 0, t) = c_{V2}, \\ c_V(r_2(t) + 0, t) &= c_{V3}, \quad \left. \frac{\partial c_V(r,t)}{\partial r} \right|_{R_0} = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Условия для определения координат границ

$$\begin{aligned} (1 - c_{V1}) \frac{dr_1}{dt} &= D_1 \left. \frac{\partial c_V(r,t)}{\partial r} \right|_{r_1+0}, \quad r_1(0) = r_0 \\ (c_{V2} - c_{V3}) \frac{dr_2}{dt} &= -D_1 \left. \frac{\partial c_V(r,t)}{\partial r} \right|_{r_2-0} + D_2 \left. \frac{\partial c_V(r,t)}{\partial r} \right|_{r_2+0}, \\ r_2(0) &= r_0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

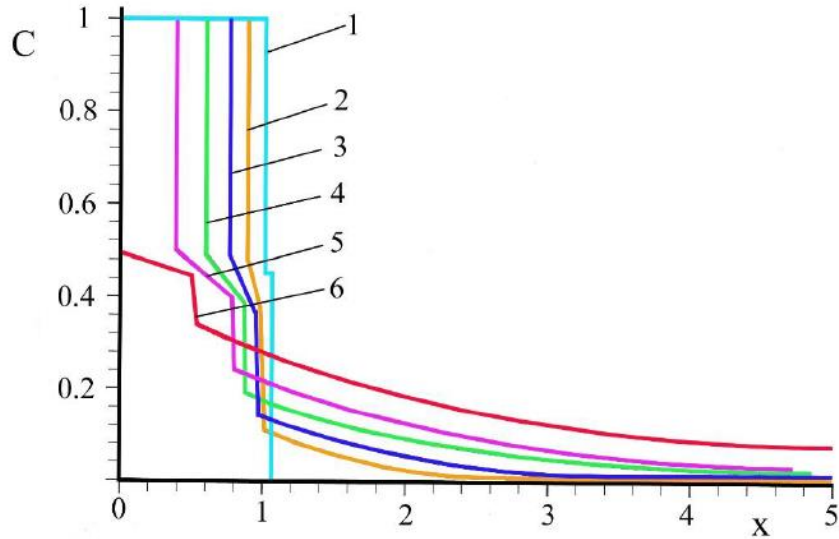
Начальные условия

$$c_V(r,0) = \begin{cases} 1, & 0 < r < r_0, \\ 0, & r_0 < r < R_0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Здесь $c_V = V_C / (V_C + V_{Ti})$ – объемная доля углерода в фазах, зависящая от пространственной координаты r и времени t , V_J – объемы соответствующих чистых компонентов ($J = C, Ti$). На рисунке 4.5 график атомной доли $c = N_C / (N_C + N_{Ti})$ от координаты.

Использование атомной доли удобно для определения химической формулы фаз. Но уравнения диффузии выписываются именно для объемных долей или пропорциональных им массовых, мольных или

атомных концентраций. Переходы от атомной доли к объемной и обратно описываются формулами



1) 0; 2) 1,2; 3) 2,5; 4) 3,8; 5) 5,0; 6) 6,136 (мкс)

Рисунок 4.5 – Распределение атомной доли углерода по координате $x=r/r_0$.

(без охлаждения - начальная температура 2626 К, $r_0=10$ нм)

$$c_V = \frac{1}{\left(\frac{1}{c} - 1\right) \frac{\rho_C \mu_{Ti}}{\rho_{Ti} \mu_C} + 1}, \quad c = \frac{1}{\left(\frac{1}{c_V} - 1\right) \frac{\rho_{Ti} \mu_C}{\rho_C \mu_{Ti}} + 1}. \quad (4.34)$$

Для определения температуры в ячейке воспользуемся уравнением теплового баланса

$$C_0 v_0 \frac{dT}{dt} = Q_1 \frac{dv_1}{dt} + Q_2 \frac{dv_2}{dt} - a(T - T_a(t)),$$

$$v_1(t) = \int_{r_1}^{r_2} c_V(r,t) r^n dr, \quad v_2(t) = \int_{r_2}^{R_0} c_V(r,t) r^n dr \quad (4.35)$$

$$v_0 = \frac{1}{n+1} R_0^{n+1} \left(c_{V0} + \frac{\rho_{Ti} \mu_C}{\mu_{Ti} \rho_C} (1 - c_{V0}) \right)$$

Здесь ($i = 1, 2$), C_0 – средняя молярная теплоемкость ячейки, v_1, v_2, v_0 – величины, пропорциональные числам молей углерода в карбиде титана и в растворе и общему числу молей в начальный момент времени c

одинаковым коэффициентом пропорциональности. Q_i – молярная теплота соответственно образования карбида титана и растворения углерода в жидком титане; и c_V – объемная концентрация углерода в карбиде титана или в растворе, $c_{V0} = (r_0/R_0)^{n+1}$ – начальная объемная концентрация углерода в системе, ρ_J и μ_J – плотность и молярная масса компонента J ($J = \text{C}, \text{Ti}$), a – коэффициент теплообмена, T – температура ячейки, T_a – температура окружающей среды. Зависимость температуры окружающей среды от времени будем считать заданной.

Поставленная математическая задача (4.30 – 4.36) решается численно методом скалярной прогонки. Время представим дискретно в моменты $t_n = k\tau$, τ – временной интервал дискретизации, k – номер шага. Предположим, что значения величин c_V^k, r_1^k, r_2^k, T^k известны на k -м временном шаге, найдем величины на $k + 1$ -м шаге.

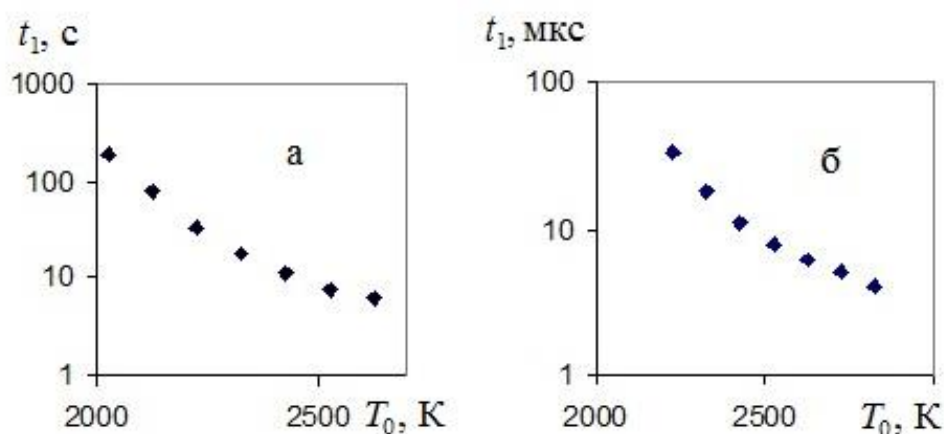
Расчеты были проделаны для одномерного случая ($n=0$, плоская пластинка), полутолщина расчетной ячейки R_0 , начальная полутолщина графитового включения r_0 . Параметры расчетов: $D_{10}=45,4 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $E_1=447,5 \cdot 10^3$ Дж/моль, $D_{20}=38,5 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $E_2=22,4 \cdot 10^3$ Дж/моль, $c_{2e} = 0,31$, $T_e = 1926$ К, $T_m = 3346$ К, $Q_1=231,7$ кДж/моль, $\delta=0,1$ [201].

Температура окружающей среды падала по линейному закону $T_a = T_{00} - \beta t$. Здесь β – скорость охлаждения. Параметры T_{00} , α и β варьировались. Начальная температура либо выбиралась равной T_{00} . Такой подход позволял проанализировать, растворится ли углерод в титане, и время его растворения, в зависимости от начальной температуры и скорости охлаждения.

На рисунках 4.5 и 4.6 приведены результаты расчетов при нулевой скорости охлаждения без теплообмена. Значения r_0 были приняты равными либо 10 мкм, либо 10 нм. Это было сделано для сравнения времени

растворения углерода при разных масштабах ячеек. Толщина прослойки карбида титана сначала увеличивается, а затем начинает уменьшаться (рис. 4.5). Время растворения заметно уменьшается с ростом начальной температуры (рис. 4.6 а и б). При этом уменьшение начальной толщины графитовой прослойки от 10 мкм до 10 нм приводит к уменьшению времени растворения в 10^6 раз. Время растворения графита становится порядка 1 мкс, что соответствует экспериментам по электронно-пучковой обработке поверхности после электровзрывного легирования [30].

Следовательно, представленная модель и расчеты по ней позволили показать, что частицы углерода микрометрового диапазона растворяются за время порядка 10 секунд. Это время много больше времени воздействия на материал концентрированным потоком энергии. При размерах частиц порядка нанометра время растворения становится равным 10 мкс по порядку величины. В этом случае частица углерода успевает раствориться за время воздействия при ЭПО. Это позволяет утверждать, что в процессе комбинированной обработки следует использовать именно углеграфитовые волокна, диаметр микрофибрил в которых порядка десятков нанометров.



а) $r_0=10$ мкм; б) $r_0=10$ нм

Рисунок 4.6 – Зависимость времени растворения графита от начальной температуры ячейки (без охлаждения)

Выводы по главе

1. В работе представлена инновационная тепловая модель для анализа взаимодействия низкоэнергетических, но сильноточных электронных пучков с металлами. Модель включает в себя учет фазовых превращений и демонстрирует линейную связь между глубиной проплавления и плотностью энергии электронного пучка.
2. Решена несвязанная термоупругая задача с начальным профилем температуры в виде треугольника. Установлено, что возникающая термоупругая волна имеет биполярный характер, который обусловлен сменой режимов нагрева и охлаждения. У тыльной границы были обнаружены участки с удвоенным расширением, а у лицевой – с удвоенным сжатием.
3. Создана модель растворения тугоплавких элементов в жидком металле на примере системы «титан-углерод» при электронно-пучковой обработке. Определено время растворения частицы углерода в зависимости от начальной температуры и размера частиц. Показано, что частицы нанометрового диапазона растворяются быстрее, чем те же частицы микрометрового диапазона. Это позволяет рекомендовать к использованию в процессах комбинированной обработки (гетерогенные плазменные потоки и последующая электронно-пучковая обработка) частицы углерода нанометрового диапазона.
4. Построена модель образования поверхностных наноструктур при электронно-пучковой обработке. Показано, что возникающий, вследствие градиента температур, максимум декремента термокапиллярной неустойчивости приходится на нанометровый диапазон длин волн. Возмущения с такой длиной волны будут наиболее неустойчивыми, и поэтому будут генерировать наноразмерные частицы. Численное решение уравнений модели с учетом кривизны поверхности

показало, что в момент окончания действия импульса в расплавленном слое материала начинает формироваться многовихревая структура. Размер ванны расплава увеличивается как в горизонтальном, так и вертикальном направлениях, что способствует миграции частиц на расстояния, превышающие глубину проникновения по механизму диффузии.

ГЛАВА 5. МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРНО-ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЙ СТАЛЕЙ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ

Термическое упрочнение арматурного проката в потоке непрерывных станов в свое время явилось одним из наиболее прогрессивных технологических процессов, обеспечивающих существенное повышение комплекса механических и эксплуатационных свойств проката, изготавливаемого из низколегированных сталей. Исследования, проведенные физиками и металловедами под руководством К.Ф. Стародубова убедительно доказали возможность закалки на мартенсит низкоуглеродных сталей при больших скоростях охлаждения. Попытки реализовать большие скорости охлаждения в промышленных условиях предпринимались многими, но заканчивались безрезультатно. Были предложены разнообразные охлаждающие устройства, однако они не обеспечивали требуемой скорости охлаждения проката, приводило к его искривлению и изгибу. При скоростях движения 20 м/с прокат неизбежно застревал, что вызывало аварии и большое количество брака. Причина слабого неравномерного охлаждения водой от температуры 1000°С проката, движущегося со скоростью 20 м/с относительно покоящейся воды, состоит в образовании неоднородной по периметру изделия паровой пленки, когда реализуется режим пленочного кипения воды. Режим пленочного кипения сильно снижает теплопередачу. Считалось, что образование паровой пленки при закалке неизбежно и не принимали попыток к её недопущению её образования. Однако, в результате экспериментов, проведенных В.Я. Савенковым, с подачей воды на горячее изделие с разными скоростями было установлено, что, начиная со скорости не менее 12 м/с образование паровой пленки не происходит. В условиях

прокатного стана это соответствует тому, что подачу воды в охлаждающее устройство необходимо осуществлять под давлением не менее 20 атмосфер. Это в несколько раз больше, чем использовалось ранее. В 1965 году впервые в мире на «Криворожстали» на стане 250 успешно прошла испытание установка термического упрочнения проката. С этого момента появился новый четвертый передел в черной металлургии – термическое упрочнение. За рубежом аналогичные технологии начали разрабатываться спустя 10 лет. Савенков В.Я. эмпирически выявил важный параметр и его величину – это относительная скорость воды по отношению к прокату, определяющий высокую скорость охлаждения, прямолинейность и гидротранспортирование проката.

Мы предлагаем новый механизм охлаждения. Когда стационарный перепад температур достигает 1000 градусов, формируется пленка. Но эта пленка не является препятствием для капель, которые образуются вследствие развития неустойчивости на границе раздела фаз пар и вода. Как показано в главе 2 на границе раздела могут развиваться два вида неустойчивости: Кельвина-Гельмгольца и Релея-Тейлора в нано- и микро-размерном диапазоне длин волн. Считается, что длина волны максимальной неустойчивости определяет размер капель, то образуются капли наноразмера, с помощью которых происходит капельное охлаждение и термоудар, генерирующий упругую волну.

Таким образом, механизм теплообмена связан с развитием гидродинамических неустойчивости в системе прокат – паровая пленка – вода. Всё сказанное можно представить следующей последовательностью для одной секции

- для формирования мартенсита в низкоуглеродистых сталях требуются большие скорости охлаждения.

- преодоление кризиса пленочного кипения – большие относительные скорости.
- неустойчивость Кельвина -Гельмгольца в поверхностном слое пар – вода в наноразмерном диапазоне (глава 2).

При односекционном охлаждении возникли проблемы: низкая коррозионная стойкость, водородная хрупкость и пониженный коэффициент ударной вязкости, и это было связано с возникновением продольных трещин. Было установлено, что для их устранения этих дефектов необходимо использовать две и более секций. Это техническое решение было найдено эмпирически (без указания механизма). Однако в условиях жесткой конкуренции время для крупномасштабных промышленных испытаний по методу проб и ошибок никто позволить не может, кроме того, освоение новой номенклатуры упрочненного проката требует создание физических механизмов и соответствующих математических моделей.

Нами предлагается механизм захлопывания трещин, образованных при первом охлаждении, основанный на взаимодействии упругой волны со свободными берегами трещины и их схлопывании. Возникновение упругой волны в прокате обусловлено термоударом нанокапли, которые формируются в процессе развития неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. Задача динамической термоупругости была рассмотрена в главе 4.

Целью настоящей главы является разработка алгоритма и создание программы расчета температурных полей и структурно-фазового состава при ступенчатом охлаждении по режиму прерывистой закалки. Рассматривается математическая модель, позволяющая определить влияние химического состава и режимов охлаждения при прерывистой закалке на структурно-фазовый состав. Проводится теоретический анализ

температурно-временных зависимостей и кинетики структурно-фазовых превращений в сечении проката.

Результаты, полученные в настоящей главе, опубликованы [202 – 206].

5.1 Модель прерывистого теплового воздействия на поверхность

Теоретическое рассмотрение тепловой задачи при прерывистом охлаждении необходимо для понимания происходящих процессов в каждом слое и в зависимости от времени. В этом случае ситуацию нельзя описывать какой-то средней величиной, поэтому Ю.В. Грдина предложил проводить анализ температуры от координаты для различных моментов времени. В этом параграфе найдем управляющие параметры (средние тепловые потоки и время их действия), позволяющие получать температурные поля близкие к эксперименту.

Нагретую до фиксированной температуры T_0 деталь охлаждают в течение времени τ_1 , затем прекращают охлаждение и через некоторое время τ_2 вновь продолжают охлаждение в течение времени τ_3 (рисунок 5.1).

Рассмотрим изменение свойств по глубине, поэтому градиенты температур будем учитывать вдоль одной пространственной координаты. В этом случае уравнением модели будет классическое уравнение теплопроводности. Пренебрегаем изменением теплофизических свойств от температуры и математическая модель включает уравнение теплопроводности, а так же начальные и граничные условия. В силу того, что градиентные структуры составляют 1 – 2 мм, а размеры образца порядка 120 мм, то естественно рассматривать задачу на полубесконечной прямой с граничными условиями второго рода по при $x = 0$, отражающих прерывистый характер охлаждения:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_1 : 0 < t < \tau_1; \frac{\partial T}{\partial x} = 0 : \tau_1 < t < \tau_2; \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_2 : \tau_2 < t < \tau_3; \frac{\partial T}{\partial x} = 0 : t > \tau_3. \end{aligned} \quad (5.1)$$

где q_1 ; q_2 – константы, характеризующие средний тепловой поток в каждом интервале времени.

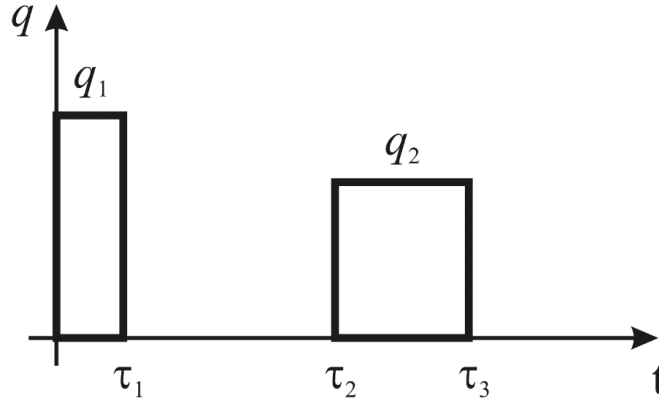


Рисунок 5.1 – Схема зависимости теплового потока от времени при прерывистом охлаждении

Главной задачей является создание алгоритма определения величин: q_1 ; q_2 ; τ_1 ; τ_2 с использованием экспериментальной зависимости температуры от времени в некоторой фиксированной точке детали. Для создания алгоритма обратимся к краевой математической задаче теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < \infty; t > 0 \\ T(0, x) = T_0 \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t); T(\infty, t) = T_0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

здесь a – коэффициент температуропроводности. Решение поставленной задачи (5.2) с тепловым потоком (5.1) в общем виде известно [207]:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{x}{\lambda \sqrt{\pi}} \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{q[\tau(t, \xi_0, \xi)] e^{-\xi^2}}{\xi^2} d\xi, \quad \text{где} \quad (5.3)$$

$$\xi_0 = \frac{x}{2\sqrt{at}}; \quad \tau = t \left(1 - \frac{\xi_0^2}{\xi^2} \right)$$

Считается, что из эксперимента зависимость температуры от времени в конкретной точке x_0 известна $T(x_0, t) = T_0(t)$. Значит, задача по определению параметров $(q_1; q_2; \tau_1; \tau_2)$ относится согласно [208 – 210] к граничным обратным задачам, т.е. к определению тепловых условий на границе. Такие задачи в математическом смысле являются некорректными, т.е. небольшая ошибка в определении $T_0(t)$ может привести к существенному изменению функции $q(t)$. Эту проблему преодолеваем следующим образом. Сужаем класс возможных функций $q(t)$ до класса кусочно постоянных функций. Тогда интеграл в (5.3) может быть вычислен аналитически для каждого временного интервала, а интегральное уравнение сводится к алгебраическому, решение которого может быть осуществлено с любой точностью. Таким образом, мы избавляемся от процедуры регуляризации, используемой в стандартных подходах численного решения обратных теплопроводности.

Для наших целей необходимо получить конкретное аналитическое выражение интеграла. Используем приближение погранслоя [211], где рассматривался только случай при $q_2=0$. Поэтому используем общее решение и выведем аналитические формулы для зависимости температуры от координаты и времени:

Обозначим через $F = T - T_0$, проинтегрируем (3) и определим вид F для различных интервалов времени:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -q_1 \bar{x} I(\xi_0) \text{ при } 0 < t < \tau_1; \\ F_2 &= -q_1 \bar{x} (I(\xi_0) - I(\xi_1)) \text{ при } \tau_1 < t < \tau_2; \\ F_3 &= -q_1 \bar{x} (I(\xi_0) - I(\xi_1)) - q_2 \bar{x} I(\xi_2) \text{ при } \tau_2 < t < \tau_3; \\ F_4 &= -q_1 \bar{x} (I(\xi_0) - I(\xi_1)) - q_2 \bar{x} (I(\xi_2) - I(\xi_3)) \text{ при } t > \tau_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

где $\xi_i = \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \tau_i/t}}, \bar{x} = \frac{x}{\lambda \sqrt{\pi}}, \quad I(\xi) = \xi^{-1} \exp(-\xi^2) + \sqrt{\pi} (\Phi(\xi) - 1),$

$$\Phi(\xi_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp(-u^2) du.$$

Определение τ_1 . Определяем теоретическое выражение для t_0 (момент времени достижения минимальной температуры). Из условия минимума $\frac{dT}{dt}(x_0, t) = 0$ и выражения (5.4) при $\tau_1 < t < \tau_2$ находим уравнение, связывающее x_0, t_0 и τ_1 в виде соотношения:

$$Y(\eta) = \frac{\ln \eta}{\eta - 1}; Y = \frac{x_0^2}{2at_0}, \eta = \frac{t_0}{t_0 - \tau_1} \quad (5.5)$$

Зная из эксперимента x_0, t_0 и a находим Y по второй формуле (5.5), далее обращая зависимость $Y(\eta)$ находим η , а затем $\tau_1 = t_0 / (\eta - 1) / \eta$. Нетрудно показать, что $Y(\eta)$ функция монотонная, и $0 < Y < 1$, это означает, что в указанных пределах для каждого Y существует и единственное η . Таким образом, при $t_0 = 33$ с, $a = 6,1 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $x_0 = 0,01$ м получаем: $Y = 100 / 2 \cdot 6,1 \cdot 33 = 0,248 \rightarrow \eta = 10,54 \rightarrow \tau_1 = 30$ с.

Определение τ_2 и q_1 . Вспомогательную функцию выразим по формуле: $U(x_0, t) = (T_0 - T(x_0, t)) \lambda \pi^{1/2} / x_0 q_1$, для которой из (5.4) получаем:

$$U(x_0, t) = \begin{cases} I(\xi_0) & \text{при } t < \tau_1; \\ I(\xi_0) - I(\xi_1) & \text{при } \tau_1 < t < \tau_2. \end{cases} \quad (5.6)$$

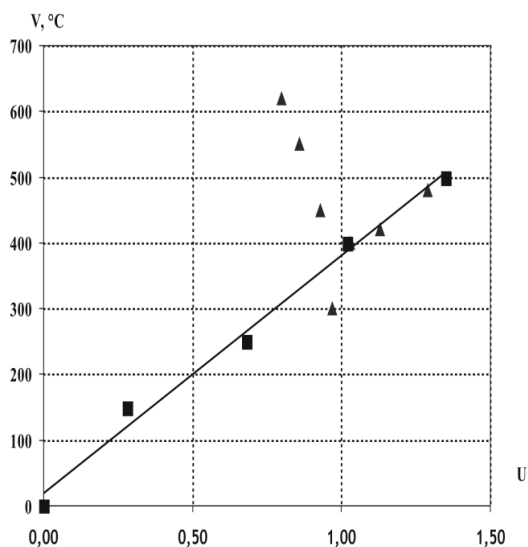
Причем U не зависит от q_1 . Поэтому, зная τ_1 и x_0 можно вычислить ξ_0 , ξ_1 , а затем U для моментов времени $t > 0$ (таблица 5.1). Для тех же моментов времени находим экспериментальное значение «сдвинутой» температуры $V=950-T$. Далее в координатах U и V строим зависимость (рисунок 5.2). Из полученного графика видно, что U и V прямо пропорциональны до момента времени 56 с. Это означает зависимость в форме (5.6) справедлива до момента 56 с, а далее начинается процесс второго охлаждения. Поэтому можно определить значение $\tau_2 = 56$ с и значение теплового потока $q_1 = (T_0 - T_2) \lambda \pi^{1/2} / (x_0 V_2) = 2.66 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$.

Далее по предложенной схеме для величины F_3 вычисляем значение $q_2 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$.

Полученные значения q_1 , q_3 , τ_1 , τ_2 использованы для численного расчета зависимости температуры от времени. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей температуры от времени представлены на рисунок 5.3 и показывают хорошее совпадение. Это означает, что предложенный алгоритм позволяет определить параметры прерывистого теплового потока.

Таблица 5.1 – Зависимости экспериментальной и расчетных температур от времени

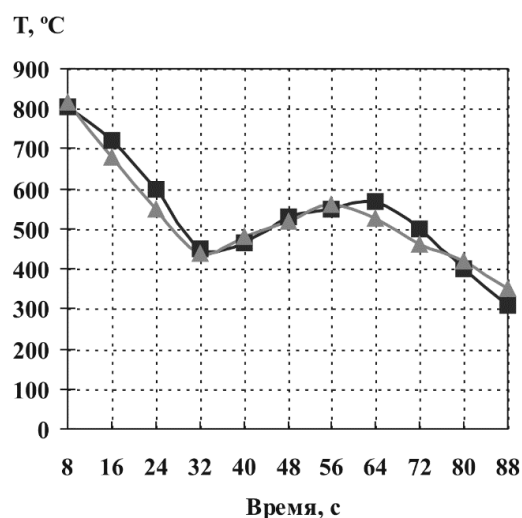
$t, \text{ с}$	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
U	0	0.28	0.68	1.02	1.35	1.29	1.13	1.03	0.97	0.93	0.86	0.80
$V^\circ\text{C}$	0	150	250	400	500	480	420	400	300	450	550	620



■ – охлаждение; ▲ – повторный
нагрев

Рисунок 5.2 – Зависимость V от U

V – сдвинутая температура, U –
вспомогательная функция



▲ – расчет, ■ - эксперимент

Рисунок 5.3. –Сравнение расчетных и
экспериментальных величин
на глубине 10 см:

Таким образом, в предположении кусочно-постоянной зависимости теплового потока от времен и используя экспериментальную зависимость температуры от времени, снятую в одной точке, получены значения параметров теплового потока. Используя полученные значения можно определить поле температур во всех точках образца, и тем самым смоделировать тепловую историю. Используемые экспериментальные данные относились к темплетам рельсовых проб при дифференцированной закалке [212].

5.2 Расчет температурных полей проката в промышленных условиях

Предложенную в предыдущем параграфе идею о задании разрывных граничных условий с целью описания немонотонного профиля температурной зависимости от времени, применим к моделированию

закалки в промышленных условиях. На прокатных станах АО «ЕВРАЗ–ЗСМК» заготовка имеет длину 1 км и движется со скоростью 5 – 20 м/с. Под давлением вода подается в охлаждающие устройства, размеры которого могут изменяться от 4 до 30 м в зависимости от числа включенных секций. Охлаждение проката в подвижной системе координат, движущейся со скоростью проката, происходит по нормали к поверхности проката и можно пренебречь продольным распределением температуры. Поэтому в подвижной системе координат для определения температуры можно использовать одномерное вдоль радиуса арматуры уравнение теплопроводности. При этом реализуется радиально-симметричный отвод тепла от арматуры и с учетом её круглого сечения можно использовать уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат. Постановка математической задачи состоит в нахождении поля температур $T(r, t)$, удовлетворяющее уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5.7)$$

Здесь a – коэффициент температуропроводности. Граничные условия на оси симметрии означают отсутствие теплового потока и задаются без проблем. Наиболее важными и проблемными граничными условиями являются условия на поверхности проката (для арматуры $r=r_a$), определяющие технологический режим охлаждения и отражающие его прерывистый характер. Обычно они представляют собой условия третьего рода или условия теплообмена Ньютона – тепловой поток пропорционален разности температур поверхности проката $T(r_a, t)$ и температуры окружающей среды T_c с известным коэффициентом пропорциональности – коэффициентом теплоотдачи α .

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial r} = 0; \quad -\lambda \frac{\partial T(r_a, t)}{\partial r} = \alpha(t)(T(r_a, t) - T_c), \quad (5.8)$$

Где λ – коэффициент теплопроводности. Коэффициент теплоотдачи и температура окружающей среды задаются в кусочно-постоянном виде:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_{\text{вод}} & 0 < t < \tau_1 \\ \alpha_{\text{возд}} & \tau_1 < t < \tau_2 \\ \alpha_{\text{вод}} & \tau_2 < t < \tau_3 \\ \alpha_{\text{возд}} & \tau_3 < t < \tau_4 \\ \alpha_{\text{вод}} & \tau_4 < t < \tau_5 \\ \alpha_{\text{возд}} & \tau_5 < t \end{cases} \quad T_c(t) = \begin{cases} T_{\text{вод}} & 0 < t < \tau_1 \\ T_{\text{возд}} & \tau_1 < t < \tau_2 \\ T_{\text{вод}} & \tau_2 < t < \tau_3 \\ T_{\text{возд}} & \tau_3 < t < \tau_4 \\ T_{\text{вод}} & \tau_4 < t < \tau_5 \\ T_{\text{возд}} & \tau_5 < t \end{cases} \quad (5.9)$$

Начальное условие для температуры при $t=0$ выбирается однородным по сечению и равным температуре конца прокатки.

Поставленная математическая задача решалась численно по неявной схеме. Стандартный метод численного решения заключается в дискретном разбиении вдоль радиуса на Nr ячеек с шагом h , так что $Nr \cdot h = r_a$. По времени разбиение выбираем с шагом τ , и тогда температура в дискретных точках может быть представлена $T_i^n = T(i \cdot h, n \cdot \tau)$. В этом случае дифференциальное уравнение можно аппроксимировать системой разностных уравнений:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \frac{a r_i}{h^2} \left(r_{i+1/2} (T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - r_{i-1/2} (T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}) \right), \quad (5.10)$$

$$i = 1, \dots, Nr;$$

$$r_i = (i - 3/2) \cdot h, \quad r_{i+1/2} = i \cdot h, \quad r_{i-1/2} = (i - 1) \cdot h.$$

Преобразуем (5.10) к виду:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_{i+1}^{n+1} + C_i T_{i+1}^{n+1} = -T_i^n; \quad i = 1, \dots, Nr; \quad (5.11)$$

$$A_i = \frac{a \tau r_{i+1/2}}{h^2}, \quad B_i = \frac{a \tau}{h^2} \frac{r_{i+1/2} + r_{i-1/2}}{r_i}, \quad C_i = \frac{a \tau r_{i-1/2}}{h^2}.$$

Решение системы (5.11) осуществляется для каждого шага по времени, начиная с $n=0$, когда из начальных условий известна температура T_i^n . Для решения системы уравнений (5.11) необходимо ввести фиктивные ячейки с номерами $i = 0$ и $i = Nr+1$ и доопределить в них температуры согласно граничным условиям:

$$T_0^{n+1} = T_1^{n+1}; \quad T_{Nr+1}^{n+1} = \gamma \cdot T_{Nr}^{n+1} + \delta. \quad (5.12)$$

Где

$$\gamma = \frac{2 - Nu}{2 + Nu}, \quad \delta = Nu \cdot T_c; \quad Nu = \frac{\alpha r_a}{\lambda}.$$

Система (5.11, 5.12) решается методом прогонки.

Необходимое количество шагов по времени определяется из условия сравнения установившейся температуры с экспериментальным значением. По предложенному алгоритму были рассчитаны поля температур различных технологических режимов круглого проката.

5.3 Методика расчета коэффициента теплоотдачи

Проблемой является определение соответствующих граничных условий, адекватно описывающих распределения температур в промышленных условиях. Действительно, в этих условиях возникают сложные термогидродинамические процессы при охлаждении высокотемпературного проката:

- испарение воды на границе прокат – вода;
- собственное движение воды при заданном перепаде давлений;
- индуцированное движущимся прокатом возмущенного движения воды и пара в пограничном слое;
- развитие различного рода неустойчивостей на границе раздела пар – вода.

Эти процессы пока не могут быть описаны с достаточной для практики точностью. Исследование особенностей термогидродинамического течения в пленках с внутренними источниками тепла начали изучаться сравнительно недавно [213]. Задачи, связанные с построением математических моделей при воздействии концентрированных потоков энергии, так же требуют детальной проработки перечисленных процессов, и этому будет посвящена вторая часть настоящей диссертации.

Для тепловой части задачи принципиальным является представление теплового потока на границе в виде ступенчатой функции в процессе прерывистого охлаждения.

Граничные условия, определяющие технологический режим охлаждения и отражающие его прерывистый характер, обычно ставят в виде условий третьего рода с известным выражением для коэффициента теплоотдачи.

Расчет теплофизических параметров теплоотдачи от арматуры к воде произведем следующим образом [214]. Принимаем, что температуры воды $T_{\text{вода}} = 100^{\circ}\text{C}$, воздуха $T_{\text{возд}} = 30^{\circ}\text{C}$ и проката $T_{\text{пр}} = 850^{\circ}\text{C}$. Для движущейся заготовки необходимо отдельно рассмотреть охлаждение на воздухе и в секции. Считаем, что вода нагревается до 100°C градусов в поверхностном слое вблизи поверхности арматуры. Для воды при температуре 100°C используем справочные значения: $\nu = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ – кинематическая вязкость, $\lambda = 0,65 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ – теплопроводность, $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ – теплоемкость, $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ – плотности.

Рассчитаем коэффициент температуропроводности воды $a = \lambda / (\rho \cdot c) = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ и число Прандтля $Pr = \nu / a = 2$. Так как $0,5 < Pr < 5$, то можно воспользоваться формулой Нуссельта для круглой трубы [214]

$$Nu_0 = 0,023 \cdot Pr^{0,4} Re^{0,8}, \quad (5.13)$$

где Re - число Рейнольдса для кольцевого сечения и рассчитывается по формуле $Re = U_0 \cdot (D_2 - D_1) / \nu$. Для рассматриваемого случая диаметров арматуры ($D_1 = 10$ мм) и канала ($D_2 = 20$ мм) и относительной скорости воды ($U_0 = 10-40$ м/с) число Рейнольдса находится в пределах от $1,3 \cdot 10^6$ до $5,2 \cdot 10^6$, тогда для вышеописанных параметров получаем значение числа Нусельта $Nu_0 = 2366 - 7172,5$.

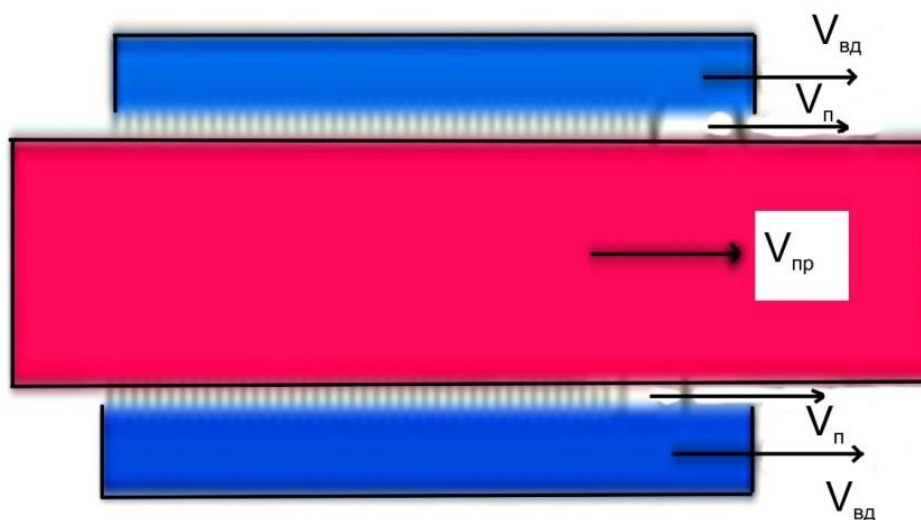
Коэффициент теплоотдачи выражается по формуле $\alpha_0 = Nu_0 \lambda / (D_2 - D_1)$. Поэтому $\alpha_0 = 38447,5 - 116552$. Для кольцевого канала расчетная формула имеет вид [214]: $\alpha_1 = \alpha_0 \cdot (1 - 0,45/2,4 + Pr) \cdot (D_2/D_1)^\chi$, где $\chi = 0,16/Pr^{0,15} \approx 0,15$. Окончательно получаем для коэффициента теплоотдачи воды: $\alpha = (38 - 115) \cdot 10^3$ Вт/(м²·К). Расчет коэффициентов теплоотдачи для воздуха аналогичны и позволяют определить диапазон его изменения: $\alpha = 70 - 120$ Вт/(м²·К). Параметры для стали: $\lambda = 30$ Вт/(м²·К), $c = 680$ Дж/(кг·К), $\rho = 7800$ кг/м³, тогда коэффициент температуропроводности стали $a = 5,7 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Таким образом, определены диапазоны изменения теплофизических параметров для решения прямой задачи теплопроводности. Расчет осредненного коэффициента теплоотдачи при водяном охлаждении и скоростях арматуры до 20 м/с дает диапазон значений $\alpha_1 = 40-120$ кВт/(м²·К). При воздушном охлаждении его значение изменятся $\alpha_2 = 10-100$ Вт/(м²·К). Исходя из указанного диапазона коэффициентов теплоотдачи, была проведена серия численных экспериментов, в которых рассчитывалась установившаяся температура после выхода из установки охлаждения. Результаты расчетов приведены в таблице 5.2. Из эксперимента известно, что значение установившейся температуры составляет 550 °С (соответствует температуре на холодильнике). Эта температура попадает в интервал 535 – 571 °С, а это соответствует диапазону коэффициента теплоотдачи α_1 от 30 до 40 кВт/(м²·К). Более мелкое дробление этого диапазона позволяет найти значение α_1 равное 35250 Вт/(м²·К), с которым проводились дальнейшие вычисления. Кроме того

полученные данные указывают на то, что коэффициента теплоотдачи на воздухе α_2 слабо влияет на значение установившейся температуры.

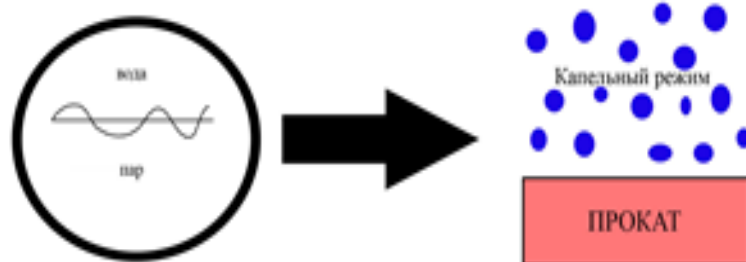
Таблица 5.2 – Значения установившейся температуры для указанного диапазона коэффициентов теплоотдачи

$\alpha_1, \text{кВт}/(\text{м}^2\text{К}) \rightarrow$	90	80	60	40	30
$\alpha_2, \text{Вт}/(\text{м}^2\text{К}) \downarrow$					
100	466	473	494	535	571
50	467	474	496	537	553

Диапазон численных значений коэффициента теплоотдачи в секциях охлаждения (движущаяся вода) $\alpha_{\text{дв}} = 30 - 90 \text{ кВт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$. Согласно справочным значениям коэффициент теплоотдачи кипящая вода – металлическая стенка находится в пределах (неподвижная вода) $\alpha_{\text{нв}} = 3,5 - 5,8 \text{ кВт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ [210]. Такое различие $\alpha_{\text{дв}}$ и $\alpha_{\text{нв}}$ можно объяснить, исходя из того, на неподвижной системе кипящая вода – горячий металл образуется паровая пленка, которая резко снижает теплопередачу. Действительно, в результате экспериментов [87] с подачей воды на горячее изделие с разными скоростями было установлено, что, начиная со скорости не менее 12 м/с, образование паровой пленки не происходит. В настоящей диссертации предложен механизм, основанный на развитии НКГ на границе вода – пар. В результате этой неустойчивости формируются капли nano размера, которые пробивают паровую плёнку и падают на горячий прокат, реализуя высокую степень охлаждения (рисунок 5.4).



а)



б)

а) взаимодействие вода – пар – прокат; б) развитие неустойчивости, формирование капель и их взаимодействие с поверхностью проката.

Рисунок 5.4 – Схема процесса охлаждения проката

5.4. Нахождение температурных полей для арматуры диаметрами 10 - 30 мм

Анализ изменения температурных полей по сечению в процессе движения заготовки позволяет выявить важные технологические характеристики: время выравнивания температуры, размеры зоны самоотпуска, температуру в момент её выравнивания. В условиях стана

250 трасса термического упрочнения (ТТУ) состоит из девяти секций принудительного охлаждения, длина каждой 6 м. Каждая секция имеет в качестве охлаждающего устройства трубу с водой под давлением 15-20 атм в секциях перед делительными ножницами и 5-10 атм после делительных ножниц. При разработке модели предполагается возможность включения всех охлаждающих секций. Арматурный прокат имеет температуру около 1000C° и может двигаться со скоростью от 7 до 20 м/с. При прохождении ТТУ происходит охлаждение проката, а на фоне этого протекают структурно-фазовые превращения. Это приводит к упрочению арматуры. Рассмотрим серии расчетов распределения температур для арматуры диаметром 10 и 25 мм, режимы включения секций представлены в таблицах 5.3 и 5.4. При этом скорости движения арматуры 10 изменяются в интервале 16 – 17 м/с, а для круга 25 – в интервале 8 – 10 м/с.

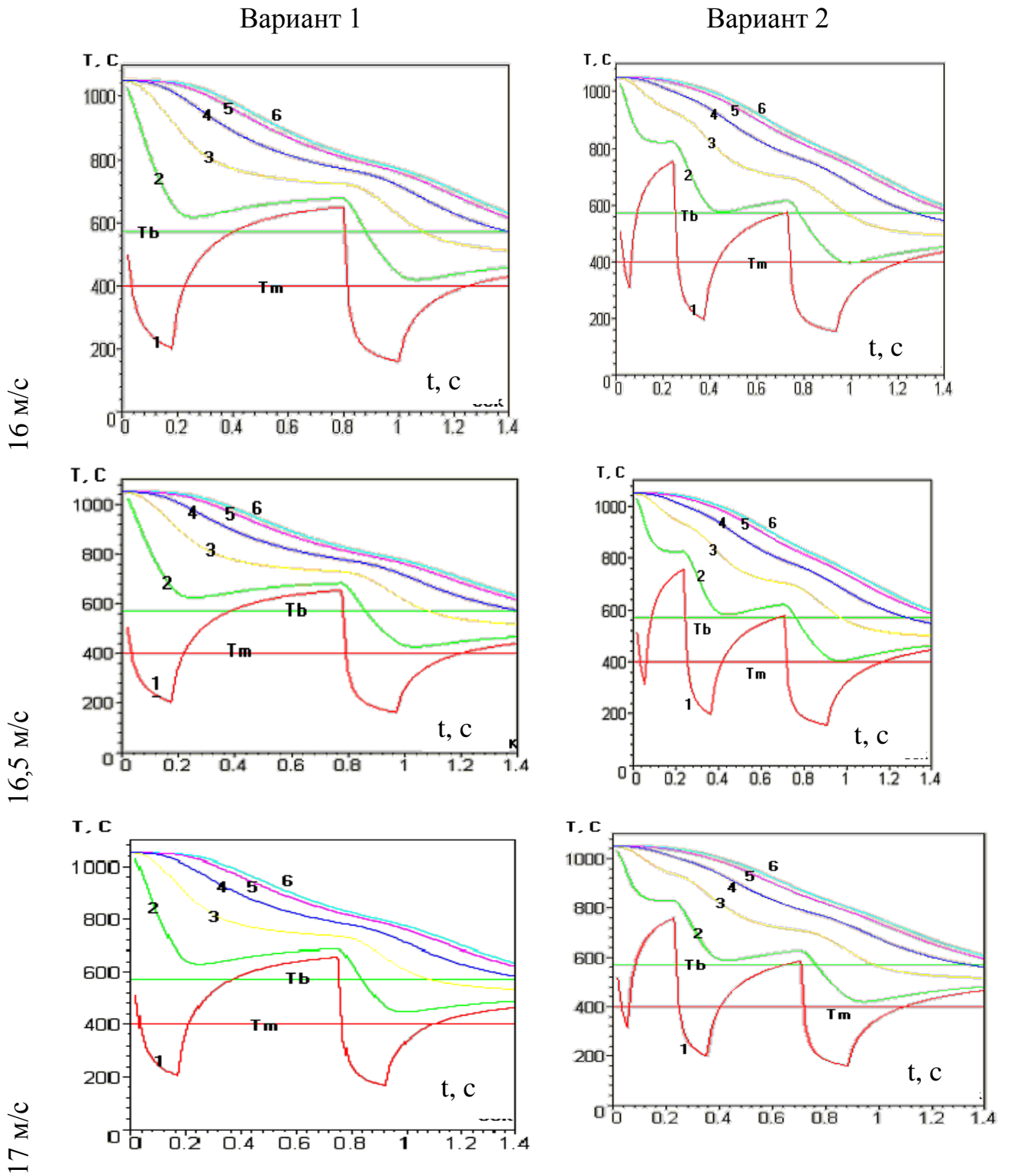
Таблица 5.3 – Длины участков в метрах для круга 10 мм

	Охлаждение	От-пуск	Охлаждение	От-пуск	Охлажде-ние
Вариант 1	3	10	3	-	-
Вариант 2	1	3	2	6	3

Таблица 5.4 – Длины участков в метрах для круга 25 мм

	Охлаждение	Отпуск	Охлаждение	Отпуск	Охлаждение
Вариант 1	12	6	12	7,5	15
Вариант 2	12	6	12	13,5	12

На рисунках 5.5 и 5.6 представлены зависимости распределения температур во времени для различных режимов, скоростей проката и диаметров.



1 – на поверхности, 2 – 1мм, 3 – 2мм, 4 – 3мм, 5 – 4 мм, 6 – 5мм (центр) поверхности

Рисунок 5.5 – Серия зависимостей температуры от времени на различных расстояниях от поверхности охлаждения для арматуры диаметром 10 мм

Из представленных зависимостей распределения температуры во времени для различных сечений стержня видно, что в поверхностном слое (кривые 1 – 3) температура меняется немонотонно. Участки графиков, на которых наблюдается резкое снижение температуры, соответствуют периоду прохождения арматурой участков секций интенсивного охлаждения. Охлаждение поверхностных слоев сменяется отогревом – увеличение температуры происходит в момент прохождения арматурой разрывов между секциями и обусловлено перераспределению тепла из осевой зоны к поверхности.

Как видно из расчетных данных для круга диаметром 10 мм (рисунок 5.5) при прохождении первой секции для всех режимов температура опускается ниже температуры мартенситного перехода (410 °С). Варианты 1 и 2 принципиально отличаются длиной участков отпуска, это приводит к увеличению времени отпуска от 0,2 с (вариант 2) до 0,8 с (вариант 1). Причем, в первом варианте температура отпуска (кривая 1) меняется незначительно, а это позволяет говорить об изотермическом отпуске.

5.5 Нахождение температурных полей для арматуры диаметром 40-60 мм

Установка термического упрочнения (УТУ) на стане 450 АО «ЕВРАЗ–ЗСМК» спроектирована с пятью зонами интенсивного охлаждения. Эти зоны включают три секции принудительного охлаждения (длиной 5, 8 и 5 метров) и два промежуточных разрыва (по 2 метра каждый), выполненных в виде водонаполненных труб диаметром 82 мм. Для целей моделирования предполагается, что все охлаждающие секции будут функционировать при рабочем давлении 2 МПа. Время, необходимое для ускоренного охлаждения арматуры на каждом из пяти

участков, зависит от скорости ее движения (6, 8 или 10 м/с). Так, для первого участка (секция 1) оно составляет 0,83, 0,625 и 0,5 секунды соответственно; для второго (разрыв) – 0,33, 0,25 и 0,2 секунды; для третьего (секция 2) – 1,33, 1 и 0,8 секунды; для четвертого (разрыв) – время совпадает со вторым участком; и для пятого (секция 3) – время совпадает с первым участком. На рисунках 5.6–5.8 представлены графики, показывающие, как температура распределяется во времени и по поперечному сечению арматурных стержней диаметром 40 мм при суммарном времени ускоренного охлаждения в УТУ 3,7, 2,8 и 2,2 с.

Увеличение времени прерывистой закалки, не изменяя характер кривых, смещает их вверх и влево относительно осей координат. Рассмотрим зависимости распределения температуры во времени для различных сечений стержня. В поверхностном слое (кривые 1 и 2) температура меняется циклически. Участки графиков, на которых наблюдается резкое снижение температуры, соответствуют периоду прохождения арматурой секций интенсивного охлаждения. Охлаждение поверхностных слоев сменяется отогревом – увеличение температуры происходит в момент прохождения арматурой разрывов между секциями. Температура поверхностного слоя (кривая 1) для времени охлаждения 3,7 с при этом повышается с 360 до 450 °С в первом разрыве и с 320 до 350 °С – во втором. С увеличением скорости прокатки приведенные температурные интервалы сдвигаются в сторону более высоких температур на 10-20 °С. Для времени охлаждения 2,8 с в первом разрыве температура повышается с 380 до 460 °С, а во втором – со 330 до 370 °С. В течение 2,2 с охлаждения наблюдается температурный скачок: в первом разрыве температура поднимается с 405 °С до 470 °С, а во втором – с 330 °С до 380 °С. Высокая скорость охлаждения арматуры в первой секции, варьирующаяся от 750 до 850 °С/с в зависимости от скорости прокатки, приводит к резкому

температурному воздействию (тепловому удару). Этот удар инициирует превращение аустенита в мартенсит. Следовательно, размер зоны, где происходят мартенситные превращения, напрямую связан со временем интенсивного охлаждения. При временах $\tau = 3,7, 2,8$ и $2,2$ секунды этот размер составляет $3,3, 2,5$ и $2,1$ мм соответственно. Следует подчеркнуть, что при более продолжительном нахождении проката в охлаждающих секциях, превышающем время, необходимое для мартенситных превращений, начинают образовываться бейнитные (сорбитообразные) структуры. На расстоянии от поверхности свыше $4-5$ мм происходит монотонное остывание металла, без циклов нагрева и скорость охлаждения снижается до 100 °C/с.

Для времени охлаждения $3,7$ с через $\sim 6,8$ с после начала охлаждения происходит выравнивание температуры в поверхностном и переходном слоях, для времен охлаждения $2,8$ и $2,2$ с это время соответственно равно 6 и 5 с. Зависимости распределения температуры от расстояния от центра стержня для различных времен охлаждения в УТУ позволяют определить время до начала охлаждения, за которое происходит выравнивание температуры, среднюю по сечению температуру в момент выравнивания и размер зоны отогрева. Видно, что при охлаждении в УТУ в течение $3,7$ с выравнивание температуры происходит через 34 с и средняя температура по сечению равна 565 °C. При глубине зоны отжига $7,9$ мм, уменьшение времени ускоренного охлаждения до значений $2,8$ с и $2,2$ с приводит к снижению времени, необходимого для достижения температурного равновесия по сечению, до 24 с и 19 с соответственно. Количественные значения некоторых параметров технологии ступенчатого охлаждения, полученные из модельных представлений, представлены в таблице 5.5. Таким образом, полученные теоретические распределения температуры во времени и значения скоростей изменения температуры по

сечению позволяют предположить, что после термоупрочнения на установке УТУ арматуры диаметром 40 мм в поверхностном слое (на глубине до 3 мм) в стали будет образовываться отпущенный мартенсит, на глубине 3 – 6 мм тонкодисперсные структуры и феррит, а в центральной зоне обычная феррито-перлитная структура.

Таблица 5.5 – Количественные значения параметров технологии ступенчатого охлаждения

Время охлаждения в УТУ, с	Время охлаждения до выравнивания температуры по сечению стержня, с	Температура выравнивания, °С	Толщина слоя отогрева, мм
2,2	19	630	5,6
2,8	24	605	6,7
3,7	34	570	8

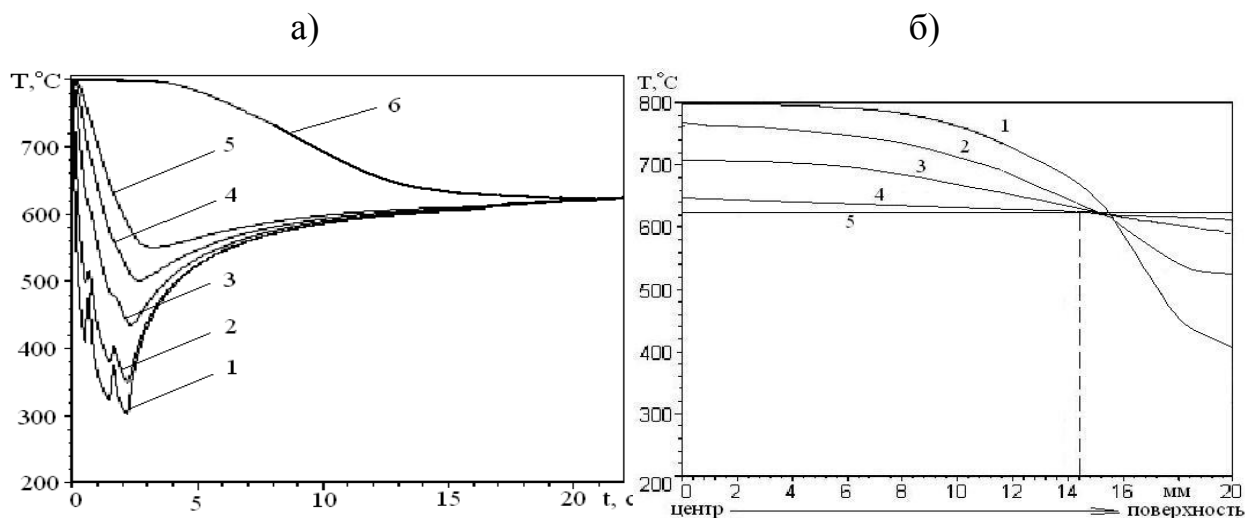


Рисунок 5.6 Распределение температуры для сечений стержня диаметром 40 мм и время охлаждения в УТУ 2,2 с: а) – Распределение температуры во времени на различных глубинах: 1- 0,5; 2-1; 3-2; 4-3; 5-4; 6–20 мм; б) – Распределение температуры по сечению в разные моменты времени: 1-4; 2-6; 3-12; 4-24 и 5-34 с.

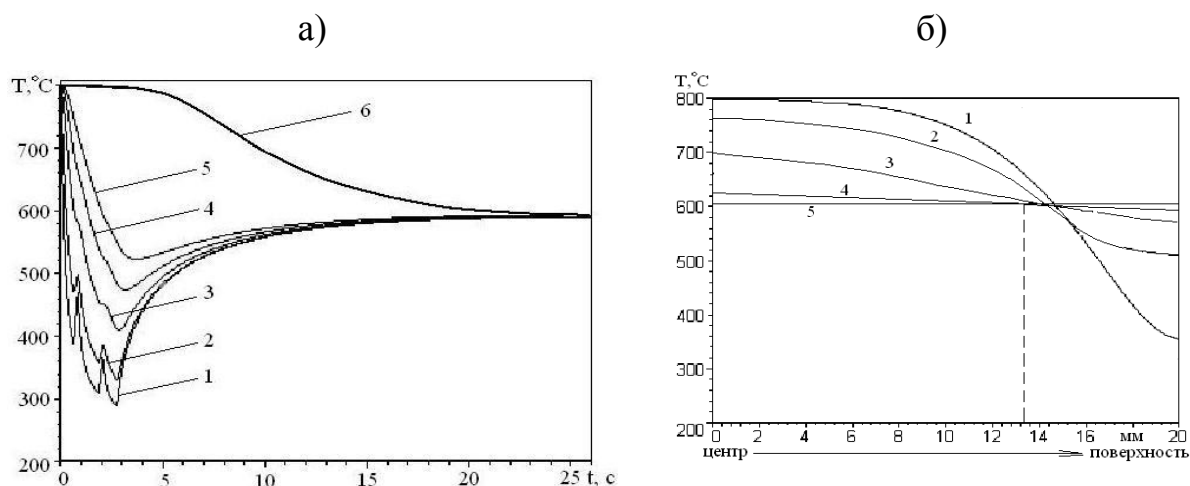


Рисунок 5.7. Распределение температуры для сечений стержня диаметром 40 мм и время охлаждения в УТУ 2,8 с: а) – Распределение температуры во времени на различных глубинах: 1- 0,5; 2-1; 3-2; 4-3; 5-4; 6–20 мм; б) – Распределение температуры по сечению в разные моменты времени: 1-4; 2-6; 3-12; 4-24 и 5-34 с.

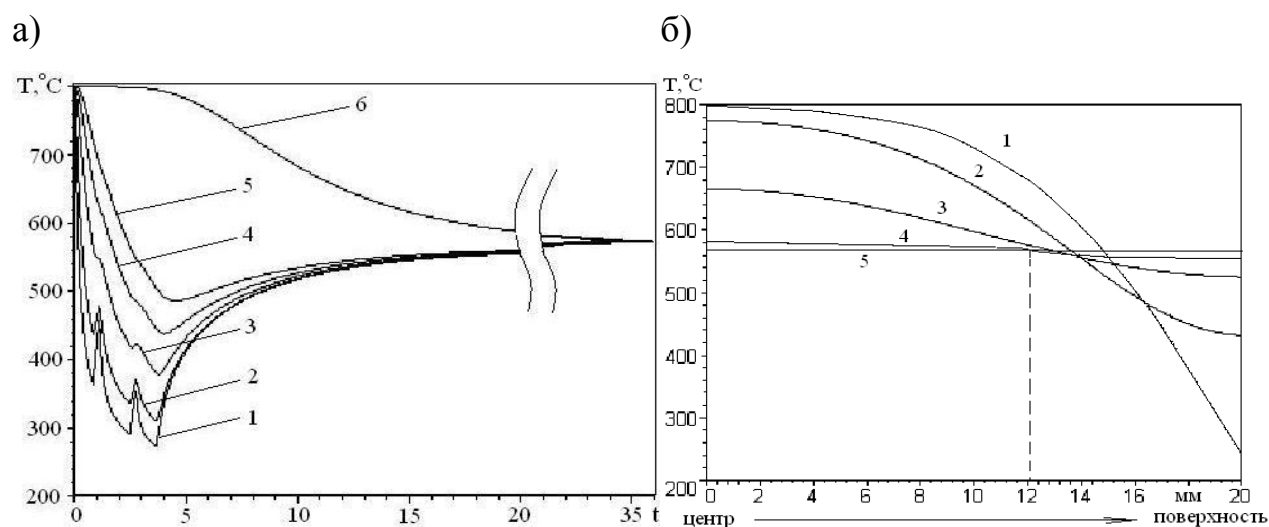


Рисунок 5.8 Распределение температуры для сечений стержня диаметром 40 мм и время охлаждения в УТУ 3,7 с: а) – Распределение температуры во времени на различных глубинах: 1- 0,5; 2-1; 3-2; 4-3; 5-4; 6–20 мм; б) – Распределение температуры по сечению в разные моменты времени: 1-4; 2-6; 3-12; 4-24 и 5-34 с.

5.6 Нахождение температурных полей профильного проката

В настоящем подразделе представлены результаты расчетов температурных полей двутавровой балки в установке ускоренного охлаждения (УУО). В данной установке происходят сложные физические процессы вблизи поверхности балки: натекание и испарение воды, образование прослойки пара, дробление капель до микрометрового размера, удары водяных капель о раскаленную поверхность; в самом прокате – перераспределение температур, генерация термоупругих волн, структурно-фазовые превращения. Реальная геометрия системы: охлаждающая среда – прокат трехмерна. Поэтому для моделирования распределения температурных полей, объясняющих свойства градиентных структур в прокате при прерывистом охлаждении, необходимо сформулировать некоторую приближенную схему процессов. Важные положения, которые необходимо учитывать при переходе от 3D геометрии к 2D, заключаются в использовании подвижной системы координат, перемещающейся со скоростью проката, а также зависимости коэффициента теплоотдачи и температуры охлаждающей среды от времени в кусочно-постоянном виде. Параметрами данной задачи являются средние значения коэффициента теплообмена α_k , температура охлаждающей среды T_k и время охлаждения t_k , при этом k указывает на номер участка системы охлаждения. Такой подход был использован нами при моделировании охлаждения арматуры и определения структурно-фазовых состояний [88, 89]. Для проката сложного профиля технологическая схема охлаждения, как правило, выбирается избирательно, тогда коэффициент теплообмена α_k является функцией координаты точки границы и для каждой секции выбирается специально. В этой связи численный алгоритм и программа расчета распределения температур значительно усложняются. Поэтому целесообразно

использовать разработанные автоматические пакеты моделирования, в нашем случае это Comsol Multiphysics.

В выбранной области рабочей полки (рисунок 5.9) решается задача теплопроводности с учетом теплообмена на границе, отражающей особенности прохождения участков УУО проката и расположения сопел. Поле температур зависит от трех независимых переменных $T=T(t,x,y)$ и подчиняется уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5.14)$$

и граничному условию на поверхности охлаждения

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(t, s)(T - T_c(t)) \quad (5.15)$$

где $\alpha(t, s)$ - коэффициент теплоотдачи, зависящий от времени (t) и точки поверхности (s); $T_c(t)$ - температура охлаждающей среды.

Начальное условие для температуры при $t = 0$ выбирается однородным по сечению проката и равным температуре конца прокатки

Длины участков секции определяются однозначно по конструкции УУО, поэтому времена воздействия тепловых потоков легко находятся и варьированию не подлежат. Момент времени измерения температуры соответствует моменту времени приходу проката на холодильник. Величины x_1 и x_2 берутся равными диаметрам сопел для соответственно первого и второго участков. Коэффициенты теплоотдачи α , которые характеризуют усредненный тепловой поток на каждом участке в определенный промежуток времени выбираются из некоторого диапазона значений, границы которого определены ниже из теоретических и экспериментальных данных.

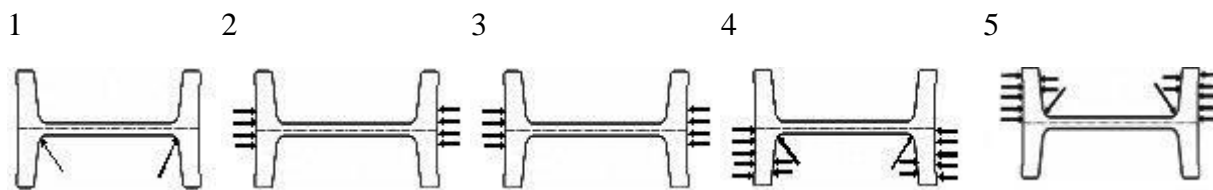


Рисунок 5.9 – Схема охлаждения балки ДП 155 в установке ускоренного охлаждения

Окончательное их значение берется таким образом, чтобы расчетное значение температуры конца охлаждения совпадало с измеренной температурой на холодильнике. Влияние на охлаждающую способность потоков воды многочисленных параметров установки сложно и многообразно. Необходимо, исходя из модельных представлений и экспериментальных данных, указать диапазон изменения коэффициентов теплоотдачи при движении слоя воды относительно нагретой до $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$ поверхности стали. Предполагаем, что вода нагревается до $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ градусов слое вблизи поверхности проката. При температуре $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ имеем значения кинематической вязкости воды $\nu = 3 \cdot 10^{-7}\text{ м}^2/\text{с}$, теплопроводности $\lambda = 0,65\text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, теплоемкости $c = 4200\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ и плотности $\rho = 1000\text{ кг}/\text{м}^3$, тогда коэффициент температуропроводности $a = \lambda / (\rho \cdot c) = 1,5 \cdot 10^{-7}\text{ м}^2/\text{с}$ и число Прандтля $Pr = \nu / a = 2$. Так как $0,5 < Pr < 5$, то можно воспользоваться формулой Нуссельта $Nu_0 = 0,023 \times Pr^{0,4} \times Re^{0,8}$, где Re - число Рейнольдса ($Re = U_0 \cdot L / \nu$) [90]. Для рассматриваемого случая число Рейнольдса находится в пределах от $1,3 \cdot 10^6$ до $5,2 \cdot 10^6$, тогда для числа Нуссельта получаем $Nu_0 = 2366 - 7172,4$, а для коэффициента теплоотдачи на границе «вода – прокат» получаем диапазон изменения $\alpha = 38 - 115\text{ кВт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, а для системы воздух – прокат $\alpha = 70 - 120\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$. В работе [208] для арматуры в условиях ускоренного охлаждения предлагается использовать значение коэффициента теплоотдачи порядка $100\text{ кВт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, поэтому наш

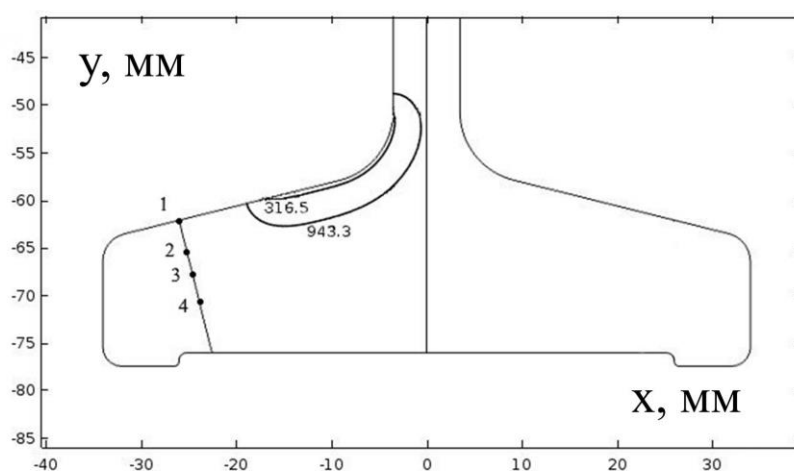
выбор диапазона изменения этого коэффициента не является произвольным.

Перенос методики расчета коэффициента теплопередачи в условиях тангенциального течения воды относительно проката на струйное охлаждение можно обосновать следующим образом. При больших относительных скоростях (10 м/с) проката взаимодействие перпендикулярно натекающих струй приводит к формированию движущейся относительно проката пленки воды. В отличие от пленочного течения при струйном охлаждении высота пленки в последнем случае будет переменной, но это не существенно, так как основные процессы протекают на границе паровая прослойка – жидкость.

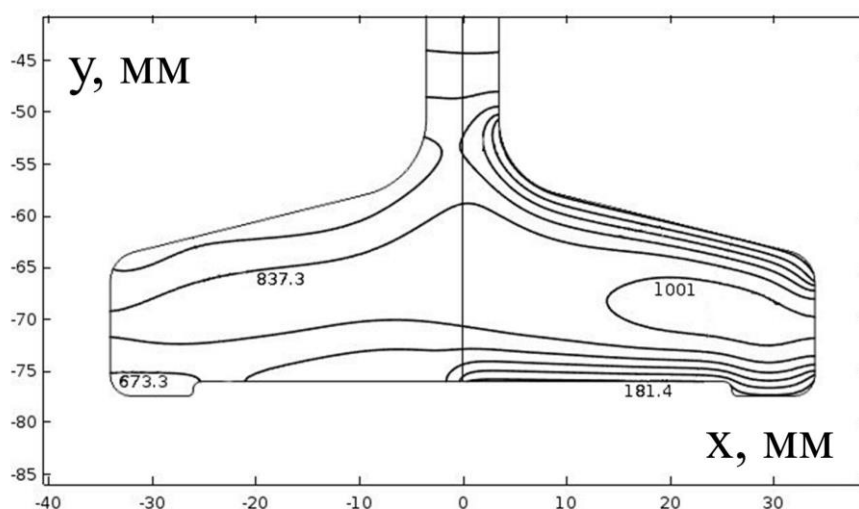
Для расчета α_1 можно использовать теплопроводность воды, так как она в виде капель достигает поверхности проката. Эти капли формируются за счет неустойчивости поверхности раздела пар – вода по механизму неустойчивости Кельвина – Гельмгольца в наноразмерном диапазоне длин волн [49].

На рисунках 5.11 – 5.12 представлены данные расчетов распределения температур. Температуры в точках 1 – 4, отмеченных на рисунке 5.11, асимптотически совпадают при выходе из УУО, то есть происходит выравнивание температур по сечению (рисунок 5.12). Адекватность расчетов подтверждается совпадением расчетной равновесной температуры и измеренной температурой балки на холодильнике, которая на рисунке 5.12 соответствует прямой линии. Изотермы в момент прохождения первой секции показаны на рисунке 5.11, а, из которого видно, что на поверхности в области охлаждения минимальная температура достигает 316 °С, это меньше температуры мартенситного перехода ($T_M = 350$ °С). Поэтому на глубине до 1 мм под зоной воздействия струи формируется структура мартенсита [216]. При

прохождении с первой по третью секции происходит локальное охлаждение полка. В целом, сечение ещё имеет высокое теплосодержание, так как теплоотвод осуществлялся локально. В четвертой и пятой секциях происходит теплоотвод по всему сечению подошвы (рисунок 5.11, б). При этом структурно-фазовые превращения происходят по диффузионному механизму [216]. На рисунке 5.12 обозначены зависимости температуры от времени в точках 1, 2, 3 и 4 полки для различных скоростей проката.



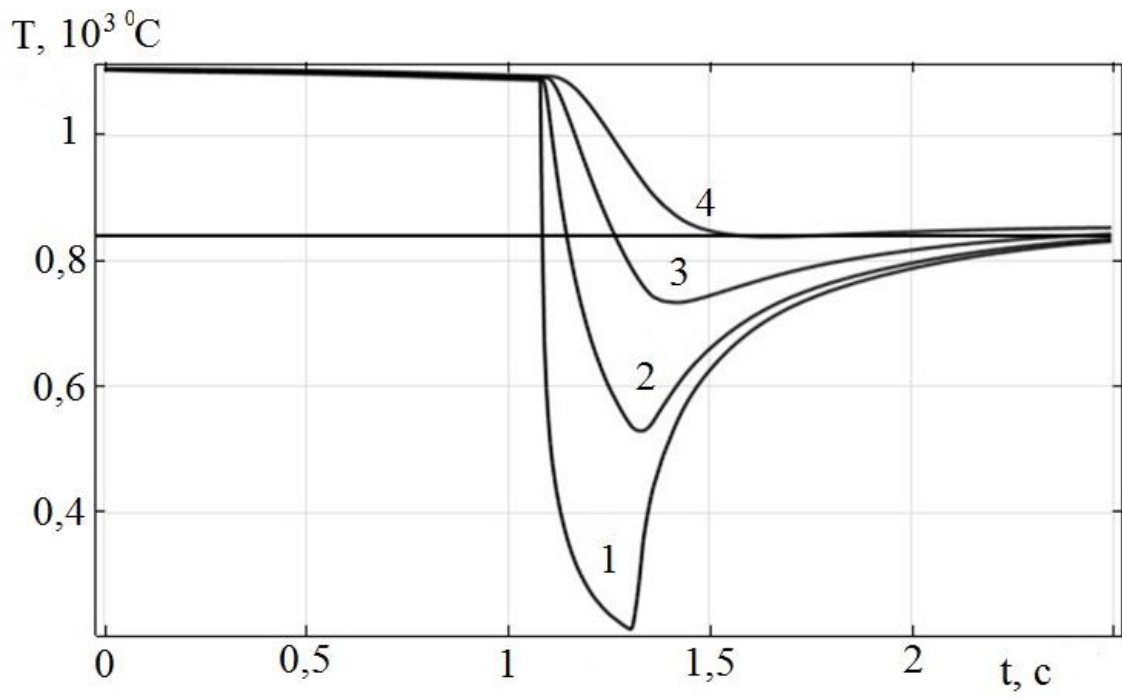
а)



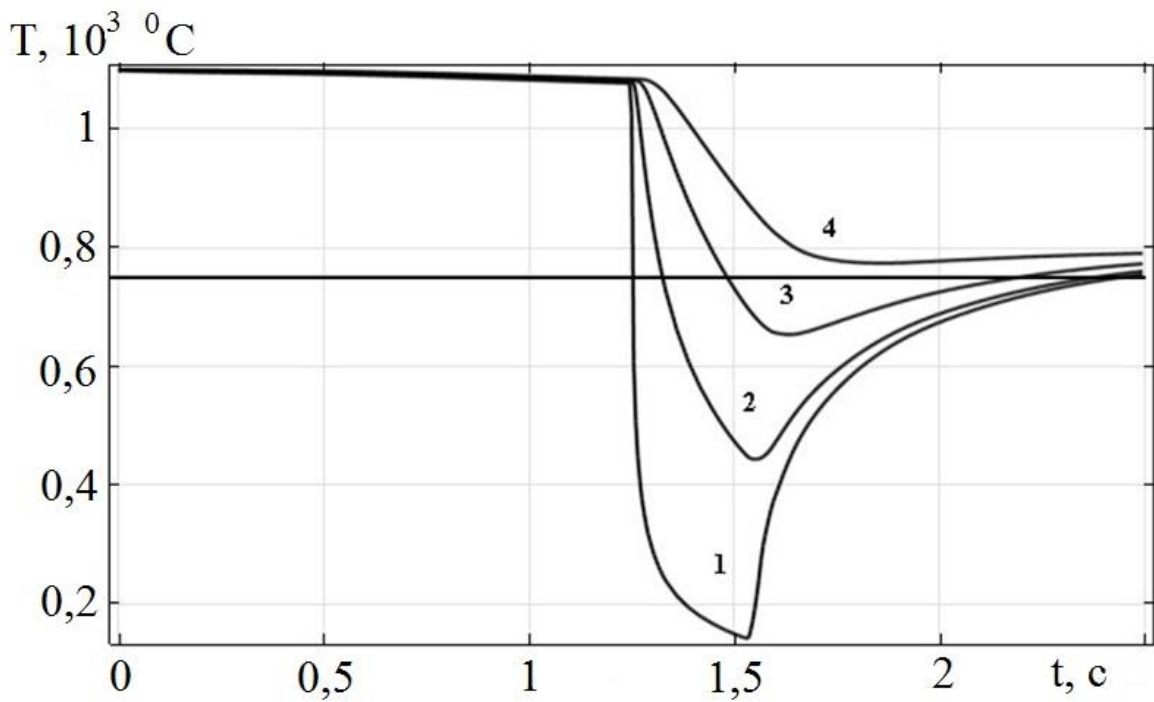
б)

а – 0,44 с; б – 2,22 с

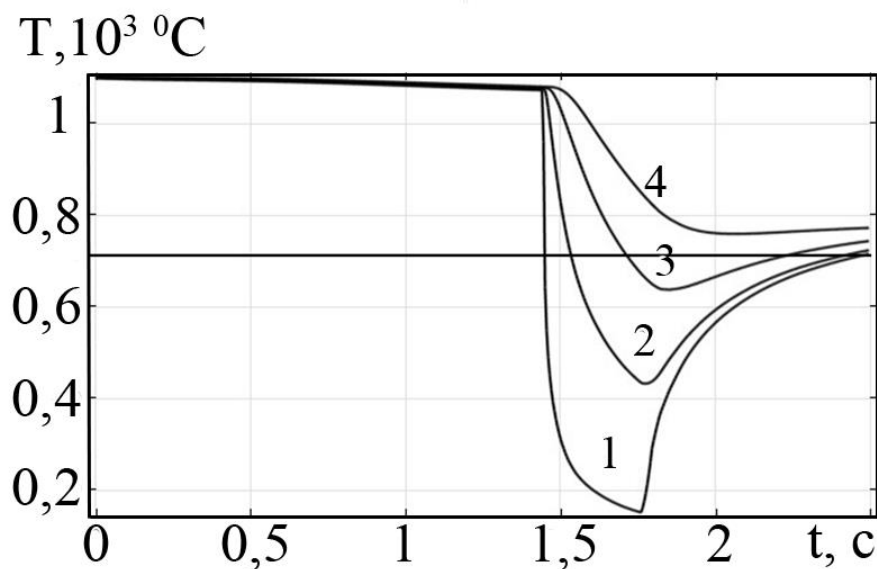
Рисунок 5.11 – Изотермы в различные моменты времени



a)



б)



в)

а – 6; б – 5,2; в – 4,5 м/с

Рисунок 5.12 – Зависимость температуры от времени в точках 1, 2, 3, 4 для различных скоростей проката

Самое резкое изменение температуры наблюдается в точке 1, которая находится на поверхности. Характер изменения зависимостей температуры от времени одинаков. Однако, скорость и глубина максимумов различны. Это обстоятельство может являться отправной точкой для анализа формирующихся по сечению градиентных структур. На основании анализа тепловых полей можно прогнозировать структурно-фазовые превращения в балке при термомеханическом упрочнении.

5.7 Механизмы ускоренного охлаждения проката

Рассмотрим подробнее механизм ускоренного проката за счет прохождения капель жидкости через паровую пленку. Эти капли образуются за счет неустойчивости поверхности раздела пар – вода по механизму неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. В зоне контакта воду можно считать неподвижной вязкой жидкостью, а образовавшийся пар –

идеальной жидкостью, движущейся со скоростью проката. Известно, что в такой системе возникают неустойчивости Кельвина-Гельмгольца – периодические возмущения границы раздела жидкость – пар. Именно этот период и определяет размер капель, проникающих сквозь тонкий слой пара. Для такой системы в случае коротких волн было выведено дисперсионное уравнение [50]:

$$\omega^2 + 2\omega(a + ib) - c = 0. \quad (5.16)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - длина волны возмущения границы, ω - циклическая частота, ν - кинематическая вязкость жидкости, a , b и c - постоянные:

$$a = a_0 k^2, \quad b = b_0 k, \quad c = (1 + 1/\mu)b^2 - \frac{\omega_0^2}{1 + \mu}, \quad (5.17)$$

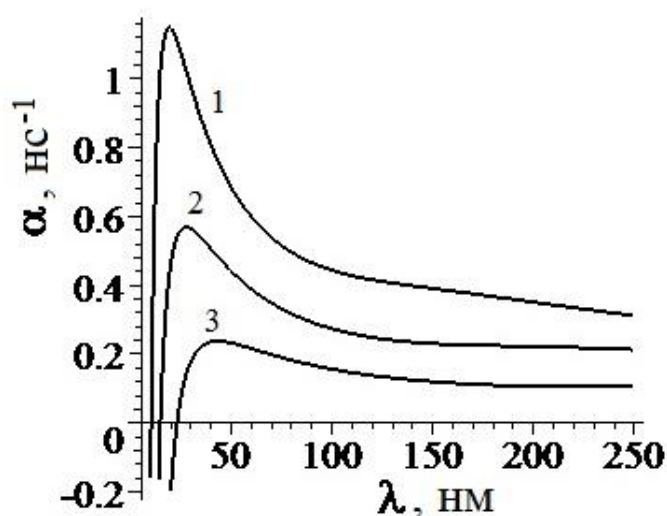
$$a_0 = \frac{\nu}{1 + \mu}, \quad b_0 = \frac{\mu u_0}{1 + \mu}, \quad \omega_0^2 = \frac{\sigma_0}{\rho_1} k^3,$$

где $\mu \approx 10$ – постоянная; u_0 – относительная скорость движения слоев; σ_0 – поверхностное натяжение жидкости; ρ_1 – ее плотность.

Расчеты проводились при $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$ (плотность воды), $\nu = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ (кинематическая вязкость воды при $100 \text{ }^\circ\text{C}$), $\sigma_0 = 0,059 \text{ Н/м}$ (поверхностное натяжение воды при $100 \text{ }^\circ\text{C}$) [217] и относительных скоростях движения слоев $u_0 = 20 - 60 \text{ м/с}$. Результаты приведены на рисунке 5.13. При скоростях $30 - 60 \text{ м/с}$ наблюдается максимум инкремента в диапазоне десятков нанометров, что, как предполагается, соответствует размеру капель. С ростом скорости прокатки размер капель уменьшается. При уменьшении относительной скорости движения слоев инкремент уменьшается, максимум менее выраженным, значения инкремента становятся менее $0,1 \text{ нс}^{-1}$. То есть, при малых скоростях прокатки образованием неустойчивостей Кельвина – Гельмгольца можно

пренебречь, и капельный механизм охлаждения не реализуется. При скоростях больше критической, возникает неустойчивость Кельвина – Гельмгольца в нанодиапазоне, что приводит к формированию нанокапель. Охлаждение ведется с помощью нанокапель, движущихся через такую паровую пленку, что позволяет при моделировании структурно-фазовых превращений использовать коэффициент теплопередачи, рассчитанный по формуле, в которую входит теплопроводность воды.

Время воздействия капли на жесткую поверхность порядка $d/c \sim 10^{-11}$ с, (d – диаметр капли; c – скорость звука), поэтому при таких временах происходит термоудар, генерирующий упругую волну [218]. Действие упругих волн повышает ударную вязкость, так как возникшие на первой стадии охлаждения трещины в последующих секциях при взаимодействии упругой волны со свободными берегами трещин захлопываются.



1 – $u_0 = 60$ м/с, 2 – $u_0 = 50$ м/с, 3 – $u_0 = 40$ м/с.

Рисунок 5.13 – Зависимость инкремента от длины волны возмущения границы раздела «пар/вода»

Результаты исследований, свидетельствующие об успешном применении различного рода воздействий с целью торможения и остановки разрушения, приведены в монографии [219]. В [220]

установлена возможность закрытия трещин при импульсных нагрузках, соответствующих области линейно-упругих деформаций материала. Рассмотрим задачу о температурных напряжениях для свободного от напряжений плоского образца с температурой T_0 и толщиной l_0 , который охлаждается с постоянной скоростью V в течение времени t_1 . Ось x направляем перпендикулярно поверхности образца, а две другие оси лежат в плоскости воздействия потока энергии. Плоскость $x=0$ будет у нас лицевой поверхностью, а плоскость $x=l_0$ – тыльной. Предположим, что в поперечном сечении поток энергии однороден, поэтому применяем одномерную постановку задачи. То есть все функции зависят от одной пространственной переменной x . Рассмотрим одноосное напряженно-деформируемое состояние, при котором ненулевыми являются компоненты тензоров деформаций $\varepsilon_x(x,t)$. Для постановки математической задачи используем уравнения движения и теплопроводности, а также соотношения Дюгамеля-Неймана, так называемую динамическую задачу несвязанной термоупругости [198]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \sigma_x = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma T. \quad (5.18)$$

Здесь ρ, χ – плотность и температуропроводность материала, $c = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho}$ – скорость распространения продольных волн, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$ – коэффициент термоупругой связи, λ, μ – коэффициенты Ламе, α_t – коэффициент линейного расширения, $u = u(t, x)$ – компонента вектора перемещений, $T = T(t, x)$ – распределение температуры.

Тепловую ситуацию со стороны лицевой поверхности зададим в виде линейного во времени охлаждения от температуры T_0 до температуры T_1 в течение времени t_1 с последующим линейным повышением температуры до исходной за время t_3

$$T(t,0) = T_0 - (T_0 - T_1)(H(t) - H(t - t_1))t/t_1 + (T_0 - T_1)(H(t - t_1) - H(t - t_1 - t_3))((t - t_1)/t_3 - 1) \quad (5.19)$$

$H(z)$ – функция Хэвисайда. Пренебрегаем давлением от потока энергии и считаем, что отсутствует закрепление образца в области действия потока. Тогда граничные условия для напряжения нулевые:

$$\sigma_x(t,0) = \sigma_x(t,l_0) = 0 \quad (5.20)$$

Начальные условия задачи:

$$\sigma_x(0,x) = 0, \quad T(0,x) = T_0, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial t}(0,x) = 0 \quad (5.21)$$

Задача имеет два пространственных масштаба: динамический, равный толщине образца $l_0 \sim 1$ мм, и тепловой $-l_T \sim 10$ мкм. Поэтому уравнение динамики рассматриваем на отрезке от нуля до l_0 , а уравнение теплопроводности – на полубесконечной прямой с температурой T_0 на бесконечности.

В безразмерных переменных математическая задача (5.18 – 5.21) приводится к системе двух краевых задач

$$\begin{aligned} \alpha \dot{\theta} = \theta'', \quad \xi > 0, \quad \tau > 0; \\ \theta(\tau,0) = \tau(H(\tau) - H(\tau - \tau_1))/\tau_1, \quad \theta(\tau,\infty) = 0; \quad \theta(0,\xi) = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + \ddot{\theta} = \sigma'', \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0; \\ \sigma(\tau,0) = \sigma(\tau,1) = 0; \quad \sigma(0,\xi) = \dot{\sigma}(0,\xi) = 0. \end{aligned}$$

Безразмерные переменные задаются по формулам

$$\xi = \frac{x}{l_0}, \quad \tau = \frac{tc}{l_0}, \quad \sigma = \frac{\sigma_x}{\gamma(T_1 - T_0)}, \quad \theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_1}, \quad \alpha = \frac{l_0 c}{\chi}, \quad \tau_1 = \frac{t_1 c}{l_0}. \quad (5.23)$$

Эта задача является частным случаем задачи, решенной в [218]. Воспользуемся формулами из этой работы. Решение для безразмерных напряжений может быть представлено в виде

$$\sigma(t, \xi) = \sigma_{\infty}(t, \xi) + \sigma_{\rightarrow}(t, \xi) + \sigma_{\leftarrow}(t, \xi), \quad (5.24)$$

Первое слагаемое в (5.24) представляет собой напряжение в волне, генерируемой температурным нагревом. Второе слагаемое выражает суперпозицию прямой и отраженной от тыльной и лицевой поверхностей волн.

Введем функции

$$F(\tau, \xi) = H(\tau - \xi) \left(\exp(\alpha(\tau - \xi)) - 1 \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \right) - \frac{1}{2} \left(\exp(\alpha(\tau - \xi)) \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi - 2\tau}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \right) + \exp(\alpha(\tau + \xi)) \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi + 2\tau}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \right) \right), \quad (5.25)$$

$$\Phi(z) = F(z, 1)$$

Здесь

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-z^2) dz \quad (5.26)$$

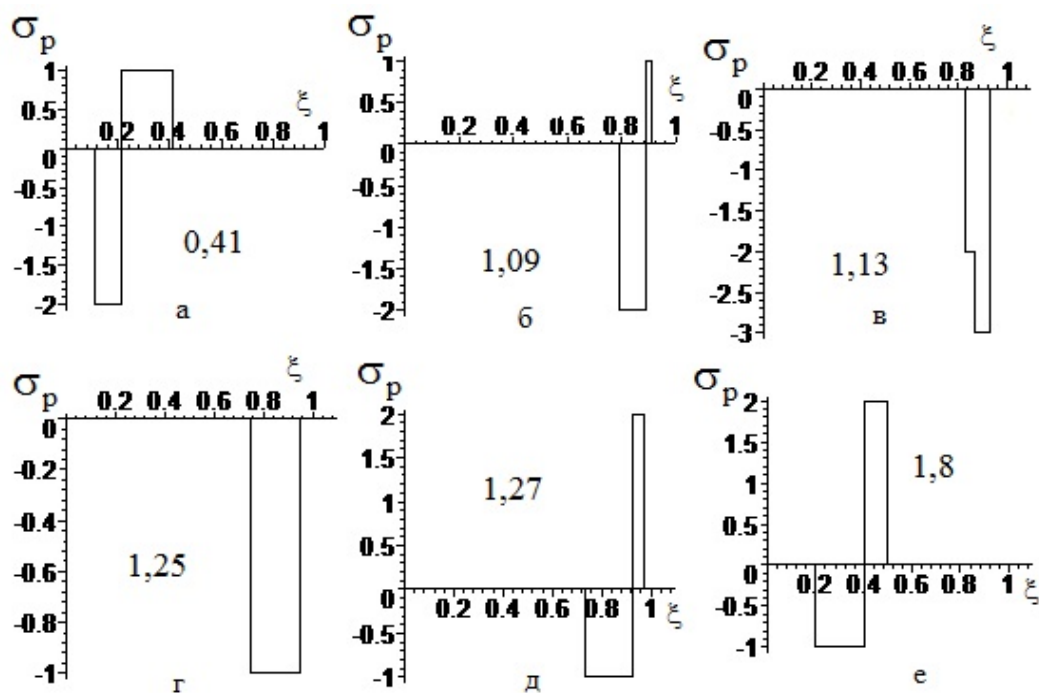
— дополнительная функция ошибок [196]. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\infty}(\tau, \xi) &= \frac{1}{\tau_1 \alpha} (F(\tau, \xi) - H(\tau - \tau_1) F(\tau - \tau_1, \xi)) - \\ &- \frac{1}{\tau_3 \alpha} (H(\tau - \tau_1) F(\tau - \tau_1, \xi) - H(\tau - \tau_1 - \tau_3) F(\tau - \tau_1 - \tau_3, \xi)), \\ \sigma_{n\leftarrow}(\tau, \xi) &= -\frac{1}{\tau_1 \alpha} (\Phi(\tau + \xi - 2n - 1) - \Phi(\tau - \tau_1 + \xi - 2n - 1)) + \\ &+ \frac{1}{\tau_3 \alpha} (\Phi(\tau - \tau_1 + \xi - 2n - 1) - \Phi(\tau - \tau_1 - \tau_3 + \xi - 2n - 1)) \\ \sigma_{n\rightarrow}(\tau, \xi) &= \frac{1}{\tau_1 \alpha} (\Phi(\tau - \xi - 2n - 1) - \Phi(\tau - \tau_1 - \xi - 2n - 1)) - \\ &- \frac{1}{\tau_1 \alpha} (\Phi(\tau - \tau_1 - \xi - 2n - 1) - \Phi(\tau - \tau_1 - \tau_3 - \xi - 2n - 1)) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Расчеты проводились при $\chi = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $c = 6000 \text{ м/с}$,
 $\alpha_t = 13 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $K = (3\lambda + 2\mu)/3 = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ (параметры для стали).
 Толщина металла $l_0 = 10^{-3} \text{ м}$. $\gamma = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Н/(м}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$, Безразмерный параметр
 $\alpha = 10^6$. Выберем $T_0 = 1000^\circ \text{ C}$, $T_1 = 800^\circ \text{ C}$. Тогда
 $\sigma_x = \sigma\gamma(T_1 - T_0) = -1,2 \cdot 10^9 \sigma \text{ (Н/м}^2)$.

При фиксированном отношении τ_3/τ_1 безразмерные напряжения
 обратно пропорциональны $\alpha\tau_1$. Выбираем $\tau_1 = 0,2$, $\tau_3/\tau_1 = 0,5$, то есть
 $\tau_3 = 0,1$. Несмотря на кажущуюся сложность формул (4.35), волна
 напряжения при таких параметрах $\alpha\tau_1 \approx 10^5$ имеет очень простой вид. Она
 представляет собой ступеньку длиной τ_1 и высотой $1/(\alpha\tau_1)$, за которой
 следует ступенька противоположного знака длиной τ_3 и высотой $1/(\alpha\tau_3)$.
 Таким образом, выполняется закон сохранения импульса. Поэтому на
 рисунке 4.14 приведены графики приведенных напряжений $\sigma_p = -\sigma\alpha\tau_1$. В
 начале передний фронт волны представляет собой волну растяжения.

При отражении от свободного конца волна переворачивается. Это
 приводит к интересным эффектам. В момент времени 1, когда передняя
 часть первой полуволны доходит до края, она начинает переворачиваться и
 отражаться и компенсировать заднюю часть этой полуволны, которая еще
 падает. Передняя часть волны сужается, и волна как бы отступает от края.
 Так продолжается до момента времени $1 + \tau_1/2$, когда первая полуволна
 исчезает совсем. Затем она, отражаясь, усиливает вторую полуволну, и та
 вырастает в $1 + \tau_3/\tau_1$ раза.



а – 0,41; б – 1,09; в – 1,13; г – 1,25; д – 1,27; е – 1,8

Рисунок 5.14 – Зависимость приведенного напряжения от координаты в разные моменты времени (указанные на рисунках)

Первая волна идет обратно, а вторая в прямом направлении, и на волне возникает ступенька. Ступенька исчезает в момент $1 + \tau_1 + \tau_3/2$, и первая обратная полуволна мгновенно уменьшается до «номинала». Затем она движется в обратном направлении, а за ней возникает вторая обратная полуволна. В момент времени $1 + \tau_1 + \tau_3$ она заканчивает расширяться, и вся волна движется как единое целое в обратном направлении. При отражении от передней стенки все повторяется. Таким образом, зона максимального напряжения возникает в момент $1 + \tau_1/2$ на расстоянии $\tau_1/2$ от свободного края, движется к нему и достигает его в момент $1 + \tau_1$, затем сужается и исчезает в момент $1 + \tau_1 + \tau_3/2$.

5.8 Построение изотермических диаграмм распада переохлажденного аустенита низкоуглеродистых сталей

Изотермическую диаграмму низкоуглеродистой стали можно представить из пяти С-образных кривых: начала образования феррита – F_s ; начала и конца образования перлита P_s и P_f ; начала и конца образования бейнита – B_s и B_f и линии образования мартенсита [221–223]. Для аналитического описания каждой кривой используется универсальная зависимость вида [209]:

$$\begin{aligned}
 Y &= \sqrt{X} \cdot \exp(-0.5(X-1)), \\
 Y &= (S - S_0)/(S_n - S_0), \quad X = (U - U_0)/(U_n - U_0), \\
 \text{где } U &= T/1000, \quad U_n = T_n/1000, \quad U_0 = T_0/1000, \\
 S &= \ln(t), \quad S_0 = \ln(t_0), \quad S_n = \ln(t_n),
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

где t_0 , t_n – времена, T_0 , T_n – температуры опорных точек на С-образной кривой и показаны на рисунке 5.16. Для построения каждой С-образной кривой изотермической диаграммы распада аустенита на феррит, перлит и бейнит достаточно и необходимо задать две опорные точки. Координаты этих точек (S_0, T_0) и (S_n, T_n) вычисляются с помощью эмпирических формул, которые учитывают химический состав и размер аустенитного зерна. В данном исследовании для описания пяти С-образных кривых было использовано 20 уравнений, определяющих эти опорные точки [222].

Рассмотрим диаграмму на рисунке 5.15, из которой следует, что при скорости охлаждения менее $450^\circ\text{C}/\text{с}$ (V_1) протекает диффузионный распад аустенита с образованием феррита и перлита. При скорости $V_2 = 4 \text{--} 50 \text{--} 700^\circ\text{C}/\text{с}$ происходят структурные превращения с образованием бейнита, а при $V_3 = 700^\circ\text{C}/\text{с}$ и более – мартенситное превращение по сдвиговому механизму. Используя данные по распределению температур можно сказать, что в 1-й секции УТУ: 1) на поверхности будут образовываться мартенситные структуры; 2) на глубине 2-3 мм следует ожидать появления

сорбитообразных структур; 3) на глубине более 4 мм будет происходить перлитное превращение.

Изотермические диаграммы в форме уравнений (5.36) используются как модуль в программном комплексе по расчетам структурно-фазового состава при неизотермических условиях.

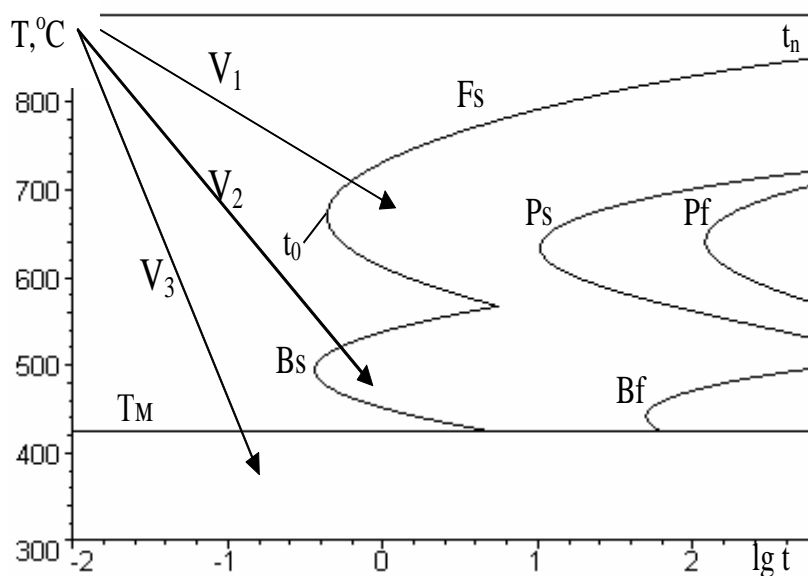


Рисунок 5.15 – Изотермическая диаграмма фазового превращения стали 15Г2С

5.9 Алгоритм расчета структурно-фазового состава при неизотермических условиях

При условии неизотермического охлаждения расчет превращения осуществляется по методике, следующей из интеграла Штейнберга-Шейля, и использован многими исследователями [221 – 227]. В этом случае процесс непрерывного охлаждения представляется набором изотермических выдержек при температурах $T^{n+1/2}$ в течение промежутка времени от t_n до t_{n+1} . Для математического моделирования фазовых переходов производится дискретизация температурной зависимости в моменты времени $t_i = i\Delta t$ и полагаем, что температура остается постоянной в интервале от t_i до t_{i+1} , равной $T_{i+1/2} = (T(t_i) + T(t_{i+1}))/2$. Степень

изотермического превращения аустенита (X_i), как функция времени превращения (τ), в феррит ($i=2$), перлит ($i=3$) или бейнит ($i=4$) рассчитываются из уравнения Авраами-Колмогорова со своими константами для каждой структурной составляющей

$$X_i(\tau) = 1 - \exp(-m_i \cdot \tau^{K_i}), \quad (5.29)$$

где m_i и K_i определяются по формулам:

$$\begin{aligned} K_i(T) &= -\ln(\ln(1 - X_s)/\ln(1 - X_f))/(\ln(\tau_s/\tau_f)) = -6,132/(\ln(\tau_{si}(T)/\tau_{fi}(T))), \\ m_i(T) &= -\tau_s(T)^{n(T)}/\ln(1 - X_s) = -99,5/\tau_{si}(T)^{n_i(T)}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

В этих формулах полагали, что для моментов времени начала τ_s и конца τ_f перлитного и бейнитного превращений доли соответственно равны $X_s=1\%$ и $X_f=99\%$. Мартенситное превращение протекает в интервале температур от T_{ms} до T_{mf} , мгновенно, и рассчитываются для каждой марки стали по эмпирическим формулам. Доля мартенсита определяется по формуле Авраами-Колмогорова: $X_5(T)=1-\exp(-0.011(T_{ms}-T))$. Таким образом, плоскость изотермической диаграммы разбивается на области, в которых возможно существование только одной фазы превращения. При условии неизотермического охлаждения расчет доли превращения осуществляется по формуле, следующий из интеграла Штейнберга-Шейля. В этом случае процесс непрерывного охлаждения представляется набором изотермических выдержек при температурах $T_{n+1/2}$ в течение промежутка времени от t_n до t_{n+1} . Тогда времена изотермических превращений (τ_n) можно вычислить по формуле (5.19) с учетом соответствующей фазы превращений. Доля превращений может быть выражена отношением t_n / τ_n функцией X для всех предыдущих моментов времени. Суть соотношения Штейнберга-Шейля сводится для дискретного разбиения к уравнению относительно X :

$$\sum_{n=1}^t \frac{t_n}{\tau_n(X(t), T_n)} = 1 \quad (5.31)$$

Для непрерывного случая сумма (5.39) превращается в интеграл и для определения доли получается интегральное уравнение относительно $X(t)$. Способ решения уравнения (5.39) в настоящей работе основан на использовании метода, вытекающего из [222]. Вводятся объёмные доли аустенита V_1 , феррита V_2 , перлита V_3 , бейнита V_4 и мартенсита V_5 . Сумма долей структурных составляющих равна: $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 1$. Долю аустенита на $n+1$ шаге можно определить, если найдены все структурные составляющие превращения на $n+1$ шаге. Считаем, что в момент времени от t_n до t_{n+1} имеет место только одно превращение из аустенита в другую фазу и используются промежуточные значения объёмной фиктивной доли i -ой фазы: $X_i = V_i / ((V_1 + V_i) V_i^{eq})$, где равновесные значения для ферритного перехода $V_2^{eq} = V_{20}(A_3 - T_{n+1/2}) / (A_3 - A_1)$ при $A_1 < T_{n+1/2} < A_3$, $V_2^{eq} = 0$ при $A_3 < T_{n+1/2}$, $V_2^{eq} = 1$ при $A_1 > T_{n+1/2}$, где $V_{20} = (0.769 - C) / 0.749$, здесь C - содержание углерода в стали, а температуры A_1 и A_3 определяются по формулам [216]. $V_3^{eq} = 1$ (перлитный переход), а для бейнитного перехода имеем $V_4^{eq} = (T_{BS} - T_{n+1/2}) / (T_{BS} - T_{BF})$, где T_{BS} , T_{BF} - температуры начала и начала полного бейнитного превращения. Для превращения в мартенсит $V_5^{eq} = 1$. Расчет фазового состава осуществляется по следующему алгоритму. Этап 1. Рассчитываются значения температур: A_1 , A_3 , T_{BS} , T_{BF} , T_{ms} и T_{mf} для выбранной марки стали по формулам из [221–223]. Задается температурная история $T(t)$ и значения объёмных долей фаз в начальный момент времени: $V_1 = 1$, $V_i = 0$ ($i = 2, 3, 4, 5$). Этап 2. Организуется цикл по времени с шагом Δt и считаются известными величины $T_{n+1/2}$, X_i^n . Определяется тот диапазон температур, в который попадает $T_{n+1/2}$, и если это немартенситный диапазон, то запоминается его номер i_0 и

определяется фиктивное время τ_i^n изотермического превращения при температуре $T_{n+1/2}$ и доли X_i^n по формуле:

$$\tau_i^n = (-\ln(1 - X_i^n)/m_i(T_{n+1/2}))^{1/K_i} \quad (5.32)$$

Далее определяется объемная фиктивная доля (X_i^{n+1}) по формуле (5.36) при $\tau = \tau_i^n + \Delta t$, а затем производится расчет объемной доли на $n+1$ шаге:

$$V_i^{n+1} = X_i^{n+1} \cdot V_i^{\text{eq}}(V_1^n + V_i^n) \quad \text{и} \quad V_1^{n+1} = 1 - \sum_{i=2}^{i_0} V_i^{n+1} \quad (5.33)$$

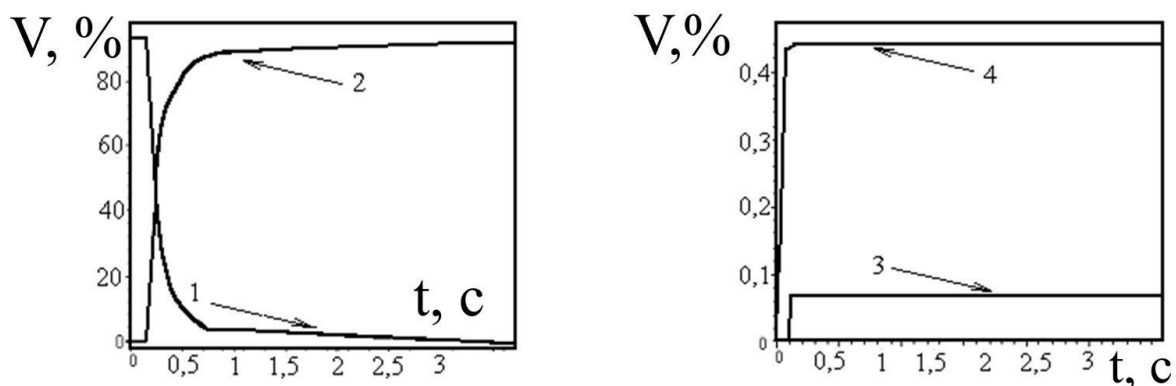
При $V_1^{n+1} \leq 0$, превращение считается законченным. Если реализуется мартенситный переход ($T_{n+1/2} < T_{ms}$), тогда

$$\begin{aligned} V_5^{n+1} &= (1 - V_2^n - V_3^n - V_4^n) \cdot (1 - \exp(-0,011(T_{ms} - T_{n+1/2}))); \\ V_1^{n+1} &= 1 - V_2^n - V_3^n - V_4^n - V_5^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

По предложенному алгоритму была составлена программа расчетов. Математическая модель дала распределение фаз по сечению проката.

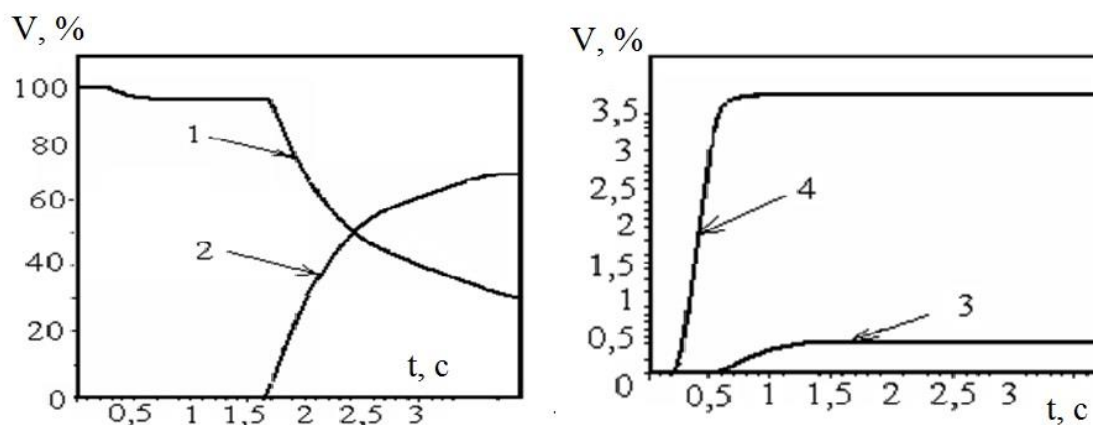
5.10 Кинетика распада аустенита

Для круга 40 проведены расчеты кинетики распада аустенита при скоростях движения 6, 8 и 10 м/с. Расчетные данные по кинетике распада аустенита при скорости проката 6 м/с (суммарное время охлаждения в УТУ 3,7 с) представлены на рисунках 5.16 – 5.18. Полученные зависимости позволяют корректно определить r_m . Видно, что на поверхности практически мгновенно происходит распад аустенита по мартенситному варианту, содержание феррита и бейнита составляет доли процента.



1 – аустенит; 2 – мартенсит; 3 – бейнит; 4 – феррит

Рисунок 5.16 – Изменение структурного состава во времени на расстоянии 0,5 мм от поверхности

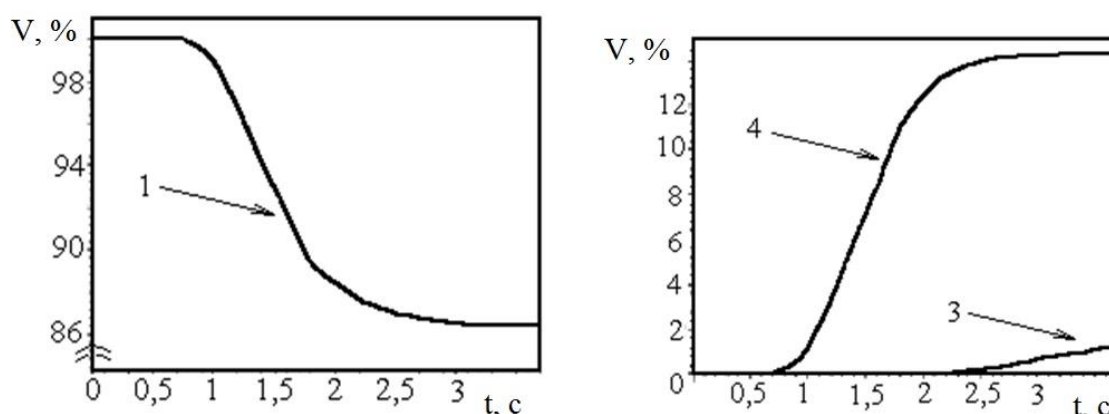


1 – аустенит; 2 – мартенсит; 3 – бейнит; 4 – феррит

Рисунок 5.17 – Изменение структурного состава во времени на расстоянии 2 мм от поверхности

На глубине 2 мм с уменьшением времени прерывистой закалки количество образовавшегося мартенсита снижается от 60 до 40 %. На первой секунде охлаждения при всех вариантах упрочнения наблюдается появление 0,6 % бейнита и ~ 4 % ферритной составляющей.

В слое на глубине свыше 4 мм образования структур по сдвиговому механизму не наблюдается. Распад аустенита начинается только во 2-й секции, мартенситная составляющая в структуре отсутствует, содержание феррита равно 14 %, бейнита ~3 %.



1 – аустенит; 2 – мартенсит; 3 – бейнит; 4 – феррит

Рисунок 5.18 – Изменение структурного состава во времени на расстоянии 4 мм от поверхности

На расстоянии от поверхности 10 мм наблюдается диффузионное $\gamma \rightarrow \alpha$ превращение. На момент выхода из УТУ при любом времени ускоренного охлаждения наблюдается распад 99,8 % аустенита. Из этих зависимостей следует, что за время прохода секции (для скорости прокатки 6 м/с – 3,7 с, 8 м/с – 2,8 с и 10 м/с – 2,2 с) фазовых превращений в поверхностном слое кроме мартенситных не происходит. Состав основных структурных составляющих в сечении стержня при других вариантах прерывистой закалки приведен в таблице 5.5.

Математическое моделирование процесса структурообразования при распаде аустенита в процессе прерывистой закалки позволяет прогнозировать условия получения сложных градиентных структурно-фазовых состояний арматурных стержней диаметром 40 мм, соответствующего класса прочности, термически упрочненных в потоке стана.

Таблица 5.5 – Структурный состав в сечении стержня

V, м/с	r, мм	мартенсит, %	аустенит, %	феррит, %
6	0,5	94	6	-
	2	66,5	30	3,5

	4	-	86	14
	6	-	80	20
	8	-	95	5
8	0,5	90	10	-
	2	56	41	3
	4	-	86	14
	6	-	80	20
	8	-	95	5
10	0,5	85	15	-
	2	40	56	4
	4	-	86	14
	6	-	85	15
	8	-	98	2

Выводы по главе

1. Разработана математическая модель расчета температурного поля и фазового состава арматурных стержней при прерывистой закалке. С использованием численных методов было найдено решение тепловой краевой задачи в осесимметричном случае, учитывающее разрывность граничных условий.
2. Предложена математическая модель расчета распределения температурных полей при прерывистом охлаждении двутавровой балки. Прокат, имеющий скорость от 4 до 6 м/с, после прокатного нагрева с температурой ~ 1000 °С попадает в установку ускоренного струйного избирательного охлаждения по периметру проката. Сложная физическая картина натекания струй воды на горячий прокат параметризуется коэффициентом теплопередачи.
3. Найдено значение коэффициента теплопередачи из сравнения установившейся температуры проката и экспериментально измеренной температурой. Из численного решения краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности были найдены

распределения температур по сечению и получены зависимости температуры от времени в точках полки балки. Эти зависимости являются основой для прогнозирования структурно-фазовых превращений при термомеханическом упрочнении.

4. Предложен механизм ускоренного охлаждения проката, заключающийся в прохождении капель жидкости, образовавшихся вследствие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, через паровую пленку. Капли, попадая на прокат, возбуждают термоупругую волну, которая, распространяясь его сечению, способствует протеканию структурно-фазовых превращений.
5. Для математического моделирования процессов $\gamma \rightarrow \alpha$ превращения использовались расчетные диаграммы изотермического распада аустенита в виде аналитических зависимостей “время-температура превращения” для различных фазовых составляющих.
6. Согласно схеме, основанной на интеграле Штейнберга-Шейля, разработан алгоритм определения фазового состава стали 18Г2С при неизотермическом $\gamma \rightarrow \alpha$ превращении.

ГЛАВА 6. ФИЗИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ И МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЭЛЕКТРОДУГОВОЙ НАПЛАВКЕ

6.1 Моделирование течения в системе «электрод - плазменная струя – подложка»

Результаты, представленные в настоящей главе опубликованы в [228 – 231].

Изучение магнитогидродинамических течений в плазме целесообразно начать с расчета электромагнитной силы. Для ее расчета используется уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\sigma \nabla V + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \sigma \nabla V = 0, \\ \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Где V – скалярный и \vec{A} – векторный потенциал. Для моделирования течения и распределения температур жидкости и плазмы используется модель, основанная на уравнениях Навье-Стокса и теплопроводности:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{u} + \vec{F}_V, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \\ \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + S_V \end{aligned} \quad (6.2)$$

где \vec{u} – вектор скорости; p – давление; ρ – плотность; μ – динамическая вязкость; \vec{F}_V – объемные силы, которые задаются суммой силы Лоренца и силы тяжести; T – температура; C_p – удельная теплоемкость; k – коэффициент теплопроводности; S_V – объемные источники тепла. Для катода и анода объемным источником тепла является только эффект

Джоуля $S_V = \vec{j} \cdot \vec{E}$, для плазмы мы имеем дополнительно нагрев от электронной энthalпии и потери от радиационного излучения.

Зададим граничные условия для (6.1), (6.2). Рассмотрим цилиндрический электрод, один из концов которого имеет форму полусферы, другой электрод будем считать плоским (рисунок 6.1).

На границе GD (плазма/анод) тепловой поток для анода задается суммой нагрева от плазмы, нагрева от конденсации электронов $|\vec{j} \cdot \vec{n}| \varphi_a$ (где φ_a работа выхода электронов анода) и радиационных потерь $\varepsilon \sigma_B T^4$ (где ε – излучательная способность анода; σ_B – константа Стефана-Больцмана). На границе EB (плазма/катод) вклад в тепловой поток вносят нагрев от плазмы, ионный нагрев $j_i V_i$, радиационные потери $\varepsilon \sigma_B T^4$ и термоионное охлаждение $j_e \varphi_c$ (энергия, требуемая для эмиссии электронов с катода, которая задается произведением плотности тока электронов и работы выхода материала катода). Граничные условия для уравнений магнитной гидродинамики и Максвелла приведены в таблице 6.1.

Свойства материала принятые для расчетов приведены в таблице 6.2. Кинетические параметры плазмы (теплоемкость, теплопроводность, вязкость, электропроводность) зависели от температуры и задавались в табличном виде. Система (6.1), (6.2) с учетом граничных условий решалась в пакете Comsol MultiPhysics для случая отсутствия диафрагмы и при ее наличии. Катод представляет собой цилиндр, ограниченный полусферой такого же радиуса, радиус равен 0,8 мм, анод представляет собой в первом случае плоскость, а во втором плоскость с отверстием радиусом 2 мм.

Таблица 6.1. – Граничные условия

Граница	AB	BC, CD	DE	EF	AE, FG	EG
T, q	$-\vec{n} \cdot \vec{q} = 0$	T_0	T_0	T_0	$\vec{n} \cdot \vec{q} = 0$	$\vec{n} \cdot \vec{q} = 0$
$(u, v, w), p$	–	$p = p_0$	–	–	–	$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$
(V, \vec{A})	$\vec{j} \cdot \vec{n} = \frac{I_c}{\pi R_c^2}$	$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$ $\vec{A} \times \vec{n} = 0$	$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$ $\vec{A} \times \vec{n} = 0$	$V = 0$ $\vec{A} \times \vec{n} = 0$	$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$ $\vec{B} = 0$	$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$ $\vec{B} = 0$

Таблица 6.2. – Свойства электрода, плазмы и подложки

Символ	Название	Значение
ρ_m	Плотность анода и катода	7500 кг/м ³
C_m	Удельная теплоемкость металла	602 Дж/(кг·К)
k_m	Теплопроводность	26 Вт/(м·К)
σ_m	Электропроводность	7.7×10^5 1/(Ом·м)
φ_c	Работа выхода материала катода	4,52 эВ
V_i	Потенциал ионизации	15,68 В
φ_a	Работа выхода материала анода	4,65 эВ
ε	Излучательная способность поверхности	0,9

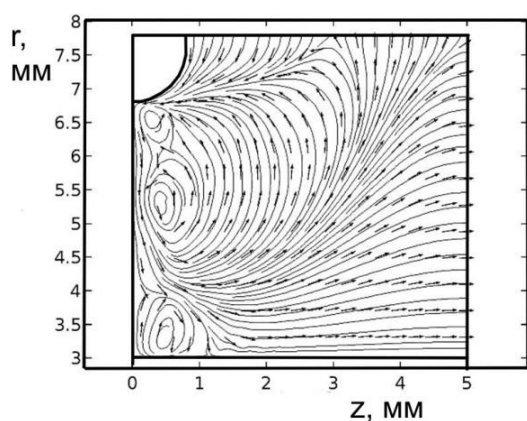


Рисунок 6.1 – Геометрия в системе электрод-дуга- подложка

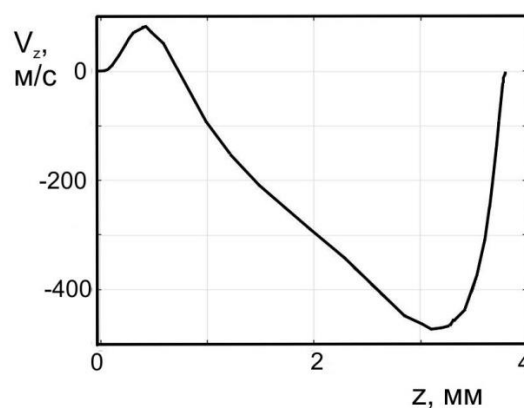
Расстояние от катода до анода (EG) составляет 3,8 мм. На катоде задавалась плотность тока, таким образом, чтобы суммарный ток был равен 100А. На аноде принималось, что потенциал равен нулю. Начальные условия соответствуют покоящемуся газу и материалу электродов. Температура в начальный момент времени для всей области постоянна и равна 300 К. Начальная плотность выбиралась для каждой области постоянной: для катода и анода – плотность стали, для межэлектродного промежутка плотность воздуха. Шаг по пространственной координате составлял 0,1 мм. Шаг по времени выбирался автоматически исходя из условия Куранта.

При отсутствии диафрагмы в моменты времени до 1 мс течение в плазменной струе является нестационарным. От катода к аноду распространяется температурная волна и в области течения формируются три вихревые зоны (рисунок 6.2, а). Одна – в непосредственной близости катода и оси симметрии, обусловлена встречными струями. Эти струи

возникают за счет действия радиальной составляющей электромагнитной силы, направленной к оси. Вблизи оси симметрии примерно на середине расстояния между катодом и анодом расположена вторая вихревая зона. Взаимодействие этих зон приводит в последующие моменты времени к формированию одной устойчивой вихревой зоны, расположенной на расстоянии двух радиусов от оси. Третья вихревая зона формируется вблизи анода на момент времени 0,1 мкс и существует всё время расчета. Таким образом, плазма переходит из существенно нестационарного состояния в квазистационарное. Оно индуцировано вязкими и электродинамическими силами. Течение имеет сложную структуру и включает области: вблизи электрода, приосевое течение с ударным переходом, две вихревые зоны. Распределение скорости на оси показано на рисунке 6.2, б, из которого следует, что скорость плазмы дуги, начиная с нулевой скорости (E – поверхность катода) достигает максимума ~ 500 м/с на расстоянии 1 мм от поверхности катода, а затем падает до нуля и меняет знак. Аналитические модели или численные расчеты с крупным пространственным шагом не позволяют выявить указанные особенности.



(а)



(б)

а – линии тока в момент времени 1,1 мкс; б – зависимость осевой скорости вдоль оси симметрии GE

Рисунок 6.2 – Поле скоростей

Анализ гидродинамической ситуации выявил два важных результата. Образование первого вихря вблизи катода и его существование 1 мкс создает благоприятную ситуацию для формирования мелких частиц из расплавленного материала порядка 100 нм. Второе - вихревая зона вблизи анода создает противоток плазмы, который не позволяет мелким частицам достичь поверхности анода и участвовать в формировании покрытия. Поэтому нами предлагается использовать анод с отверстием. Расчеты, с отверстием представлены на рисунке 6.3, из которых видно, что вихревые зоны не образуются.

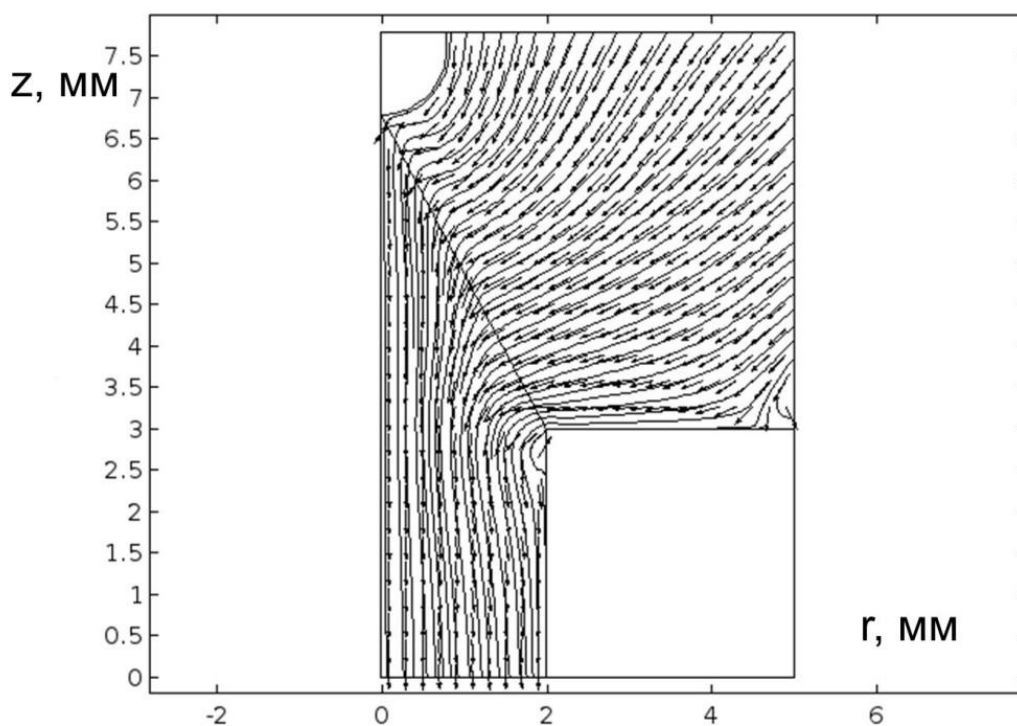


Рисунок 6.3 – Поле скоростей в диафрагмированном канале

Таким образом, в настоящем подразделе предложена математическая модель гидродинамического течения в плазме при электродуговой наплавке. Показано, что на малых временах $t < 1$ мкс образуются три вихревые зоны. Образование первой вихревой зоны, и ее существование ~ 1 мкс, создают условия для образования мелких частиц. Однако, наличие противотока плазмы вблизи анода не позволяет им попасть на поверхность

модифицируемого материала. Наличие диафрагмы в электроде приводит к тому, что вихревые зоны не образуются и поэтому мелкие частицы могут консолидироваться.

6.2 Модель формирования капель микро- и нанометрового диапазона

Проведем теоретическое исследование динамики течения расплавленного материала сварочного электрода на начальных этапах образования капли. Для этого воспользуемся уравнениями Навье-Стокса, Максвелла и конвективной теплопроводности. Аналитический вид этих уравнений для рассматриваемого случая приведен в параграфе 6.1 и работе [232], поэтому записывать их не будем. Граничные условия для этих уравнений представлены на рисунке 6.4.

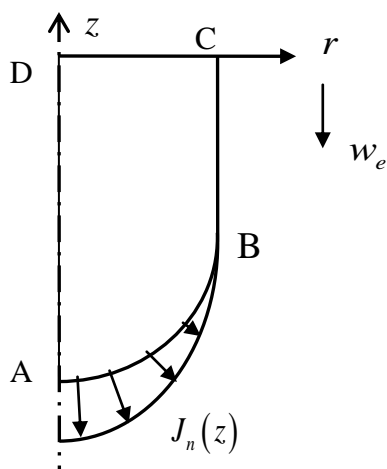


Рисунок 6.4 – Расчетная схема

Будем решать осесимметричную задачу с осью симметрии AD в центре электрода. На границе CD зададим напряжение и скорость движения электрода:

$$V = U_0, w = w_e \quad (6.3)$$

Граница АВ является активной поверхностью, принимающей тепловое воздействие плазменной струи. Непосредственно течение

плазменной струи в данной постановке не моделируется, поэтому ее воздействие на электрод будем моделировать через постановку соответствующих граничных условий. Плотность электрического тока на поверхности аппроксимируем функцией, линейно зависящей от координаты z [233]:

$$\vec{J}_n = \frac{I_0 z}{\int z dA} \quad (6.4)$$

где I_0 – сварочный ток, dA – малая площадка на поверхности электрода. Таким образом, весь ток распределяется по активной поверхности AB электрода как показано на рисунке 6.4. Аналогичным образом зададим тепловой поток:

$$q_n(z) = \frac{\eta U_0 I_0 z'}{\iint z' dA} \quad (6.5)$$

где U_0 – напряжение дуги, η – коэффициент эффективности теплопередачи от струи плазмы к расплаву электрода, $z' = z + \Delta z$ – вертикальное расстояние, смещенное относительно z на Δz . Смещение Δz позволяет учесть тепловой поток на поверхности BC . В настоящей работе $\Delta z = d_e / 4$. В таблице 1 приведены входные параметры задачи. Проведены расчеты методом конечных элементов с использованием модели движущейся расчетной сетки. На рисунках 6.5 и 6.6 представлены результаты расчетов полей скоростей в режимах 1 и 2 в различные моменты времени. В начальные моменты времени вне зависимости от величины тока наблюдается плавление поверхностного слоя. Затем, под действием электромагнитных сил происходит вытягивание металла в центр капли. Вблизи электрода формируется вихревая зона. Это отмечалось ранее другими исследователями. На основании этого все модели формирования капли при плазменных технологиях базируются на подходе Релея: формирование жидкого растущего практически

самоподобного слоя с последующим его отрывом в виде цилиндра и рассмотрение неустойчивости его поверхности.

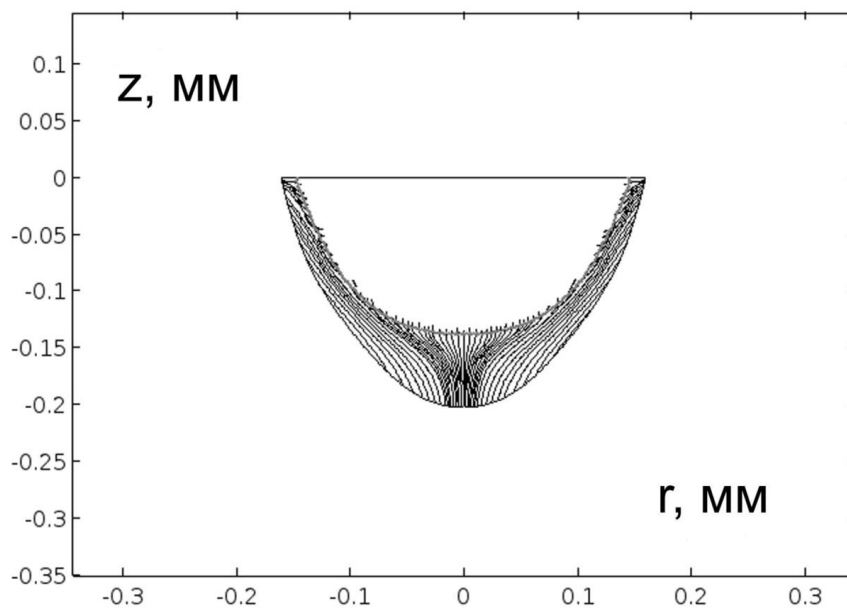
Эти механизмы реализуются на практике даже при импульсно-периодических подводах энергии, когда период больше 100 мкс.

Таблица 6.3 – Входные параметры задачи и характеристики материала

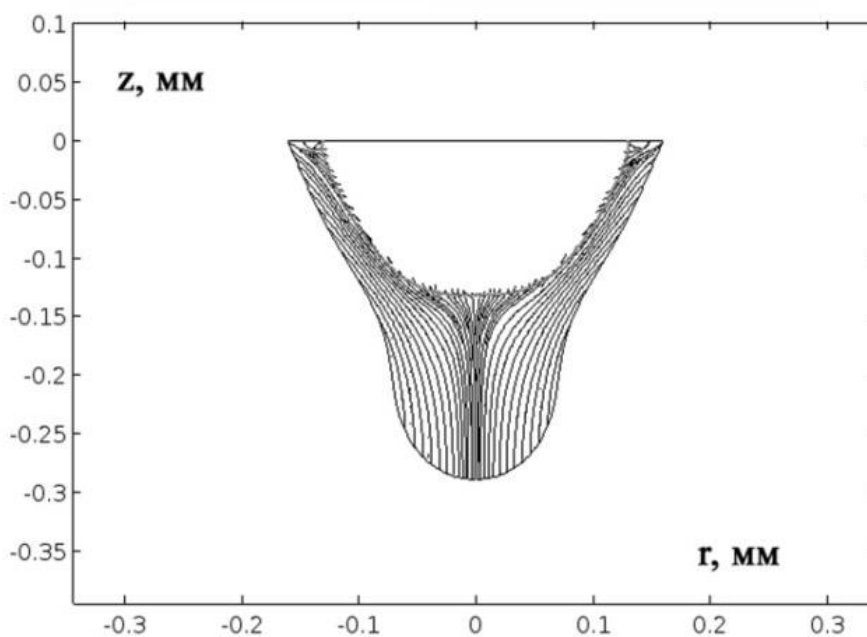
Обозначение	Описание	Значение (Режим 1)	Значение (Режим 2)
U_0	Напряжение	22 В	22 В
I_0	Сила тока	200 А	300 А
d_e	Диаметр электрода	0,32 мм	0,32 мм
T_l	Температура жидкой фазы	1723 К	1723 К
ρ_s	Плотность твердой фазы	7500 кг·м ⁻³	7500 кг·м ⁻³
ρ_l	Плотность жидкой фазы	6350 кг·м ⁻³	6350 кг·м ⁻³
C_{pl}	Коэффициент теплоемкости жидкой фазы	720 Дж кг ⁻¹ К ⁻¹	720 Дж кг ⁻¹ К ⁻¹
C_{ps}	Коэффициент теплоемкости твердой фазы	602 Дж кг ⁻¹ К ⁻¹	602 Дж кг ⁻¹ К ⁻¹
k_l	Коэффициент теплопроводности	20 Вт м ⁻¹ К ⁻¹	20 Вт м ⁻¹ К ⁻¹
k_s	Коэффициент теплопроводности	26 Вт м ⁻¹ К ⁻¹	26 Вт м ⁻¹ К ⁻¹
σ	Электропроводность металла	7,7 · 10 ⁵ См/м	7,7 · 10 ⁵ См/м
μ	Коэффициент динамической вязкости	0,05 Па·с	0,05 Па·с
L_f	Теплота плавления	247 · 10 ³ Дж/кг	247 · 10 ³ Дж/кг

За это время успевают затухнуть неустойчивости на границе плазма – жидкая капля, поэтому размеры капли не могут достигать диапазона 0,1 –

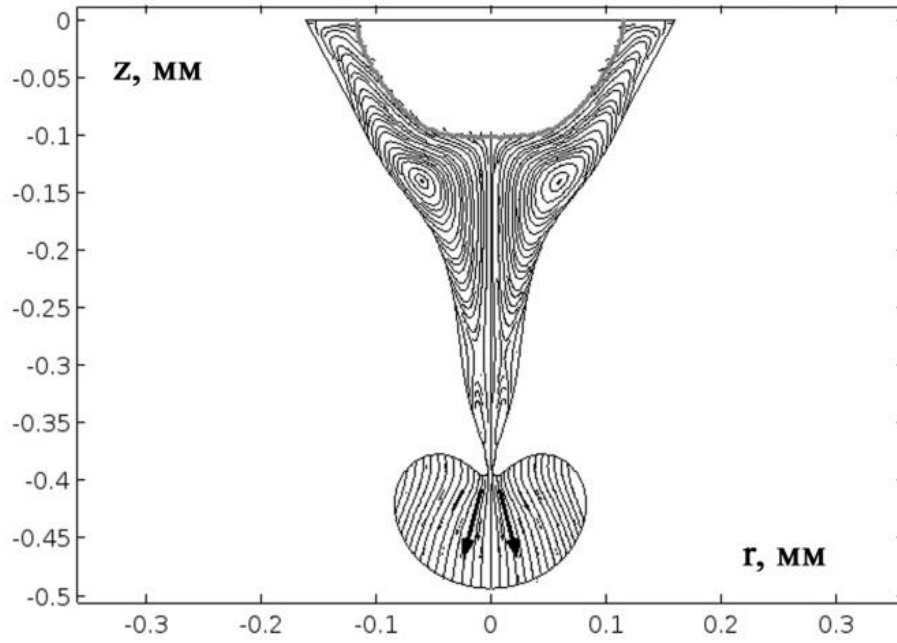
10 мкм. Отличие режима 1 от режима 2 заключается в том, что в нем не происходит перехода к струйному режиму. Переход к струйному режиму, согласно [113], осуществляется при критическом значении тока $I = 2\pi (\gamma D/\mu_0)^{1/2}$, где D – диаметр электрода, γ – коэффициент поверхностного натяжения, $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6}$ Гн/м, Для $\gamma = 1.1$ Н/м получим 234 А.



а)



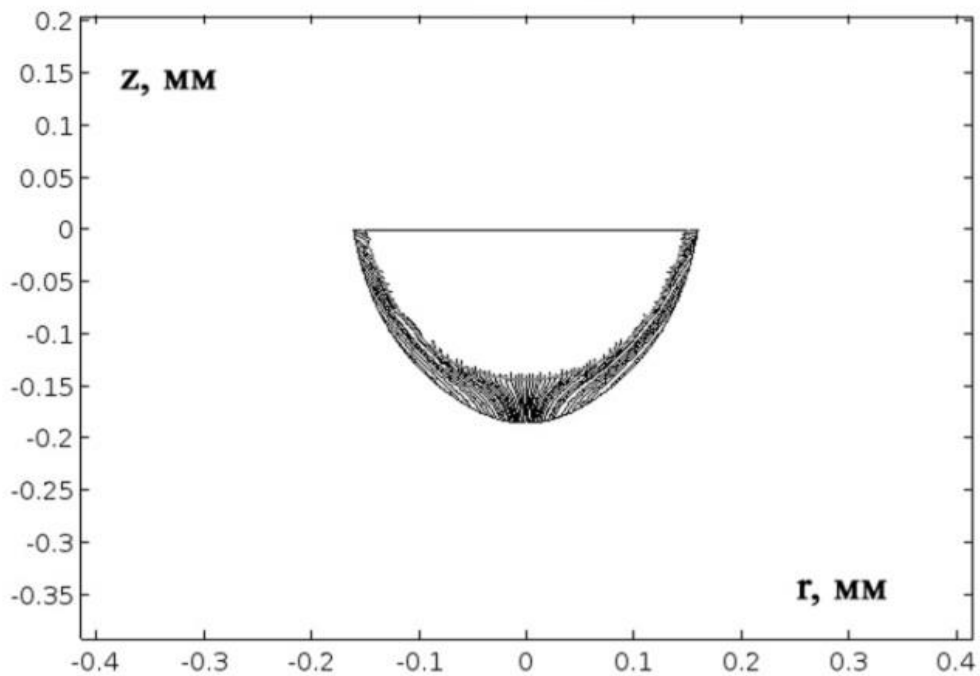
б)



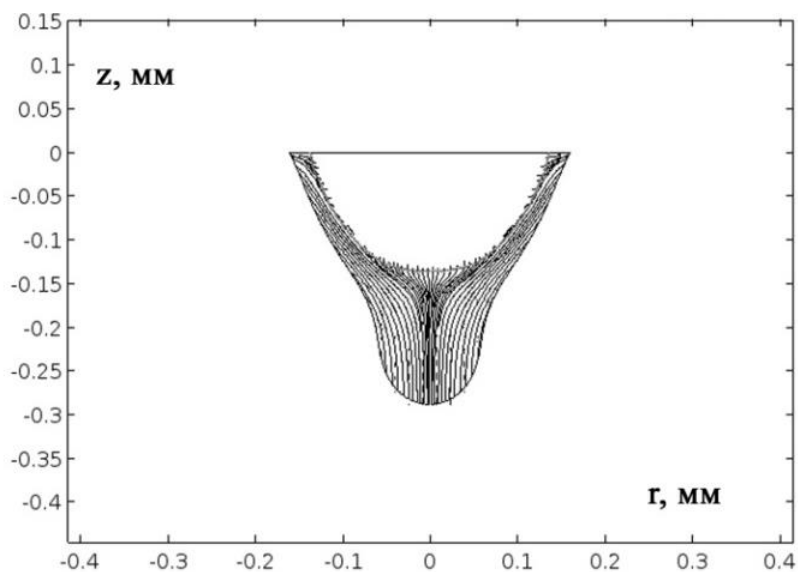
в)

а – 58 мкс; б – 98 мкс; в – 151 мкс

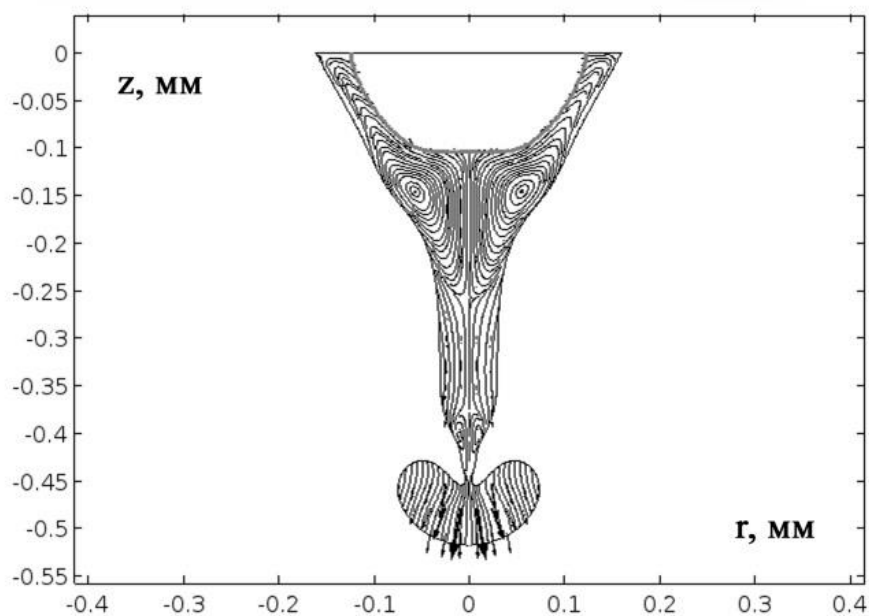
Рисунок 6.5 – Линии тока расплава в различные моменты времени
в режиме 1



а)



б)



в)

а – 31 мкс; б – 59 мкс; в – 91 мкс

Рисунок 6.6 – Линии тока расплава в различные моменты времени
в режиме 2

Сформировавшаяся струя становится неустойчивой, что приводит к образованию вторичных капель. На рисунке 6.7 показаны графики изменения площади расплавленного слоя. Из данных графиков следует, что в режимах 1 и 2 скорость увеличения площади описывается

уравнением $S = \left(\frac{dS}{dt}\right)t + C$, где C – константа, с коэффициентом

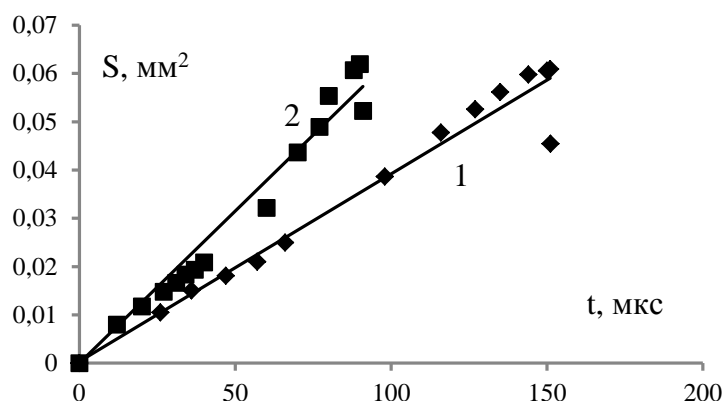
корреляции 0,95. В режиме 1 скорость возрастания площади расплава

$\frac{dS}{dt} = 3,89 \cdot 10^{-4}$ мм²/мкс, соответственно убыль массы электрода

$\frac{dm}{dt} = \rho D \frac{dS}{dt} = 0,7904$ мкг/мкс. В режиме 2 – $\frac{dS}{dt} = 6,73 \cdot 10^{-4}$ мм²/мкс, а

$\frac{dm}{dt} = \rho D \frac{dS}{dt} = 1,3675$ мкг/мкс, то есть убыль массы электрода в режиме 2 в

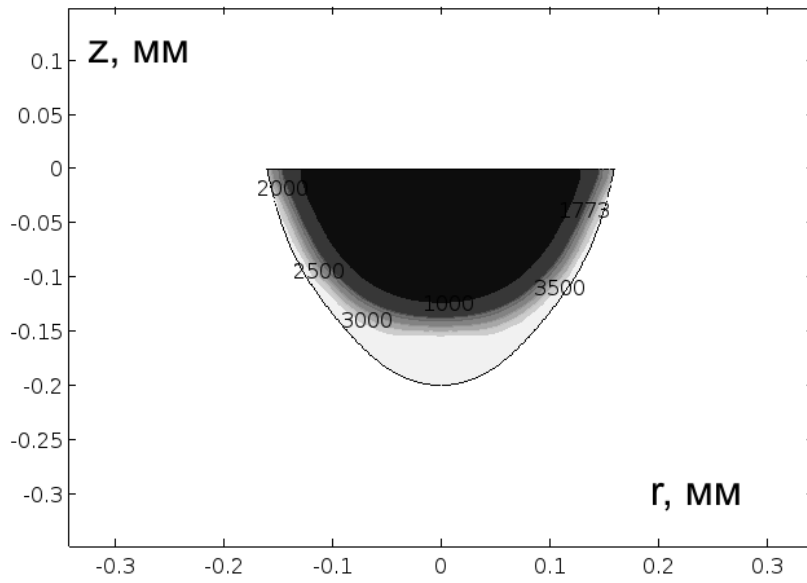
два раза больше чем в режиме 1.



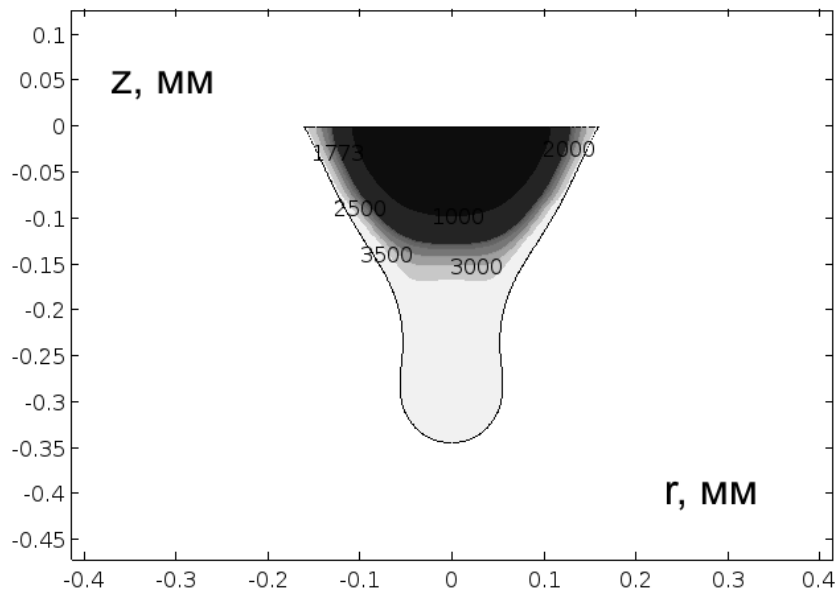
1 – режим 1; 2 – режим 2

Рисунок 6.7 – Зависимость площади расплавленной поверхности от времени

Распределение температур представлено на рисунках 6.8 и 6.9. Из данного рисунка следует, что вне зависимости от режимов наплавки в расплавленном слое наблюдается градиент температуры. Наиболее высокая температура 3500 К наблюдается на границе «расплав/плазма», а наименьшая 1773 К на границе «твердое тело/расплав».



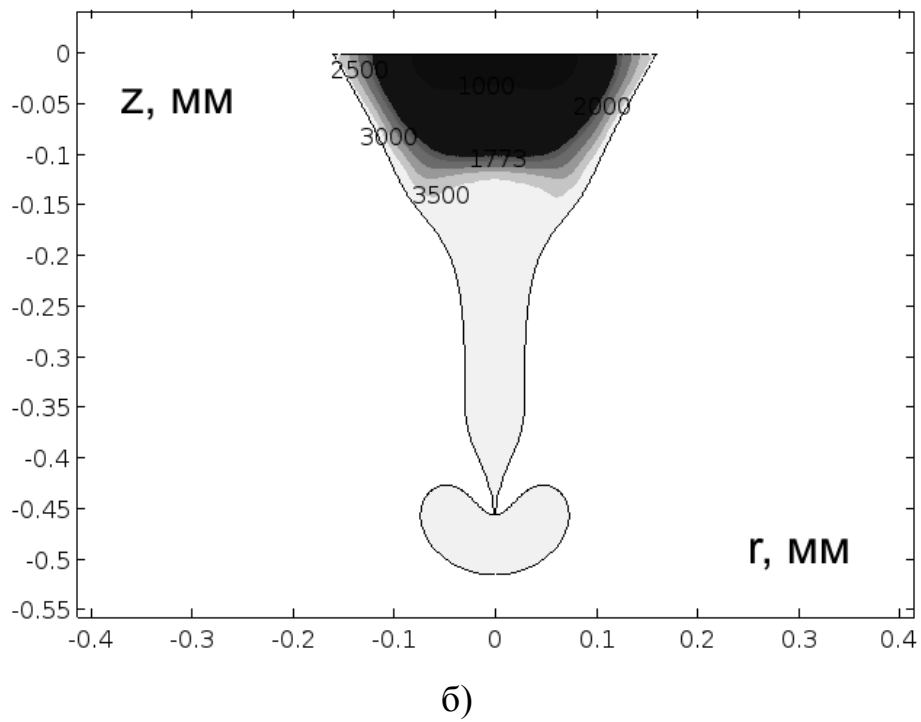
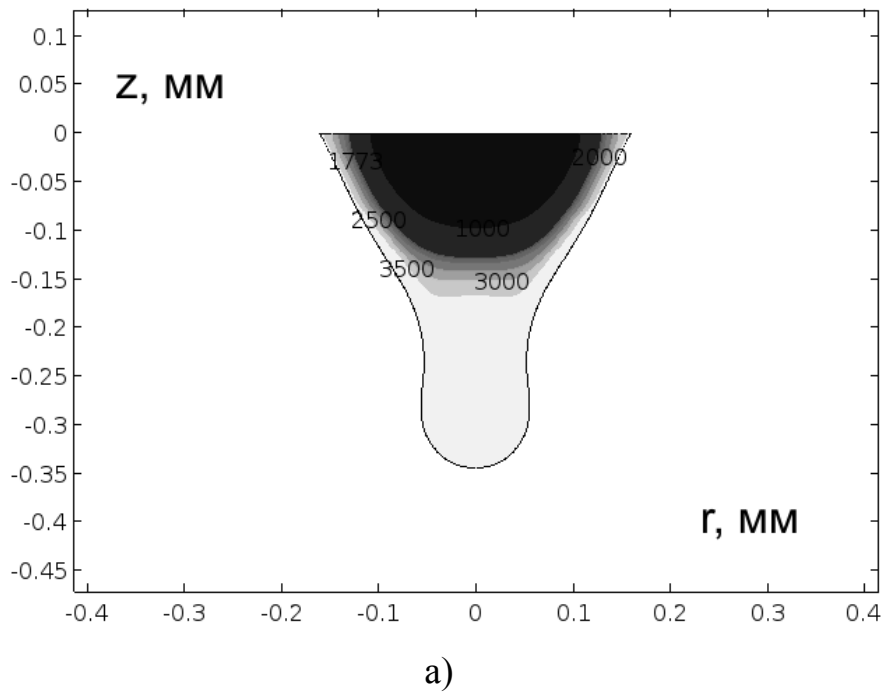
а)



б)

а) 56 мкс; б) 144 мкс

Рисунок 6.8 – Распределение температур в разные моменты времени
(Режим 1)



а – 69 мкс; б – 91 мкс

Рисунок 6.9 – Распределение температур в разные моменты времени
(Режим 2)

Наличие этого градиента является одной из причин неустойчивости течения расплавленного материала. Анализ распределения температур в расплаве показывает, что с течением времени изотермы 3000 К, 2500 К и другие имеют выпуклость в сторону электрода (рисунок 6.7). Такая форма изотерм свидетельствует о формировании вихревой структуры (рисунок 6.5). Эта вихревая структура приводит к образованию новой капли расплава. С другой стороны, электромагнитные силы приводят к образованию перемычки и отрыву капли. Рассмотрим этот механизм подробнее.

Запишем уравнения Навье-Стокса и Максвелла в цилиндрических координатах [115]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{j_z B}{\rho} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{j_r B}{\rho} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$j_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad j_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = -\mu_0 j_r, \quad \frac{\partial B}{\partial r} = \mu_0 j_z$$

где u , w – компоненты вектора скорости вдоль соответственно r и z .

Граничные условия для уравнений (6.4) имеют вид:

$$u_r(r, z, t) \Big|_{r=R} = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad -p(r, z, t) + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=r(z, t)} = -\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (6.5)$$

$$I = \int_0^R J_z 2\pi r dr.$$

Где γ – коэффициент поверхностного натяжения, R_1 , R_2 , – радиусы кривизны, для которых в линейном приближении можно записать

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}, \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 r(z, t)}{\partial z^2}. \quad (6.6)$$

Динамическое условие для касательной компоненты напряжений

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (6.7)$$

В отличие от [115] пренебрегаем напряжением от наведенных на поверхности зарядов, считая их малыми величинами более высокого порядка. Рассматриваемая ситуация такова, что равновесный радиус (R) слегка возмущен так, что поверхностный профиль (R) становится функцией

$$r(z, t) = R + \alpha \exp(\omega t + ikz), \alpha \ll R \quad (6.8)$$

Рассмотрим возмущенное решение в виде нормальных волн

$$\begin{aligned} p(r, z, t) &= P_0(r) + \varepsilon P(r) \exp(\omega t + ikz), \varphi(r, z, t) = J_0 z + \varepsilon \Phi(r) \exp(\omega t + ikz), \\ u(r, z, t) &= \varepsilon U(r) \exp(\omega t + ikz), w(r, z, t) = \varepsilon W(r) \exp(\omega t + ikz), \\ B(r, z, t) &= B_0(r) + \varepsilon b(r) \exp(\omega t + ikz). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставим (6.9) в (6.4) при $v = 0$. Сгруппируем слагаемые при единице и после чего получим систему в нулевом или стационарном состоянии. Стационарное состояние, удовлетворяющее граничным условиям $B_0(0)=0$, $P_0(R)=\gamma/R$, задается формулами

$$u = w = 0, P_0(r) = \gamma / R + \mu_0 J_0^2 (R^2 - r^2) / 4, B_0(r) = \mu_0 J_0 r / 2. \quad (6.10)$$

В первом приближении получаем систему

$$\begin{aligned} \rho \omega U + P' + ik \Phi B_0 + J_0 b &= 0, \rho \omega W + ikP - \Phi' B_0 = 0, \\ U' + U / r + ikW &= 0, r \Phi'' + \Phi' - k^2 r \Phi = 0; b = -ik \mu_0 \Phi'. \end{aligned} \quad (6.11)$$

После преобразований системы уравнений (6.11) получаем основное уравнение линейного приближения

$$\begin{aligned} r^2 U'' + r U' - (1 + k^2 r^2) U - i \mu_0 J_0 k r^2 \Phi' / \rho \omega &= 0, \\ r \Phi'' + \Phi' - k^2 r \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Граничные условия после линеаризации примут вид

$$\begin{aligned} -\Phi'(R) + \alpha ikJ_0 = 0, U(R) = i\omega\alpha, \\ \mu_0 J_0^2 \alpha R / 2 - P(R) + 2\rho\nu U' = \gamma\alpha(1/R^2 - k^2) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Где $P(R)$ – давление выражается по формуле

$$P(R) = \alpha R \mu_0 J_0^2 \left(1 + \frac{I_0(x)}{xI_1(x)} - \frac{x}{2} \left(\frac{I_0(x)}{I_1(x)} \right)^2 \right) + \alpha R \rho \omega^2 \frac{I_0(x)}{xI_1(x)}; x = kR. \quad (6.14)$$

Решение второго уравнения (6.12) с граничными условиями (6.13) имеет вид

$$\Phi(r) = i\alpha J_0 \frac{I_0(kr)}{I_1(kR)}. \quad (6.15)$$

Решение первого уравнения (6.12) с граничными условиями (6.13) с учетом (6.15) можно записать

$$U(r) = \frac{\alpha \mu_0 x J_0^2}{2\rho \omega I_1^2(x)} (I_0(x)I_1(kr) - I_1(x)I_0(kr)r/R) + \frac{\alpha \omega I_1(kr)}{I_1(x)}. \quad (6.16)$$

Подстановка (6.14, 6.16) в третье уравнение (6.13) дает дисперсионное уравнение. При $\nu=0$ это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \Omega = \sqrt{\Psi(x, \beta)}; \\ \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{\theta_\gamma}}, \Psi(x, \beta) = \beta G(x) + F(x), \beta = \frac{\theta_\gamma}{\theta_J}, \theta_\gamma = \frac{\gamma}{\rho R^3}, \theta_J = \frac{\mu_0 J_0^2}{\rho}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$G(x) = \frac{I_1(x)}{I_0(x)} x(1-x^2), F(x) = 1 + \frac{x}{2} \left(\frac{I_1(x)}{I_0(x)} - \frac{I_0(x)}{I_1(x)} \right).$$

При $\nu \neq 0$ получаем дисперсионное уравнение для жидкости, вязкость для которой учитывается только на границе.

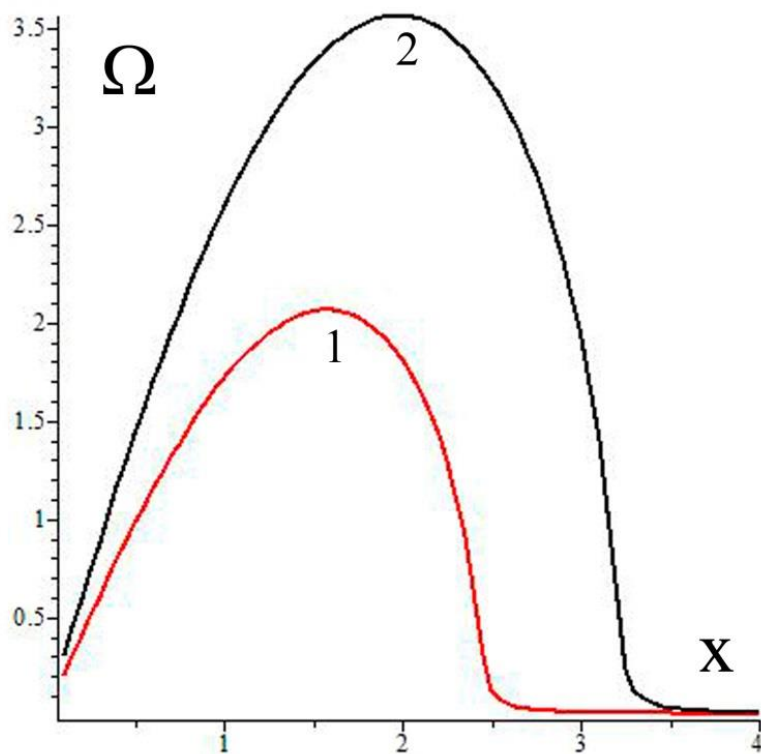
$$\begin{aligned} \Omega^3 - \Omega \Psi(x, \beta) + \varepsilon (\Omega^2 E(x) - x^2 F(x)) = 0; \\ \varepsilon = \frac{\theta_\nu}{\sqrt{\theta_J}}, \theta_\nu = \frac{\nu}{R^2}; E(x) = x \left(x - \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Уравнение (6.18) было получено в работе [223].

Ещё, не используя численный анализ полученного уравнения, можно говорить, что вязкость увеличивает диапазон неустойчивости. Действительно, в отсутствие вязкости, положительные действительные значения Ω возможны при таких x , для которых $\Psi(x, \beta) > 0$. То есть x (безразмерное волновое число) изменяется в пределах от нуля до x_0 , где x_0 удовлетворяет уравнению $\Psi(x_0, \beta) = 0$. Для вязкого случая выражение $\sqrt{\Psi(x, \beta)}$ комплексное при $x > x_0$, не дает вклад в инкремент, но зато второе слагаемое в (6.19) при его положительности определяет инкремент при $x > x_0$. Такое увеличение диапазона нами было обнаружено при анализе неустойчивости Кельвина – Гельмгольца для вязкой жидкости [50]. Результаты численных расчетов, проведенных для режимов 1 и 2, при значении поверхностного натяжения $\gamma = 1,1$ Н/м, показаны на рисунке 6.8. при этом $\theta_\nu = 307,58 \text{ с}^{-1}$, $\theta_\gamma = 4,22 \cdot 10^7 \text{ с}^{-2}$, $\theta_J = 1,22 \cdot 10^9 \text{ с}^{-2}$ в режиме 1 и $\theta_J = 2,75 \cdot 10^9 \text{ с}^{-2}$. Из данного рисунка следует, что критическое значение безразмерного волнового числа для режима 1 составляет 1,6, а для режима 2 – 1,95. В размерных переменных $k_m = 10^4 \text{ м}^{-1}$, а длина волны $\lambda_m = 0,628$ мм (режим 1). В режиме 2 – $k_m = 12187,5 \text{ м}^{-1}$, и $\lambda_m = 0,515$ мм. Следовательно, возникающие капли должны иметь размер порядка этой длины волны. Для того, чтобы значения критической длины волны попадали в нано диапазон необходимы значения тока порядка 1 МА. Это очень большая величина. Поэтому необходимо учесть протекание тока через поверхность струи и зависимость ее эффективного радиуса от величины тока [235]. Согласно [235], эффективный радиус струи с током определяется как $R_{eff} = 4\pi^2 R^2 \gamma / \mu_0 I^2$, а критическая длина волны, при

которой начинается ее распад: $\lambda_c = \frac{2\pi R_{eff}}{\left(1 + \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 R_{eff} \gamma}\right)}$. Для режимов 1 и 2 – 16,5

мкм; 739 нм и 9,83 мкм; 116 нм. Таким образом учет зависимости эффективного радиуса от величины силы тока показывает, что значения силы тока порядка 100 А допускают наноразмерный диапазон критических длин волн.



1 – режим 1; 2 – режим 2

Рисунок 6.10 – Зависимость безразмерного инкремента от безразмерного волнового числа

6.3 Моделирование конвективных процессов в ванне расплава

Как уже указывалось выше (см. Введение), в сварочной ванне происходит сложный комплекс явлений, включающий в себя нагрев и расплавление подложки, конвективные течения в расплавленном слое, растворение легирующих элементов, кристаллизация с последующим образованием ячеистой и дендритной структуры и т.д. Остановимся подробнее на анализе конвективных течений в расплавленном слое. От их

протекания будет зависеть качество наплавленного слоя. На геометрию сварочной ванны, как показывает работа [109], существенное влияние оказывает градиент поверхностного натяжения, тогда как другие факторы, такие как магнитная проницаемость, коэффициент теплового расширения материала дают меньший вклад. В [236] проведено численное моделирование влияния эффекта Марангони на параметры различных металлов при электродуговой сварке в замкнутом объеме. В результате были установлены, диапазоны силы тока, при которых термокапиллярная конвекция играет доминирующую роль. Дальнейшее увеличение силы тока не приводит к увеличению глубины проплавления изделия, следовательно, линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения чистых жидких металлов от температуры ухудшает проплавляющую способность электрической дуги. В [237] показано, что для чистых металлов термокапиллярная конвекция играет существенную роль только на начальных стадиях плавления материалов, а затем источником конвективных течений становится деформация жидкости под действием силы тяжести. С другой стороны, исследование воздействия концентрированных потоков энергии на металлы показывает, что при больших значениях плотности мощности термогравитационная конвекция незначительна [238]. Также необходимо учитывать влияние легирующих элементов [239]. В [239] исследовано влияние этих элементов на поверхностное натяжение жидкого железа. Показано, что добавление серы приводит к тому, что поверхностное натяжение сначала увеличивается с ростом температуры, а затем уменьшается, то есть имеет место нелинейная зависимость от температуры. Если ввести серу непосредственно в ванну расплава, то это приводит к увеличению поверхностного натяжения, соответственно картина вихревых течений существенно изменится. Вещество, вовлеченное в вихревое течение, будет приходить в середину, а

затем движется вниз к нижней части сварочной ванны. Нисходящий поток горячего металла в центре шва бассейн работает как тепловое сверло. Следовательно, глубина проплавления увеличивается, и геометрия ванны изменяется. В [240] предложена математическая модель воздействия импульсного лазерного излучения, учитывающая зависимость поверхностного натяжения от наличия поверхностно-активного вещества в расплаве. Результаты численного моделирования показали, что при наличии поверхностно-активного вещества формируется многовихревая структура течений, которая способствует более однородному распределению легирующей добавки.

Таким образом, при создании модели конвективных течений в ванне расплава необходимо учитывать влияние легирующих элементов на гидродинамическое течение. Это является актуальным для исследования конвективных процессов в ванне расплава при наплавке порошковыми проволоками. Влияние легирующих элементов моделируется зависимостью коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Легирующие элементы, которые входят в состав порошка, изменяют характер этой зависимости, что в итоге приводит к смене картины конвективного течения, что в свою очередь отражается на структурно-фазовом состоянии наплавленного металла. Поэтому целью данного параграфа является создание математической модели конвективных течений, которая учитывает наличие данных элементов.

Моделирование конвективных течений целесообразней начать с определения объемных сил, действующих на жидкость, а также с расчета электромагнитных полей. Объемная сила, действующая на жидкость, включает в себя гравитационную и электромагнитную силы:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{j} \times \vec{B} = \rho_0 \vec{g} - \rho_0 \vec{g} \beta (T - T_{ref}) + \vec{j} \times \vec{B} \quad (6.20)$$

Электромагнитные поля и конвективные течения будем рассчитывать по формулам (6.1) и (6.2). Для катода и анода объемным источником тепла является только эффект Джоуля. Будем рассматривать воздействие плазмы электрической дуги на пластину из стали (рисунок 6.11). На верхней поверхности АВ будем задавать плотность тока, давление и тепловой поток, которые являются результатом воздействия плазмы на поверхность металла, аналогично [241].

$$\begin{aligned}
 -\vec{n} \cdot \vec{q} &= q_0(r) = \frac{dUI\eta}{\pi r_0^2} G(r,t) \\
 -\vec{n} \cdot \vec{j} &= j_0(r) = \frac{dI}{\pi r_0^2} G(r,t) \\
 p &= p_0(r) = \frac{\mu I}{4\pi} j_0(r)
 \end{aligned}
 \tag{6.21}$$

где q_0, j_0, p_0 – тепловой поток, плотность тока, давление соответственно; U, I – напряжение и сила тока; η – коэффициент эффективности процесса; $G(r,t)$ – функция распределения воздействия по поверхности и времени:

$$G(r,t) = \exp\left(-\frac{d(r^2 + (r_0 - V_e t)^2)}{r_0^2}\right)
 \tag{6.22}$$

где V_e – скорость движения электрода, d, r_0 – параметры распределения.

На нижней поверхности CD задавалось условие конвективной теплоотдачи и электромагнитной неразрывности:

$$\begin{aligned}
 -\vec{q} \cdot \vec{n} &= h_0(T - T_0) \\
 \vec{j} \cdot \vec{n} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.23}$$

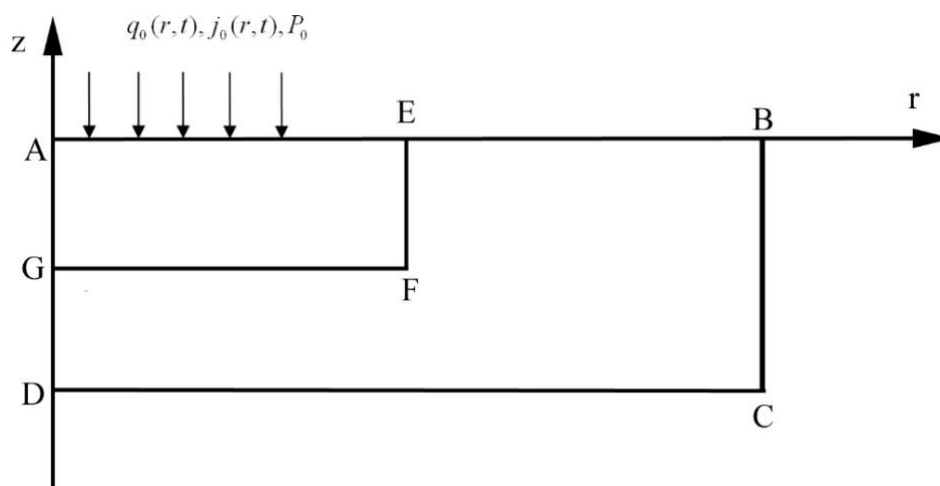


Рисунок 6.11 – Постановка задачи исследования конвективных течений в ванне расплава

На боковой границе BC аналогично условие конвективной теплоотдачи и равенство нулю скалярного электрического потенциала:

$$\begin{aligned} -\vec{q} \cdot \vec{n} &= h_0(T - T_0) \\ V &= 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Для магнитного поля на всех границах ставилось условие неразрывности: $\vec{n} \times \vec{A} = 0$. На границах EF и FG для скорости выполнялось условие скольжения.

Модель фазового перехода из твердого состояния в жидкое основывалась на представлении об увеличении коэффициента динамической вязкости в твердой области. Он имеет вид:

$$\mu = \mu_L(T)(1 - f_s) + \mu_S f_s \quad (6.25)$$

где f_s – коэффициент определяющий твердую фазу; μ_L – вязкость жидкой фазы; μ_S – вязкость твердой фазы, настолько большая чтобы останавливать движение в твердой фазе.

Расчеты проводились методом конечных элементов в пакете Comsol Multiphysics. В таблице 6.4 показаны характеристики материала и режим его обработки.

Поверхностное натяжение и его температурный коэффициент рассчитывалось методами, описанными в работах [242, 243]. В качестве основного метода расчета был выбран метод функционала электронной плотности. В качестве пробных функций были выбраны функции, которые учитывают несимметричное распределение электронов вблизи поверхности [243]. Рассматривались возможные комбинации железа и второго по содержанию элемента в наплавленном материале. Они определялись по диаграммам состояния. На рисунке 6.12 приведена зависимость поверхностного натяжения, которая имеет параболический вид.

Таблица 6.4 – Входные параметры задачи

Обозначение	Описание	Значение
U	Напряжение	30 В
I	Сила тока	250 А
r_0	Радиус эффективного воздействия плазменной струи	10 мм
T_l	Температура жидкой фазы	1723 К
ρ_s	Плотность твердой фазы	7500 кг м ⁻³
ρ_l	Плотность жидкой фазы	6350 кг м ⁻³
C_{pl}	Коэффициент теплоемкости жидкой фазы	720 Дж кг ⁻¹ К ⁻¹
C_{ps}	Коэффициент теплоемкости твердой фазы	602 Дж кг ⁻¹ К ⁻¹
k_l	Коэффициент теплопроводности	20 Вт м ⁻¹ К ⁻¹
k_s	Коэффициент теплопроводности	26 Вт м ⁻¹ К ⁻¹
σ	Электропроводность металла	$7,7 \cdot 10^5$ Ом ⁻¹ м ⁻¹
μ	Коэффициент динамической вязкости	0,05 кг м ⁻¹ с ⁻¹
L_f	Теплота плавления	247×10^3 Дж кг ⁻¹

Как уже говорилось выше, течение в ванне расплава определяется конвекцией Марангони, которая характеризуется температурным градиентом поверхностного натяжения $\partial\sigma/\partial T$. На графике 5.12 видно, что $\partial\sigma/\partial T > 0$ при температурах меньше критической $T < T_c$ и $\partial\sigma/\partial T < 0$ для $T > T_c$.

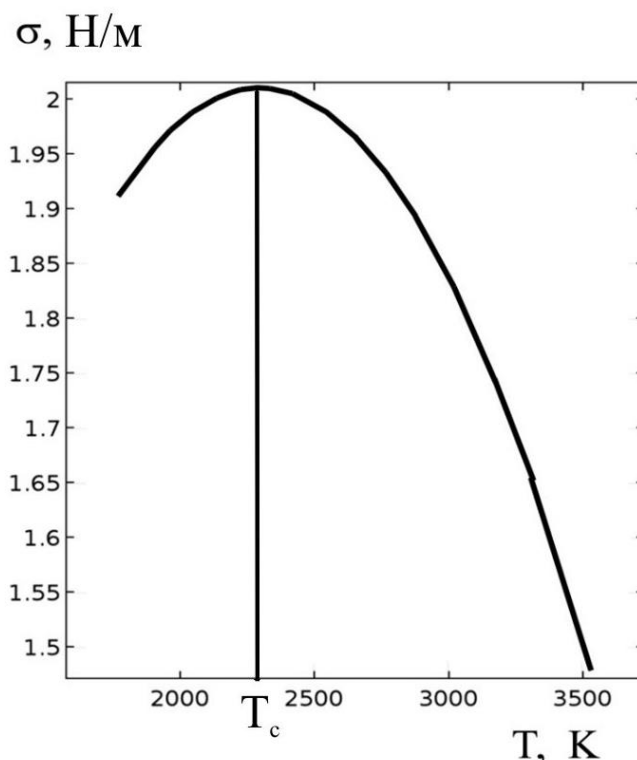


Рисунок 6.12 – Зависимость поверхностного натяжения от температуры

На рисунках 6.13 – 6.14 показана эволюция течения расплава в разные моменты времени. Наблюдается следующая картина. До достижения максимума теплового потока q , нисходящий поток, образованный двумя симметричными вихрями, движется от центра ванны, перемешивая расплав по всей ширине (рисунок 6.13). При спаде теплового воздействия плазменной струи начинается стадия остывания, которая характеризуется движением нисходящего потока к центру ванны и последующем появлением одиночного вихря около центра симметрии. Этот нисходящий поток доходит на глубину 6 мм. Его возникновение

можно объяснить сменой знака температурного градиента поверхностного натяжения $\partial\sigma/\partial T$.

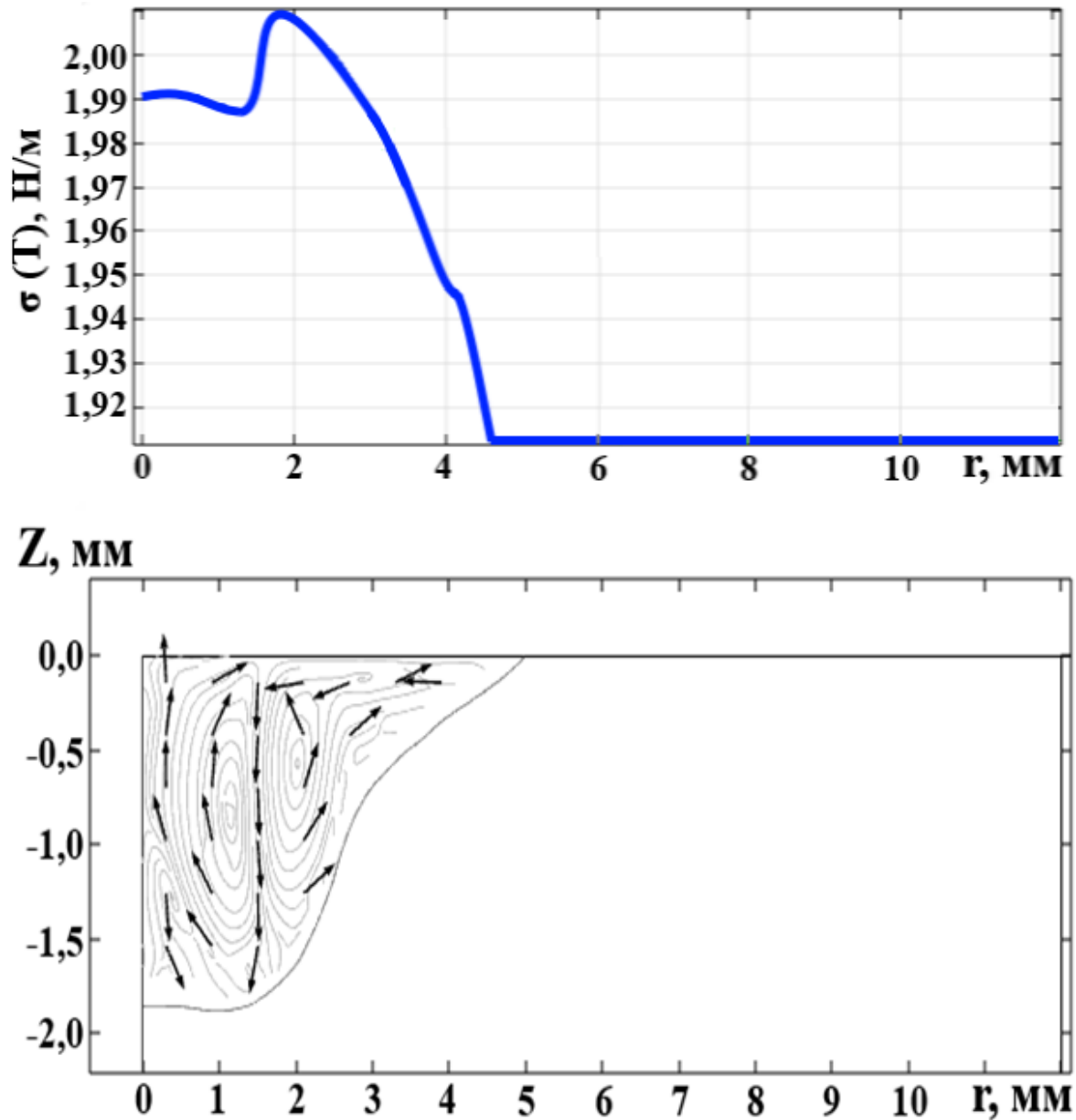


Рисунок 6.13 – Ванна расплава и градиент поверхностного натяжения, в момент времени 2,7 с

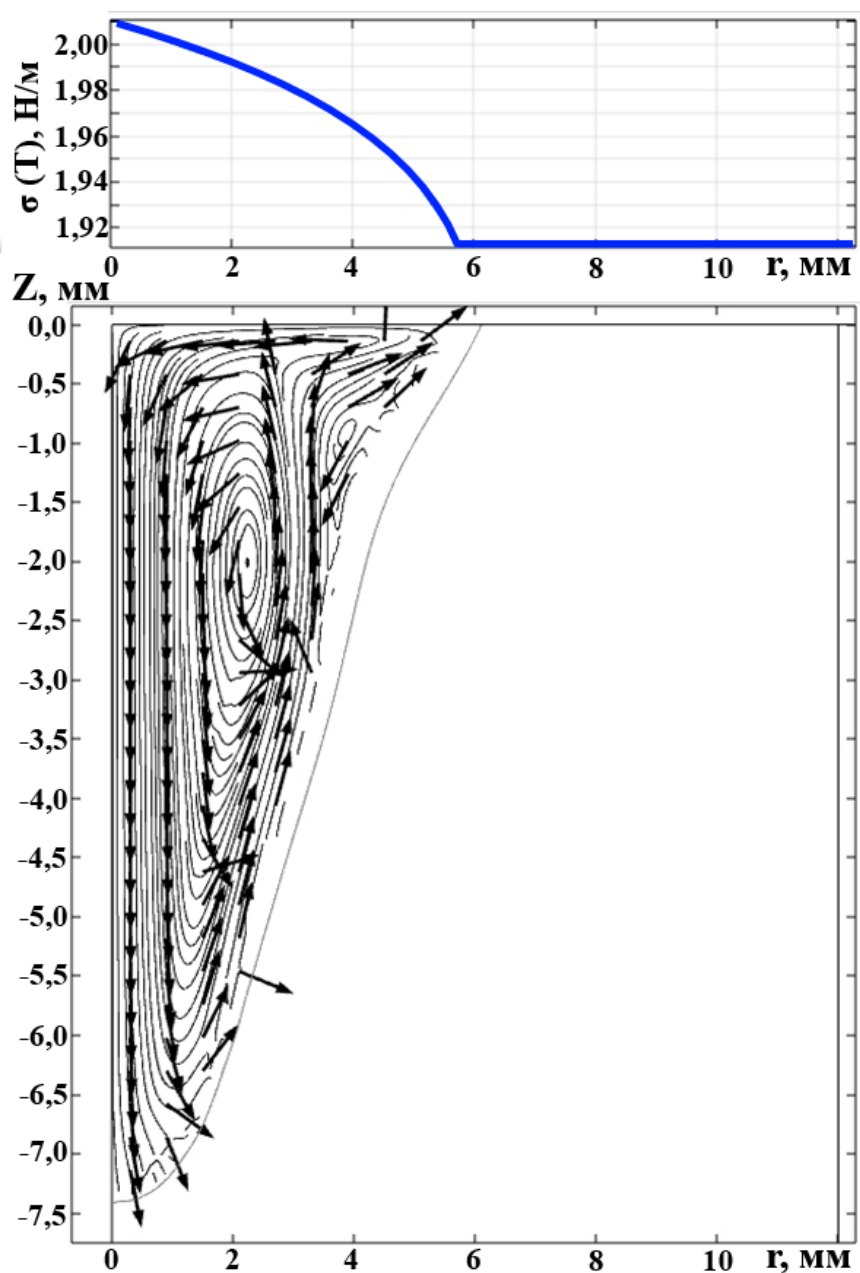


Рисунок 6.14 – Ванна расплава и градиент поверхностного натяжения, в момент времени 5,5 с

Численное моделирование гидродинамического течения в ванне расплава под действием плазмы электродугового разряда с учетом эффекта Марангони показало, что в ней этапе нагрева формируется многовихревая структура, которая перемешивает расплав по всей глубине. На стадии остывания нисходящий поток жидкости движется к центру ванны. Анализ

траекторий частиц (рисунок 6.15) показал, что конвекция является основным механизмом массопереноса.

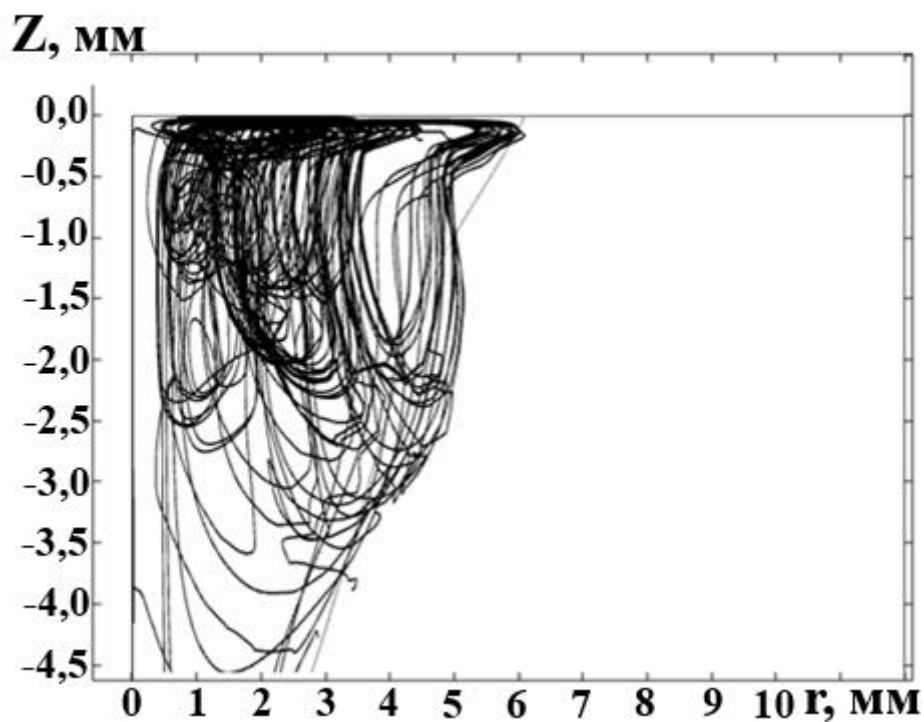


Рисунок 6.15 – Траектории движения приповерхностных частиц за время 5,5 с

Наличие легирующих элементов в металле оказывает сильное влияние на зависимость поверхностного натяжения от температуры, которая в свою очередь определяет картину конвективного течения расплава.

6.4 Модель растворения легирующих элементов в ванне расплава

Помимо конвективных течений не менее важную роль играет растворение легирующих элементов. В экспериментальных работах [93–96] установлено, что в покрытиях, наплавленных порошковой проволокой, содержащей ниобий формируются структуры и фазы размерами до 5 мкм в составе которых присутствует этот элемент. Эти частицы являются

концентраторами напряжений, которые приводят к возникновению трещин. Поэтому необходимо создание модели растворения этих частиц, позволяющей подобрать такие режимы обработки, при которых частицы ниобия составляли бы размеры менее 1 мкм. В настоящем параграфе предложена модель растворения ниобия в железе аналогичная разработанной в параграфе 4.3. настоящей диссертации модели растворения углерода в титане. Также как и в 3.3 решается диффузионная задача Стефана с учетом фазовой диаграммы Fe –Nb. Рассмотрим растворение ниобиевой пластины толщиной. Толщина пластины много меньше ее поперечных размеров. Тогда диффузионная задача становится одномерной. Диаграмма состояний температура – состав системы Fe-Nb согласно [244] приведена на рисунке 6.17. Область I на этой диаграмме занимает твердый раствор железа в ниобии, область III – жидкий расплав Fe-Nb, область II – их двухфазная смесь. T_2 – температура плавления ниобия, T_1 – эвтектическая температура.

Будем считать, что растворение ниобия в железе происходит при достаточно высоких температурах, когда твердый раствор ниобия растворяется в эвтектическом расплаве Fe-Nb. Это означает, что расчеты должны производиться для температуры T выше температур образования всех промежуточных фаз системы Fe-Nb (1600 °C).

Границы областей I и II, II и III аппроксимируются прямыми:

$$\begin{aligned} \gamma_1(T) &= \gamma_{10} + (1 - \gamma_{10}) \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \\ \gamma_2(T) &= \gamma_{20} + (1 - \gamma_{20}) \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Так как в уравнении диффузии используется объемная концентрация, а не атомная доля, то атомные доли преобразуются в соответствующие приведенные объемные концентрации (объемные доли

$c = \frac{V_{\text{Nb}}}{V_{\text{Fe}} + V_{\text{Nb}}}$). Все реальные концентрации пропорциональны объемной доле

с постоянным множителем. Тогда

$$c = \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\varepsilon + 1}, \quad \gamma = \frac{1}{\left(\frac{1}{c} - 1\right)\frac{1}{\varepsilon} + 1}. \quad (6.27)$$

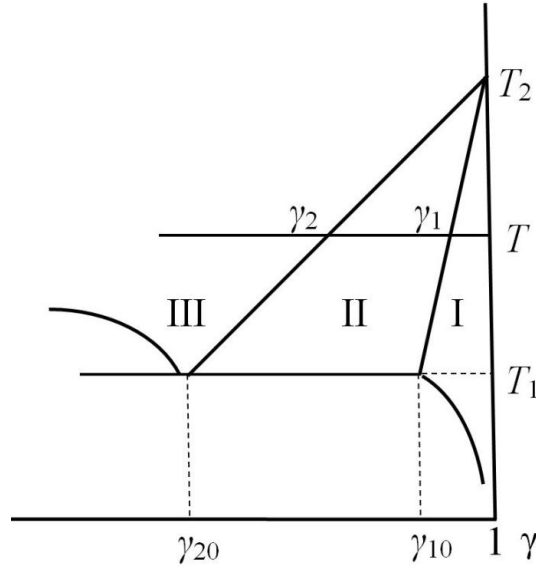


Рисунок 6.17 – Правая часть диаграммы состояний температура – состав системы Fe-Nb (γ – атомная доля ниобия)

Здесь γ – атомная доля ниобия, $\varepsilon = \frac{\rho_{\text{Nb}}}{\rho_{\text{Fe}}} \frac{\mu_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{Nb}}}$, где ρ_{Al} и ρ_{Cu} – плотности

алюминия и меди, а μ_{Al} и μ_{Cu} – их молярные массы. Согласно диаграмме (рисунок 6.15), $T_1 = 1673$ К, $T_2 = 2742$ К, $\gamma_{10} = 0,924$, $\gamma_{20} = 0,64$. Профиль концентраций изображен на рис. 6.18. В такой постановке задачи двухфазная область не имеет пространственной протяженности.

Уравнения модели

$$\frac{\partial c(r,t)}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 c(r,t)}{\partial r^2}, \quad i = 1 \text{ при } r < r_1(t) \text{ и } i = 2 \text{ при } r > r_1(t) \quad (6.28)$$

граничные условия

$$c(r,t)|_{r_1-0} = c_1, \quad c(r,t)|_{r_1+0} = c_2, \quad c(\infty,t)| = 0, \quad \left. \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right|_0 = 0$$

начальные условия

$$r_1(0) = r_0, \quad c(r,0) = \begin{cases} 1, & r < r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$$

где D_1 и D_2 – коэффициенты диффузии ниобия в твердом растворе железа в ниобии и в расплаве ниобий – железо, $r_1(t)$ – положение границы раздела фаз. Уравнение движения границы раздела имеет вид:

$$(c_1 - c_2) \frac{dr_1}{dt} = -D_1 \left. \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right|_{r_1-0} + D_2 \left. \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right|_{r_1+0} \quad (6.29)$$

Значения коэффициента диффузии ниобия в твердом растворе железа возьмем из [245] и определим предэкспоненциальный множитель и энергию активации диффузии $D_{10} = 0.376 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $E_1 = 381221 \text{ Дж/моль}$. Значение коэффициента диффузии D_2 ниобия в жидком расплаве много больше, чем D_1 , а его энергия активации мала.

Кроме того, в жидкой фазе теплоперенос усиливается за счет конвекции. Поэтому будем считать его постоянным и примем за параметр модели. Решение задачи (6.28) в первой области будем искать в виде

$$c(r,t) = c_1 + \frac{4}{\pi} (1 - c_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi r}{2r_1}\right) e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 D_1 t}{4r_1^2}} \quad (6.30)$$

Во второй области

$$c(r,t) = c_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{r - r_1}{2\sqrt{D_2 t}}\right) \quad (6.31)$$

Подставляя (6.30), (6.31) в (6.29) получим

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{1}{c_1 - c_2} \left(D_1 \frac{2}{r_1} (1 - c_1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 D_1 t}{4r_1^2}} - c_2 \sqrt{\frac{D_2}{\pi t}} \right) \quad (6.32)$$

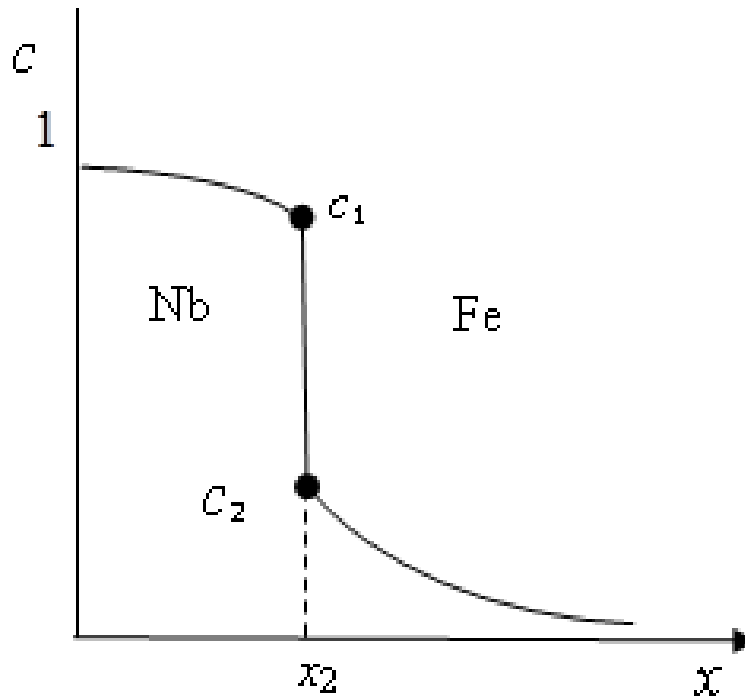


Рисунок. 6.18 – Профиль концентраций

При $t = 0$ эта формула дает неопределенность типа $\infty - \infty$, так как каждое слагаемое в правой части (6.32) обращается в бесконечность. Ряд в первом слагаемом начинает сходиться очень быстро, начиная с

$n = n_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4r_1^2}{\pi^2 D_1 t}} - 1 \right) \approx \frac{r_1}{\pi \sqrt{D_1 t}}$ До этого каждый член ряда практически равен единице. Следовательно, сумма ряда приближенно равна n_0 и первое

слагаемое оказывается приближенно равно $(1 - c_1) \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{D_1}{t}}$. Отсюда

вытекает, что при $D_1 \ll D_2$ первое слагаемое в (6.32) всегда много меньше второго, и процесс растворения определяется практически полностью

диффузией во второй фазе. Пренебрегая первым слагаемым, получим вместо (6.32)

$$\frac{dr_1}{dt} = -\frac{c_2}{c_1 - c_2} \sqrt{\frac{D_2}{\pi t}} \quad (6.33)$$

Время растворения находится путем интегрирования (6.33) и последующих преобразований

$$t_0 = 4\pi \left(\frac{c_1 - c_2}{c_2} \right)^2 \frac{r_0^2}{D_2} \quad (6.34)$$

Этого следовало ожидать – для плоского включения время растворения пропорционально квадрату толщины включения. Однако полученное решение является приближенным. Автомодельное точное решение для случая $D_1 \ll D_2$ может быть построено. Согласно [41, 245–247], решение уравнения диффузии ищут в виде $c(r, t) = c(\beta(r, t))$, где $\beta(r, t) = r/(2\sqrt{D_2 t})$. Отсюда решение краевой задачи (6.28):

$$c(r, t) = \frac{c_2 \operatorname{erfc}(\beta)}{\operatorname{erfc}(\beta_1)}, \quad \beta_1 = \frac{r_1(t)}{2\sqrt{D_2 t}}. \quad (6.35)$$

Пренебрегая диффузией в первой фазе, из уравнения движения границы (6.29), получаем уравнение

$$(c_1 - c_2) \frac{dr_1}{dt} = D_2 \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=r_1} \quad (6.36)$$

Подстановка (6.35) в (6.36) дает

$$(c_1 - c_2) \frac{dr_1}{dt} = -\frac{c_2 \exp(-(\beta_1)^2)}{\operatorname{erfc}(\beta_1)} \sqrt{\frac{D_2}{\pi t}}. \quad (6.37)$$

Производную по времени в (6.37) представим в виде

$$\frac{dr_1}{dt} = 2\sqrt{D_2} \frac{d}{dt} (\beta_1 \sqrt{t}) = 2\sqrt{D_2} (\dot{\beta}_1 \sqrt{t} + \beta_1 / (2\sqrt{t})) = 2\sqrt{D_2 t} \dot{\beta}_1 + \beta_1 \sqrt{\frac{D_2}{t}} \quad (6.38)$$

Поскольку значение концентрации на границе постоянно, необходимо, чтобы $\beta_1 = \text{const}$. Поэтому $\dot{\beta}_1 = 0$. Отсюда

$$\sqrt{\pi}(c_1 - c_2)\beta_1 = -\frac{c_2 \exp(-\beta_1^2)}{\text{erfc}(\beta_1)}. \quad (6.39)$$

Это трансцендентное уравнение позволяет определить β_1 . Очевидно, $\beta_1 < 0$. Так как левая граница системы никак не участвует в процессе, то мы можем записать

$$r_1(t) = r_0 + 2\beta_1\sqrt{D_2t} \quad (6.40)$$

Значения β_1 и коэффициента $k = -\frac{c_2}{4(c_1 - c_2)\sqrt{\pi}}$ из (6.34) при различных температурах приведены в таблице 6.5.

Также как и в [248, 249] примем размер частиц ниобия равным 10 мкм. Зависимость времени растворения от температуры приведена в таблице 6.6.

Таблица 6.5 – Значения коэффициентов для расчета времени растворения

T, K	1800	2000	2200	2400	2600
β_1	-0,5623	-0,6835	-0,8257	-1,0091	-1,3059
k	-0,3034	-0,4542	-0,7172	-1,2894	-3,4767

Таблица 6.6 – Значения времени растворения ниобия в железе

T, K	1800	2000	2200	2400	2600
$t_0, \text{с}$	80	55	37	25	15

Полученные значения сравнимы со временем растворения, рассчитанным в [248] для системы «титан-углерод». Столь большим временем растворения обусловлено существование в структуре

наплавленного слоя включений размерами от 1 до 5 мкм, основным элементом которых является ниобий [93].

Выводы по главе

1. Создана гидродинамическая модель течения в системе «электрод - плазменная струя – подложка». Результаты моделирования показали, что при значениях времени $t < 1$ мкс образуются три вихревые зоны. Образование первой вихревой зоны, и ее существование ~ 1 мкс, создают условия для образования мелких частиц. Однако, наличие противотока плазмы вблизи анода не позволяет им попасть на поверхность модифицируемого материала. Наличие диафрагмы в электроде приводит к тому, что вихревые зоны не образуются и поэтому мелкие частицы могут консолидироваться.
2. Методом конечных элементов проведено численное исследование образования и отрыва капель от электрода при различных значениях тока. Показано, что при воздействии электромагнитных сил вблизи электрода образуется вихревая зона, которая приводит к образованию вторичных капель. Установлено, что площадь расплава с течением времени увеличивается согласно линейному закону.
3. Проведен линейный анализ неустойчивости струи проводящей жидкости при пропускании тока в приближении коротких волн. Определены значения электрического тока, при которых критическая длина волны соответствует нано- и микродиапазонам.
4. Исследовано конвективное течение в ванне расплава. Показано, что введение легирующих элементов в металл оказывает сильное влияние на зависимость поверхностного натяжения от температуры, которая в свою очередь определяет картину конвективного течения расплава и глубину проплавления подложки. Установлено, что частицы

легирующих элементов проникают в подложку на расстояние порядка 4 мм.

5. На основе представлений о растворении тугоплавких элементов в жидкой среде проведено моделирование этого процесса в системе Fe - Nb. Установлено, что время растворения частицы ниобия в жидком железе составляет ~ 10 с. Это обуславливает наличие в структуре наплавленного слоя включений размерами от 1 до 5 мкм, основным элементом которых является ниобий.

ГЛАВА 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ МЕХАНИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА ГРАДИЕНТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Наблюдается активное развитие и внедрение множества новых решений для упрочнения поверхностей в последнее время. Однако, создание теоретических моделей поведения материала с упрочненным слоем находится в стадии развития. Успехи в этом направлении мезомеханики, которая объединяет механику сплошной среды и физику пластичности, в объяснении и моделировании поведения материалов связываются с мощной и достаточно разработанной теорией упругости. Использование ее методов позволяет получать аналитические построения полей напряжений и моделировать их локализацию с учетом градиентной структуры.

При интенсивном контактном воздействии в поверхностных слоях возникают большие пластические деформации, достигающие значений истинной деформации $\epsilon \sim 10$ [1]. Следствием этого является образование слоя с ультрамелкой зеренной (УМЗ) структурой, которая в оптическом микроскопе не разрешается, и поэтому получила название «белого слоя». По данным [2] толщина этого слоя при трении с высокими нагрузками не зависит от предварительной термообработки, структуры материала и составляет 20-40 мкм. Исходные зерна превращаются в поликристаллы с УМЗ размерами 10-100 нм. Аналогичная структура УМЗ образуется на германских рельсах в процессе эксплуатации с размером зерна 200 нм и повышением твердости до 10-12 ГПа (исходный материал 3 ГПа) [3]. Глубина слоя с УМЗ при пропуске 4 млн. тонн составила 40 мкм, а для пропуска 360 млн. - 70 мкм. Таким образом, в тяжело нагруженных условиях в тонком поверхностном слое образуются нанокристаллические структуры. Непосредственное их отделение и определение механических

свойств слоя с УМЗ на сегодняшний день представляется невозможным. Поэтому их свойства могут быть определены из экспериментов по растяжению-сжатию нанокристаллических специально изготовленных макрообразцов [4]. В этой работе для армко-железа показано, что модуль Юнга при сжатии равен 200 ГПа, а при растяжении от 5 до 15 ГПа в зависимости схемы получения структуры с УМЗ. Табличные значения модуля Юнга для армко-железа составляют от 186 до 223 ГПа [5]. Различие в модулях Юнга значительно, и поэтому становится актуальной задача анализа напряженного состояния для многослойной полосы с различными механическими характеристиками для моделирования взаимодействия колеса с неоднородным по глубине рельсом. Кроме того, при импульсных поверхностных обработках (магнитоплазменная и дифференцированная закалка) образуются резкие градиентные структуры, которые способствуют значительному увеличению износостойкости. Однако, у некоторых специалистов возникают сомнения в увеличении эксплуатационной стойкости рельсов с поверхностной обработкой из-за наличия резкого переходного слоя, как источника дополнительных концентраторов напряжений.

Перечисленные факты не позволяют однозначно определить роль градиентных структур, поэтому требуются дальнейшие исследования. В этой связи развитие методов расчета напряженного состояния рельсов с градиентными структурами при действии внешних нагрузок является актуальным.

В работах [6, 7] предлагалось рассмотреть упрочненный слой, как слой с отличающимися от матрицы упругими постоянными. Мотивацией этого служило, что деформация поверхностного слоя происходит в режиме упрочнения, где модуль упрочнения значительно ниже модуля Юнга, но

при этом связь между напряжениями и деформациями предполагается линейной.

Таким образом, представленные данные указывают на необходимость рассмотрения разномодульных слоистых структур под действием внешнего давления. Для теоретического анализа воспользуемся наиболее простой моделью – теорией упругости, позволяющей учесть сложнапряженное состояние, с изотропными свойствами внутри каждого слоя. Большое количество работ посвящено методам и расчету напряжений в многослойных средах [8–15]. В силу громоздкого аппарата получения решений использование готовых формул без надлежащей проверки представляется рискованным. Поэтому используем известную идею Макса Борна [16] о связи между граничными величинами в слоях, задаваемых матрицей перехода. Подобная схема, но несколько отличная от ниже изложенной, использовалась для неоднородных сред в теории упругости [14].

Результаты, представленные в настоящей главе, опубликованы в работах [132, 133, 250, 253].

7.1 Модель воздействия статической контактной нагрузки на градиентную структуру материалов

Рассмотрим краевую задачу о равновесии упругого слоя толщиной $2h$, находящегося в условиях плоской деформации [250]. Пусть нормальное сечение слоя будет полоса, занимающая область $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$. На границе полосы заданы нормальные и касательные напряжения (рисунок 7.1). При решении подобных задач используется интегральное преобразование Фурье. Изложим ниже вывод формул, связывающих образы Фурье перемещений с образами нормальных и касательных напряжений на границах полосы. Основные моменты этого вывода были

описаны в [134]. Здесь остановимся на деталях и получим формулы, которые будем использовать в дальнейшем при моделировании изгиба двухслойной полосы.

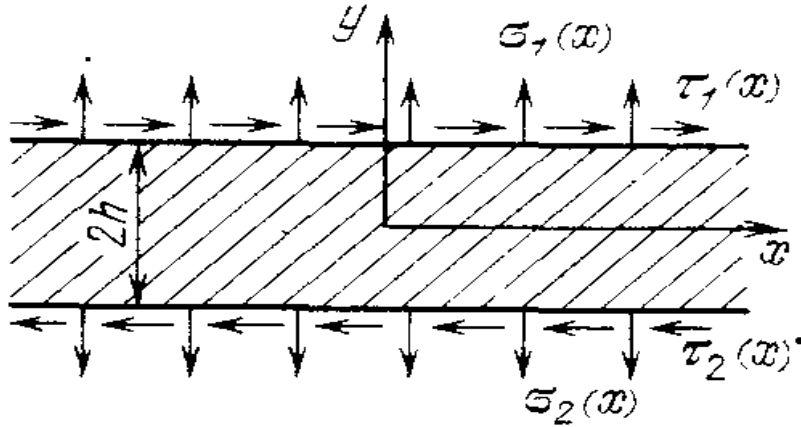


Рисунок 7.1 – К постановке задачи о связи перемещений и напряжений однородной полосы

Уравнения равновесия в перемещениях (уравнения Ламе) имеют вид:

$$(1 - 2\nu)\Delta u + \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (1 - 2\nu)\Delta v + \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (7.1)$$

где $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Запишем выражения для деформации и

напряжений: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$. Обобщенный закон Гука

имеет вид:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1 - 2\nu} [(1 - \nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y]; \quad \sigma_y = \frac{2G}{1 - 2\nu} [(1 - \nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x]; \quad \tau = G\gamma_{xy}, \quad (7.2)$$

Здесь u и v – перемещения соответственно по осям x и y , G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона. Будем считать, что на границах полосы $y = \pm h$ заданы усилия, тогда граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, h) &= \sigma_1(x), \quad \sigma_y(x, -h) = \sigma_2(x), \\ \tau(x, h) &= \tau_1(x), \quad \tau(x, -h) = \tau_2(x). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Применяя к (7.1) и (7.2) преобразование Фурье по координате x , получим:

$$\begin{aligned} (1-2\nu)U'' - 2(1-\nu)\alpha^2 U - i\alpha V' &= 0, \\ 2(1-\nu)V'' - (1-2\nu)\alpha^2 V - i\alpha U' &= 0 \\ \Sigma_y &= \frac{2G}{(1-2\nu)}[(1-\nu)V' - i\nu\alpha U], \quad T = G(U' - i\alpha V), \\ \Sigma_x &= \frac{2G}{(1-2\nu)}[(1-\nu)(-i\alpha)U' + \nu V] \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $U, V, \Sigma_x, \Sigma_y, T$ – образы Фурье смещений и напряжений соответственно. Будем искать решение системы (7.4) в виде:

$$\begin{aligned} U(y) &= a_1 ch(\alpha y) + a_2 \alpha y ch(\alpha y) + b_1 sh(\alpha y) + b_2 \alpha y sh(\alpha y), \\ V(y) &= i[(b_1 - (3-4\nu)a_2)ch(\alpha y) + b_2 \alpha y ch(\alpha y) + \\ &+ (a_1 - (3-4\nu)b_2)sh(\alpha y) + a_2 \alpha y sh(\alpha y)] \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $\chi = 3-4\nu$, a_1, a_2, b_1, b_2 – произвольные постоянные. Подставляя (7.5) в (7.4) получим:

$$\begin{aligned} \Sigma_y / (2G\alpha i) &= a_1 ch(\alpha y) + b_1 sh(\alpha y) + \\ &+ a_2(\alpha y ch(\alpha y) - 2(1-\nu)sh(\alpha y)) + b_2(\alpha y sh(\alpha y) - 2(1-\nu)ch(\alpha y)), \\ \Sigma_x / (-2G\alpha i) &= a_1 ch(\alpha y) + b_1 sh(\alpha y) + \\ &+ a_2(\alpha y ch(\alpha y) + 2\nu sh(\alpha y)) + b_2(\alpha y sh(\alpha y) + 2\nu ch(\alpha y)), \\ T / (2G\alpha) &= a_1 sh(\alpha y) + b_1 ch(\alpha y) + \\ &+ a_2(\alpha y sh(\alpha y) - (1-2\nu)ch(\alpha y)) + b_2(\alpha y ch(\alpha y) - (1-2\nu)sh(\alpha y)). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Используя (7.6), получим напряжения на границе слоев

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = \Sigma_y(h) &= 2G\alpha i(a_1 ch(z) + b_1 sh(z) + a_2 S_2 + b_2 C_2), \\ \Sigma_2 = \Sigma_y(-h) &= 2G\alpha i(a_1 ch(z) - b_1 sh(z) - a_2 S_2 + b_2 C_2), \\ T_1 = T(h) &= 2G\alpha(a_1 sh(z) + b_1 ch(z) + a_2 C_1 + b_2 S_1), \\ T_2 = T(-h) &= 2G\alpha(-a_1 sh(z) + b_1 sh(z) + a_2 C_1 - b_2 S_1). \end{aligned} \quad (7.7)$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= z \operatorname{sh}(z) - (1 - 2\nu) \operatorname{ch}(z), \quad S_1 = z \operatorname{ch}(z) - (1 - 2\nu) \operatorname{sh}(z), \\
C_2 &= z \operatorname{sh}(z) - 2(1 - \nu) \operatorname{ch}(z), \quad S_2 = z \operatorname{ch}(z) - 2(1 - \nu) \operatorname{sh}(z), \\
z &= \alpha h.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Выразим постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 через $\Sigma_1, \Sigma_2, T_1, T_2$ используем систему (7.7). Для этого складываем первое из уравнений (7.7) со вторым и вычитаем из третьего уравнения четвертое. Получаем систему для определения a_1 и b_2

$$a_1 \operatorname{ch}(z) + b_2 C_2 = \Sigma_+ \quad a_1 \operatorname{sh}(z) + b_2 S_1 = T_- \tag{7.9}$$

где $\Sigma_+ = (\Sigma_1 + \Sigma_2)/(4i\alpha G), T_- = (T_1 - T_2)/(4\alpha G)$. Решение (7.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2i\alpha G} \cdot \frac{1}{D_+} ((\Sigma_1 + \Sigma_2)S_1 - i(T_1 - T_2)C_2), \\
b_2 &= \frac{1}{2i\alpha G} \cdot \frac{1}{D_+} (- (\Sigma_1 + \Sigma_2) \operatorname{sh}(z) + i(T_1 - T_2) \operatorname{ch}(z)), \\
D_+ &= 2z + \operatorname{sh}(2z).
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Теперь получим систему для определения a_2, b_1 .

$$a_2 S_2 + b_1 \operatorname{sh}(z) = \Sigma_- \quad a_2 C_1 + b_1 \operatorname{ch}(z) = T_+ \tag{7.11}$$

Решение системы (12) представим в виде:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2i\alpha G} \cdot \frac{1}{D_-} ((\Sigma_1 - \Sigma_2) \operatorname{ch}(z) + i(T_1 + T_2) \operatorname{sh}(z)), \\
b_1 &= \frac{1}{2i\alpha G} \cdot \frac{1}{D_-} ((\Sigma_1 - \Sigma_2)C_1 - i(T_1 + T_2)S_2), \\
D_- &= -2z + \operatorname{sh}(2z).
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Найденные значения a_1, a_2, b_1, b_2 подставим в формулы (7.5) и выразим U_1, U_2, V_1, V_2 через $\Sigma_1, \Sigma_2, T_1, T_2$.

$$\begin{aligned}
U_1 &= U_{11}\Sigma_1 + U_{12}\Sigma_2 + U_{13}T_1 + U_{14}T_2 \\
U_2 &= U_{21}\Sigma_1 + U_{22}\Sigma_2 + U_{23}T_1 + U_{24}T_2, \\
V_1 &= V_{11}\Sigma_1 + V_{12}\Sigma_2 + V_{13}T_1 + V_{14}T_2, \\
V_2 &= V_{21}\Sigma_1 + V_{22}\Sigma_2 + V_{23}T_1 + V_{24}T_2.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

где

$$\begin{aligned}
U_{11} &= \frac{4z(1-\nu)sh(2z)}{2i\alpha G\Delta}, \quad U_{12} = -\frac{4z^2 + (1-2\nu)sh^2(2z)}{2i\alpha G\Delta}, \\
U_{13} &= \frac{(1-\nu)(sh(4z) - 4z)}{2\alpha G\Delta}, \\
U_{14} &= \frac{2(1-\nu)(2zch(2z) - sh(2z))}{2\alpha G\Delta}, \quad U_{21} = \frac{4z(1-\nu)sh(2z)}{2i\alpha G\Delta}, \\
U_{22} &= \frac{4z^2 + (1-2\nu)sh^2(2z)}{2i\alpha G\Delta}, \\
U_{23} &= \frac{2(1-\nu)(2zch(2z) - sh(2z))}{2\alpha G\Delta}, \quad U_{24} = \frac{(1-\nu)(sh(4z) - 4z)}{2\alpha G\Delta}, \\
V_{11} &= \frac{(1-\nu)(4z + sh(4z))}{2\alpha G\Delta}, \quad V_{12} = -\frac{2(1-\nu)(sh(2z) + 2zch(2z))}{2\alpha G\Delta}, \\
V_{13} &= \frac{((1-2\nu)sh^2(2z) + 4z^2)}{2i\alpha G\Delta}, \quad V_{14} = \frac{4(1-\nu)zsh(2z)}{2i\alpha G\Delta}, \\
V_{21} &= -\frac{2(1-\nu)(sh(2z) + 2zch(2z))}{2\alpha G\Delta}, \quad V_{22} = -\frac{(1-\nu)(4z + sh(4z))}{2\alpha G\Delta}, \\
V_{23} &= \frac{4(1-\nu)zsh(2z)}{2i\alpha G\Delta}, \quad V_{24} = \frac{((1-2\nu)sh^2(2z) + 4z^2)}{2i\alpha G\Delta}.
\end{aligned}$$

Полученные коэффициенты используются ниже для определения матрицы перехода. Для получения матрицы перехода между слоями необходимо получить связь между смещениями и напряжениями n -ого слоя с аналогичными величинами $(n+1)$ -ого слоя. Используем обозначения рис. 1 для n -ого слоя. С учетом (7.13), и учитывая, что ширина n -ого слоя равна h_n , можно записать:

$$\begin{aligned}
U_n &= u_{n1}\Sigma_n + u_{n2}\Sigma_{n+1} + u_{n3}T_n + u_{n4}T_{n+1}, \\
U_{n+1} &= u_{n2}\Sigma_n + u_{n1}\Sigma_{n+1} - u_{n4}T_n - u_{n3}T_{n+1}, \\
V_n &= v_{n1}\Sigma_n + v_{n2}\Sigma_{n+1} + v_{n3}T_n + v_{n4}T_{n+1}, \\
V_{n+1} &= -v_{n2}\Sigma_n - v_{n1}\Sigma_{n+1} + v_{n4}T_n + v_{n3}T_{n+1}.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

где

$$\begin{aligned}
U_n &= U(\alpha, h_n), V_n = V(\alpha, h_n), U_{n+1} = U(\alpha, 0), V_{n+1} = V(\alpha, 0); \\
\Sigma_n &= \Sigma(\alpha, h_n), T_n = T(\alpha, h_n), \Sigma_{n+1} = \Sigma(\alpha, 0), T_{n+1} = T(\alpha, 0); \\
u_{n1} &= \frac{i}{2G_n \Delta_n \alpha} (z_n^2 + (1 - 2v_n) \cdot \text{sh}^2 z_n), \\
u_{n2} &= \frac{i(1 - v_n)}{G_n \Delta_n \alpha} z_n \cdot \text{sh}(z_n), \\
u_{n3} &= -\frac{(1 - v_n)}{2G_n \Delta_n \alpha} (2z_n^2 - \text{sh}(2z_n)), \\
u_{n4} &= \frac{(1 - v_n)}{G_n \Delta_n \alpha} (z_n \text{ch}(z_n) - \text{sh}(z_n)), \\
v_{n1} &= \frac{(1 - v_n)}{2G_n \Delta_n \alpha} (2z_n^2 + \text{sh}(2z_n)), v_{n2} = -\frac{(1 - v_n)}{G_n \Delta_n \alpha} (z_n \text{ch}(z_n) + \text{sh}(z_n)) \\
v_{n3} &= -u_{n1}, v_{n4} = u_{n2}, \Delta_n = \text{sh}^2(z_n) - z_n^2, z_n = \alpha h_n
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Систему уравнений (7.14) можно переписать так, что величины с индексом n будут перенесены в левую часть, а величины с индексом $n+1$ перенесены в правую часть.

$$\begin{aligned}
U_n - u_{n1}\Sigma_n - u_{n3}T_n &= u_{n2}\Sigma_{n+1} + u_{n4}T_{n+1}, \\
-u_{n2}\Sigma_n + u_{n4}T_n &= -U_{n+1} + u_{n1}\Sigma_{n+1} - u_{n3}T_{n+1}, \\
V_n - v_{n1}\Sigma_n - v_{n3}T_n &= v_{n2}\Sigma_{n+1} + v_{n4}T_{n+1}, \\
v_{n2}\Sigma_n - v_{n4}T_n &= -V_{n+1} - v_{n1}\Sigma_{n+1} + v_{n3}T_{n+1}.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Тогда в матричной форме соотношения (7.16) будут иметь вид:

$$M_{n,n} f_n = M_{n,n+1} f_{n+1} \tag{7.17}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_n &= \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \\ \Sigma_n \\ T_n \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_{n,n} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -u_{n1} & -u_{n3} \\ 0 & 0 & -u_{n2} & u_{n4} \\ 0 & 1 & -v_{n1} & -v_{n3} \\ 0 & 0 & v_{n2} & -v_{n4} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{f}_{n+1} &= \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ \Sigma_{n+1} \\ T_{n+1} \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_{n,n+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & u_{n2} & u_{n4} \\ -1 & 0 & u_{n1} & -u_{n3} \\ 0 & 0 & v_{n2} & v_{n4} \\ 0 & -1 & -v_{n1} & v_{n3} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Далее обращая матрицу $\mathbf{M}_{n,n}$, получаем связь:

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{f}_{n+1} \tag{7.19}$$

Элементы матрицы \mathbf{G}_n представлены таблице 7.1. Здесь индекс n опущен. Для нескольких слоев можно последовательно использовать (7.19) и тем самым связать параметры первого и последнего слоев.

Таблица 7.1 – Коэффициенты матрицы перехода

$\operatorname{ch}(z) + \frac{z \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)}$	$i \left(\operatorname{sh}(z) + \frac{z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)} \right)$	$\frac{iz \operatorname{sh}(z)}{4G\alpha(1-\nu)}$	$\frac{\operatorname{sh}(z)}{G\alpha} + \frac{z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z)}{4G\alpha(1-\nu)}$
$i \left(\operatorname{sh}(z) + \frac{z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)} \right)$	$\operatorname{ch}(z) - \frac{z \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)}$	$\frac{\operatorname{sh}(z)}{G\alpha} - \frac{z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z)}{4G\alpha(1-\nu)}$	$\frac{iz \operatorname{sh}(z)}{4G\alpha(1-\nu)}$
$\frac{iG\alpha z \cdot \operatorname{sh}(z)}{1-\nu}$	$-\frac{G\alpha}{(1-\nu)} (z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z))$	$\operatorname{ch}(z) - \frac{z \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)}$	$\frac{i(z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z))}{2(1-\nu)} + i \operatorname{sh}(z)$
$\frac{G\alpha}{(1-\nu)} (z \operatorname{ch}(z) + \operatorname{sh}(z))$	$\frac{iG\alpha z \cdot \operatorname{sh}(z)}{1-\nu}$	$\frac{i(z \operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}(z))}{2(1-\nu)} - i \operatorname{sh}(z)$	$\operatorname{ch}(z) + \frac{z \operatorname{sh}(z)}{2(1-\nu)}$

К решению задачи распределения напряжений в материале на границе упрочненный слой / подложка применим аппарат матриц перехода. Учтем, что величина прогиба зависит от действующей нагрузки,

то есть реализуются условия Винклера [251, 252]. В этом случае смещения V при $y=0$ пропорциональны σ_y

$$V(0, x) = k_v \sigma_y(0, x) \quad (7.20)$$

где k_v – константа Винклера. При реализации этих условий, как правило, касательные напряжения отсутствуют, т.е. $\sigma_{xy}(0, x) = 0$. В предлагаемой модели имеются три слоя (рис. 7.2). Первый – упрочненный, второй – мягкий подслои и третий – сама матрица. Тогда $f_4 = (U_4; k_v \Sigma_4; \Sigma_4; 0)$ и на границе $y = h$ ($h = h_1 + h_2 + h_3$), будем задавать напряжения от нагрузки

$\sigma_{xy}(h, x) = 0$, $\sigma_y(h, x) = \sigma(x)$. Тогда $T_1 = 0$; $\Sigma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) \exp(ikx) dx$, а значит $f_1 = (U_1, V_1, \Sigma_1, 0)$.

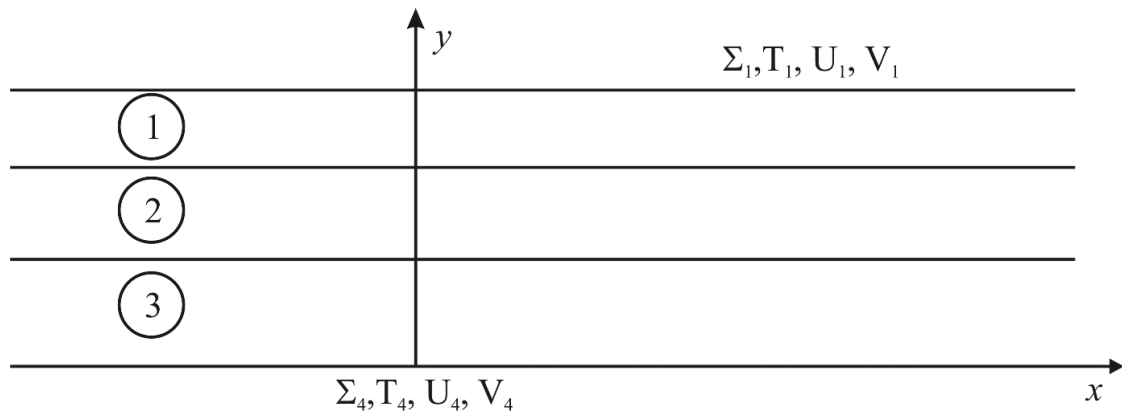


Рисунок 7.2 – К постановке задачи о взаимодействии слоев

Последовательно используя формулу (7.19) можно определить связь между f_1 и f_4 :

$$f_1 = G_1 G_2 G_3 \cdot f_4 \quad (7.21)$$

Система (7.21) является системой четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Разрешив ее, получим f_4 , а затем, по формуле (7.21) f_3 , f_2 . Указанный алгоритм при численных значениях параметров слоев может быть реализован на ЭВМ. Однако указанная процедура громоздка для того, чтобы прояснить какой-либо физический смысл. Поэтому для простоты

рассуждений и в качестве иллюстрации рассмотрим двухслойную задачу на винклеровом основании при условии, что $h_2 \rightarrow \infty$. Необходимо отметить, что прямой предельный переход в матрице \hat{G}_2 при $h_2 \rightarrow \infty$ невозможен. Для реализации указанного подхода записываем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} U_2 &= g_{11}U_3 + (g_{12}k_v + g_{13})\Sigma_3 \\ V_2 &= g_{21}U_3 + (g_{22}k_v + g_{23})\Sigma_3 \\ \Sigma_2 &= g_{31}U_3 + (g_{32}k_v + g_{33})\Sigma_3 \\ T_2 &= g_{41}U_3 + (g_{42}k_v + g_{43})\Sigma_3 \end{aligned} \quad (7.22)$$

Из последних двух уравнений выражаем U_3 и Σ_3 через Σ_2 и T_2 и подставляем в первое и второе уравнения системы. Получим соотношения

$$U_2 = u_{23}\Sigma_2 + u_{24}T_2, \quad V_2 = v_{23}\Sigma_2 + v_{24}T_2 \quad (7.23)$$

Далее воспользуемся вторым и четвертым уравнениями системы (7.22) и получим:

$$\begin{aligned} U_2 &= u_{12}\Sigma_1 + u_{11}\Sigma_2 - u_{14}T_1 - u_{13}T_2 \\ V_2 &= -v_{12}\Sigma_1 - v_{11}\Sigma_2 + v_{14}T_1 + v_{13}T_2 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Из системы (7.23) и (7.24) исключаем U_2 , V_2 и окончательно для Σ_2 и T_2 имеем:

$$\begin{aligned} (u_{23} - u_{11})\Sigma_2 + (u_{24} - u_{13})T_2 &= u_{12}\Sigma_1 - u_{14}T_1 \\ (v_{23} + v_{11})\Sigma_2 + (v_{24} - v_{13})T_2 &= -v_{12}\Sigma_1 + v_{14}T_1 \end{aligned} \quad (7.25)$$

Наиболее громоздким в описанном алгоритме является представление Σ_2 и T_2 через входные параметры в силу того, что в коэффициентах u_{2j} и v_{2j} ($j=2,3$) необходим предельный переход при $h_2 \rightarrow \infty$, но предварительно их надо выписать при конечном h_2 . Действительно, для коэффициентов в (7.23) имеем:

$$\begin{aligned}
u_{23} &= (k_v(g_{11} \cdot g_{42} - g_{41} \cdot g_{12}) + (g_{11} \cdot g_{43} - g_{41} \cdot g_{13})) / \Delta \\
u_{24} &= (k_v(g_{12} \cdot g_{31} - g_{11} \cdot g_{32}) + (g_{13} \cdot g_{31} - g_{11} \cdot g_{33})) / \Delta \\
v_{23} &= (k_v(g_{31} \cdot g_{22} - g_{21} \cdot g_{32}) + (g_{23} \cdot g_{31} - g_{21} \cdot g_{33})) / \Delta \\
v_{24} &= (k_v(g_{31} \cdot g_{42} - g_{41} \cdot g_{32}) + (g_{23} \cdot g_{31} - g_{21} \cdot g_{33})) / \Delta
\end{aligned} \tag{7.26}$$

где $\Delta = k_v(g_{31} \cdot g_{42} - g_{41} \cdot g_{32}) + (g_{31} \cdot g_{43} - g_{41} \cdot g_{33})$, здесь через g_{ij} представлены коэффициенты матрицы G_2 . Подставим их в (7.26) и получаем

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{Gk}{2(1-\nu)} (k_0(z^2 - sh^2 z) - (2z + sh2z)) \\
u_{23} &= \frac{i}{2(1-\nu)} (2z - (1-2\nu)sh2z - k_0(z^2 + (1-2\nu)sh^2 z)) / \Delta \\
u_{24} &= (k_0(2z - sh2z) - ch^2 z) / \Delta \\
v_{24} &= \frac{i}{2(1-\nu)} ((z + (1-\nu)^2 sh2z) / (1-\nu) + k_0(z^2 + (1-2\nu)sh^2 z)) / \Delta
\end{aligned} \tag{7.27}$$

где $k_0 = (2kGk_v) / (1-\nu)$.

Переходя в формулах (7.27) к пределу $z \rightarrow \infty$ получаем ситуацию в точности такую же, как слой конечной толщины на полубесконечном основании, для которой постановка и получение формул в общем виде были изложены в [134], однако анализа напряженного состояния границы раздела не было проведено. Уделим этому особое внимание. Учитываем, что нагрузка распределена так, как показано на рисунке 7.3.

Тогда трансформанта Фурье нормального напряжения вдоль контакта упругих слоёв, один из которых имеет конечную толщину и нагружен сосредоточенной сжимающей силой, а второй бесконечен, имеет вид:

$$F = - \frac{(a_0 z + b_0)shz + (b_0 z + 2)chz}{(q_0 - 2c_0) \cdot sh^2 z - c_0 z^2 - b_0 sh2z - 2} \tag{7.28}$$

где $a_0 = (1 + (1 - 2\nu_2)B)/(1 - \nu_1)$, $b_0 = 2 \frac{1 - \nu_2}{1 - \nu_1} B \frac{|z|}{z}$, $c_0 = (a_0^2 - b_0^2)/2$, $B = \frac{G_1}{G_2}$,

$z = \alpha h$, α – параметр Фурье, h -толщина слоя. В случае, показанном на рисунке 7.3:

$$G(z, a_0, b_0, \bar{c}, h) = F(a_0, b_0, z) \cdot \frac{\sin^2(z\bar{c}/2)}{z^2} \cdot 4\sigma_m \cdot h^2 \quad (7.29)$$

где $\bar{c} = c/h$ – относительная ширина распределения; σ_{\max} – максимум давления.

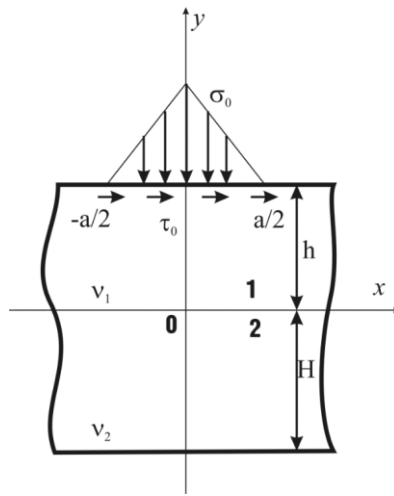


Рисунок 7.3 – К постановке задачи об определении напряжений в зоне сопряжения слоев

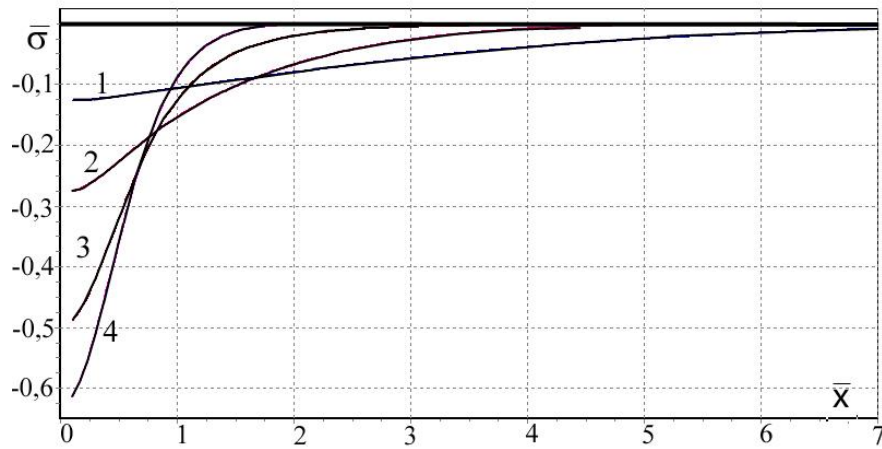
Используя (7.29) и выражение для точечной нагрузки получим окончательные формулы для расчета нормальных и касательных напряжений в зоне контакта слоев:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_y(\bar{x}, a, b, c) &= \int_0^{\infty} \Sigma(z, a, b, c) \cos(z \cdot \bar{x}) dz; \\
\bar{\tau}(\bar{x}, a, b, c) &= \int_0^{\infty} T(z, a, b, c) \sin(z \cdot \bar{x}) dz; \\
\Sigma(z, a, b, c) &= 4 \cdot \sin^2(zc/2) ((az + b) \operatorname{sh}z + (bz + 2) \operatorname{ch}z) / (D \cdot z^2 \cdot c^2); \\
T(z, a, b, c) &= 4 \cdot \sin^2(zc/2) ((bz + a - 2) \operatorname{sh}z + az \operatorname{ch}z) / (D \cdot z^2 \cdot c^2); \\
D &= (a^2 - b^2) (\operatorname{sh}^2 z - z^2) / 2 - 2a \operatorname{sh}^2 z - b \operatorname{sh} 2z - 2; \\
a &= (1 + (1 - 2\nu_2)B) / (1 - \nu_1); \\
b &= 2(1 - \nu_2)B / (1 - \nu_1); B = G_1 / G_2; c = c_0 / h; \bar{x} = x / h; \\
\sigma_y &= \bar{\sigma}_y \cdot \sigma_{\max}; \quad \tau = \bar{\tau} \cdot \sigma_{\max}; \quad \sigma_{\max} = P / (\pi^2 h \cdot b_0).
\end{aligned} \tag{7.30}$$

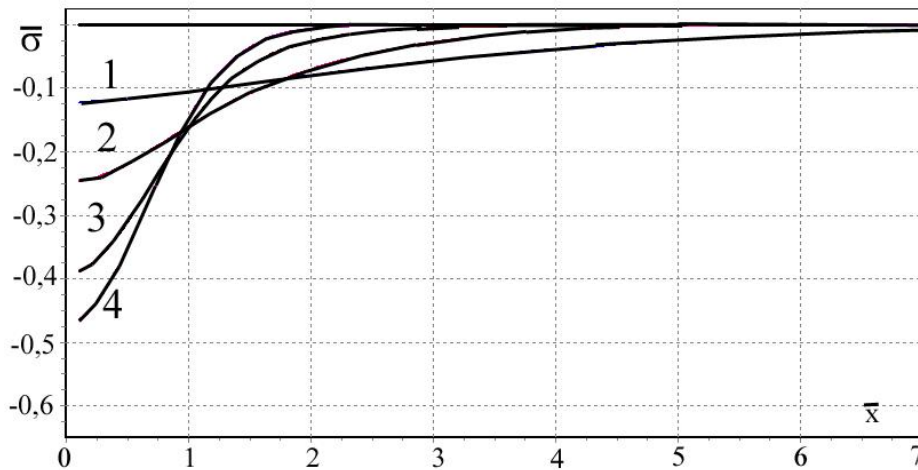
где G_1 , G_2 – модули сдвига; ν_1 , ν_2 – коэффициенты Пуассона поверхностного слоя и основного материала, h – толщина упрочненного слоя. Результаты расчетов представлены на рисунках 7.4 и 7.5, а экстремальные значения нормальных и касательных напряжений в таблице 7.2. Из представленных данных следует, что наибольшие по модулю нормальные напряжения концентрируются на оси симметрии. Уменьшение жесткости слоя (снижение B) приводит к увеличению этих напряжений при любых значениях c . В отличие от этого, более жесткие слои (кривые 1, 2 на рисунке 7.4) сглаживают пики напряжений, обеспечивая более широкое распределение нагрузки и снижая ее концентрацию в центре. Это демонстрирует благоприятное влияние жесткого поверхностного слоя, который эффективно распределяет сжимающие нормальные напряжения, снижая их максимальные значения.

Анализ касательных напряжений (рисунок 7.5) показывает, что при всех параметрах ширины нагрузки имеет место максимум модуля касательного напряжения. При $c = 0.1$ и $c = 1$ этот максимум достигает наибольшего значения для $B = 1$ (рисунок 7.5., табл. 2) При дальнейшем увеличении параметра c он перестает быть ярко выраженным и меняет

свое положение относительно кривых, соответствующим другим параметрам B .



а)

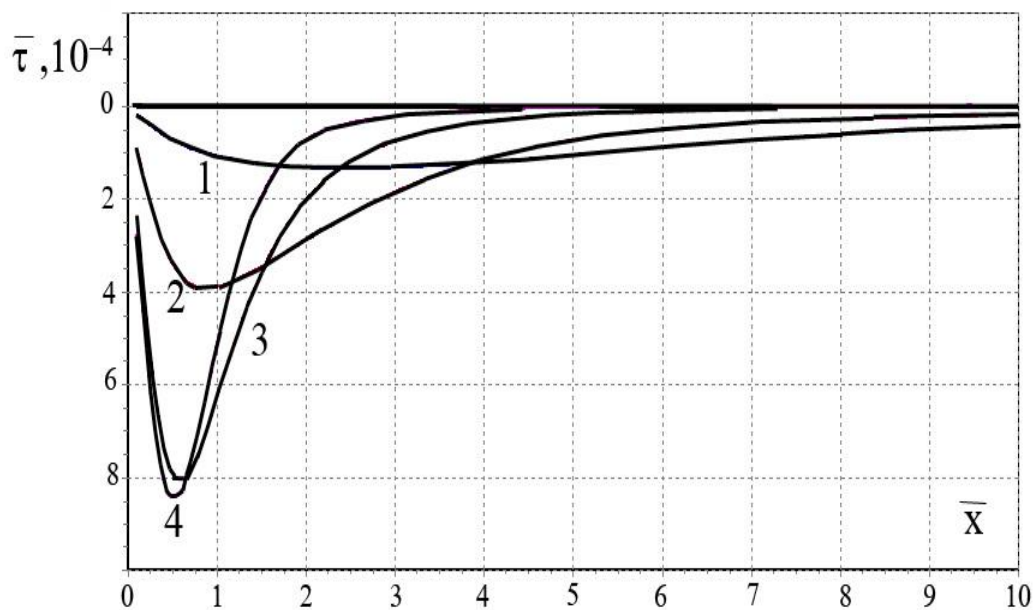


б)

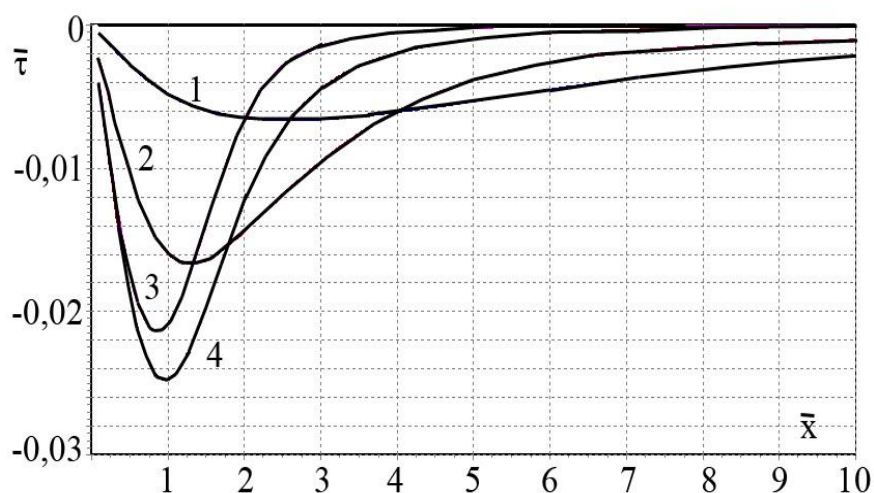
а) соответствует относительной ширине нагрузки $c=a/h=0.1$, б) $c=1$.

Цифрами обозначены: 1) $B=100$, 2) $B=10$, 3) $B=1$, 4) $B=0.01$

Рисунок 7.4 – Распределение безразмерных нормальных напряжений вдоль линии раздела сред в зависимости от безразмерной продольной координаты



а)



б)

а) соответствует относительной ширине нагрузки $c=a/h=0.1$, б) $c=1$.

Цифрами обозначены: 1) $V=100$, 2) $V=10$, 3) $V=1$, 4) $V=0.01$

Рисунок 7.5 – Распределение безразмерных нормальных напряжений вдоль линии раздела сред в зависимости от безразмерной продольной координаты

Таким образом при малых значениях c в однородных пластинах наблюдается эффект аналогичный эффекту выдавливания пробки, который наблюдается при пробивании жестких преград средней толщины.

Причиной возникновения данного эффекта являются острые пики касательных напряжений. По мере увеличения параметра "с" эти пики становятся менее выраженными, что приводит к исчезновению эффекта пробки. Максимальное значение в этом случае занимает промежуточное положение между $V > 1$ и $V < 1$. В отличие от нормальных напряжений, касательные напряжения проявляют сложную зависимость от параметров "с" и "В", что влияет на их роль в общем напряженном состоянии. Следовательно, можно заключить, что при приложении нагрузки на узкую область, создание градиентной структуры с жестким верхним слоем является более выгодным решением, в то время как однородный слой может оказаться неоптимальным.

Таблица 7.3 – Экстремальные значения напряжений в зоне сопряжения слоев

		Нормальное напряжение				Касательное напряжение			
В \ с		100	10	1	0,01	100	10	1	0,01
0,1		-0,127	-0,276	-0,489	-0,614	-0,0007	-0,0002	-0,0004	-0,00042
1		-0,122	-0,246	-0,390	-0,460	-0,0067	-0,0165	-0,0248	-0,0214
2		-0,114	-0,203	-0,276	-0,307	-0,025	-0,0490	-0,052	-0,0369
5		-0,090	-0,123	-0,137	-0,143	-0,112	-0,130	-0,0882	-0,051
7		-0,077	-0,095	-0,102	-0,105	-0,169	-0,168	-0,0984	-0,0535
10		-0,061	-0,069	-0,073	-0,075	-0,249	-0,214	-0,107	-0,051

7.2 Модель воздействия статической контактной нагрузки на градиентную структуру (трехмерный случай)

В настоящем параграфе предлагается трехмерная математическая модель воздействия статической контактной нагрузки на систему

«наплавленное покрытие / подложка». Также как и в предыдущем параграфе будем применять матричные методы теории упругости неоднородных сред. Рассмотрим задачу о равновесии полосы, которая занимает область $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-h \leq z \leq h$. Для удобства примем толщину пластины равной $2h$, а плоскость xy проходит через середину пластины [253]. На рисунке 7.6 показано распределение нагрузки на наплавленный слой.

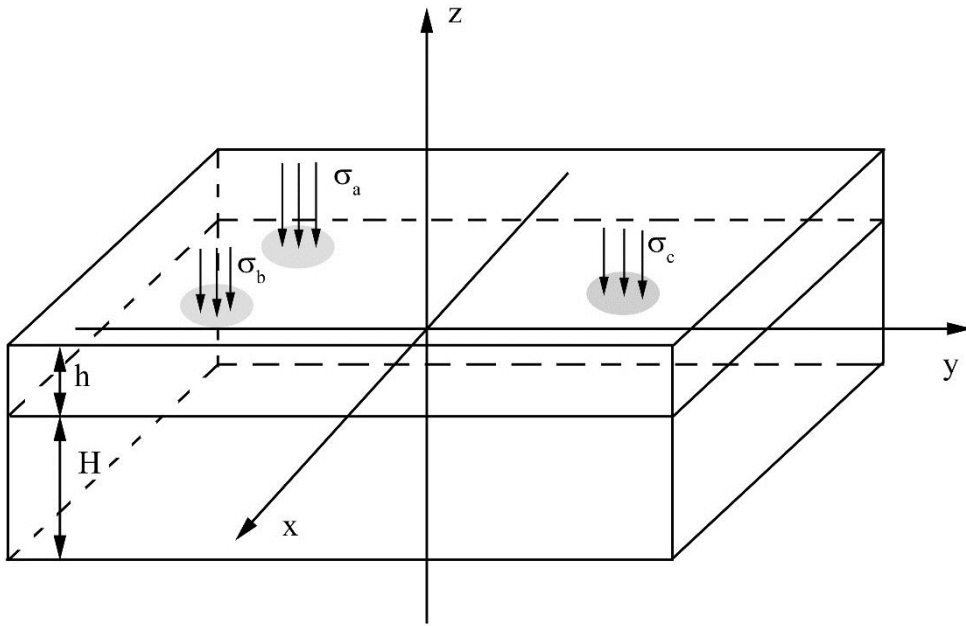


Рисунок 7.6 – К постановке задачи, о равновесии упругой полосы сцепленной с полупространством

Уравнения равновесия и обобщенный закон Гука запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \\ \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Зададим условия на границе слоев:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(x, y, h) &= \sigma_+(x, y), \sigma_{zz}(x, y, -h) = \sigma_-(x, y); \\ \sigma_{xz}(x, y, h) &= \tau_{x+}(x, y), \sigma_{xz}(x, y, -h) = \tau_{x-}(x, y); \\ \sigma_{yz}(x, y, h) &= \tau_{y+}(x, y), \sigma_{yz}(x, y, -h) = \tau_{y-}(x, y).\end{aligned}\quad (7.32)$$

Подставим уравнения закона Гука в условие равновесия и применим двумерное преобразование Фурье, в итоге получим

$$\begin{aligned}(1 - 2\nu)(U'' - n^2U) + k(iW' - (kU + mV)) &= 0, \\ (1 - 2\nu)(V'' - n^2V) + m(iW' - (kU + mV)) &= 0, \\ (1 - 2\nu)(W'' - n^2W) + W'' + i(kU' + mV') &= 0,\end{aligned}\quad (7.33)$$

Выразим линейную комбинацию двух первых уравнений (7.33) и введем обозначение, $F = kU + mV$, $\Phi = mU - kV$, тогда (7.33) сводится к системе:

$$\begin{aligned}\frac{d^4 F}{dz^4} - 2n^2 \frac{d^2 F}{dz^2} + n^4 F &= 0, \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - n^2 \Phi = 0; \\ W &= \frac{i}{n^3} \left(2(1 - \nu)F''' + (2\nu - 3)n^2 F' \right)\end{aligned}\quad (7.34)$$

Общее решение (7.34) будет иметь вид

$$\begin{aligned}F(z) &= A_1 ch(nz) + B_1 nzsh(nz) + A_2 sh(nz) + B_2 nzch(nz) \\ W(z) &= -i(A_1 sh(nz) - (nzch(nz) + sh(nz)(4\nu - 3))B_1 - \\ &- A_2 ch(nz) - (nzsh(nz) + ch(nz)(4\nu - 3))B_2, \\ \Phi(z) &= C_1 sh(nz) + C_2 ch(nz)\end{aligned}\quad (7.35)$$

Здесь A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные. Закон Гука и граничные условия (7.32) в трансформантах Фурье примут вид:

$$\begin{aligned}\Sigma_{zz} &= \frac{2\mu}{1 - 2\nu} ((1 - \nu)W' + i\nu nF), \Sigma_{xz} = \mu(U' + ikW), \Sigma_{yz} = \mu(V' + imW). \\ \Sigma_{zz}(\pm h) &= \Sigma_{\pm}; \Sigma_{xz}(\pm h) = T_{x\pm}; \Sigma_{yz}(\pm h) = T_{y\pm}.\end{aligned}\quad (7.36)$$

Выразим линейные комбинации Σ_{xz}, Σ_{yz} , в виде

$$T = k\Sigma_{xz} + m\Sigma_{yz} \text{ и } T_{\Phi} = m\Sigma_{xz} - k\Sigma_{yz}. \text{ Тогда}$$

$$T = \mu n(F' + inW), T_{\Phi} = \mu n\Phi'. \quad (7.37)$$

Таким образом трехмерная задача свелась к двум: двумерной с величинами F, W, Σ, T и одномерной с величинами Φ и T_{Φ} .

Подставим первое и второе уравнение (7.35) в (7.36) и при $z = \pm h$ в получим систему для определения A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 2i(A_1\mu ch(nh)n - (\mu sh(nh)nz^2 - 2\mu n(1-2\nu)ch(nh))B_1 - A_2\mu sh(nh)n + \\ &+ (\mu ch(nh)nz^2 - 2\mu n(1-2\nu)sh(nh))B_2, \\ T_1 &= 2\mu(A_1 sh(nh)n + B_1(ch(nh)nz^2 - n(1-2\nu)sh(nh))) + A_2 ch(nh)n + \\ &B_2(sh(nh)nz^2 - n(1-2\nu)ch(nh)), \\ \Sigma_2 &= 2i(A_1\mu ch(nh)n + (\mu sh(nh)nz^2 + 2\mu n(1-2\nu)ch(nh))B_1 + A_2\mu sh(nh)n + \\ &+ (\mu ch(nh)nz^2 + 2\mu n(1-2\nu)sh(nh))B_2, \\ T_2 &= 2\mu(-A_1 sh(nh)n + B_1(ch(nh)nz^2 + n(1-2\nu)sh(nh))) + A_2 ch(nh)n + \\ &+ B_2(-sh(nh)nz^2 - n(1-2\nu)ch(nh)). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Решение (8) запишем в виде:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_1} \left(i(nhch(nh) - (1-2\nu)sh(nh))(\Sigma_1 + \Sigma_2) + \right. \\ &\left. + ((2(1-\nu)ch(nh) - nhsh(nh))(T_1 - T_2)) \right), \\ B_1 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_1} (-ish(nh)(\Sigma_1 + \Sigma_2) + ch(nh)(T_1 - T_2)); \Delta_1 = (sh(nh)ch(nh) + nh); \\ A_2 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_2} \left(i(nsh(nh) - (1-2\nu)ch(nh))(\Sigma_1 - \Sigma_2) + \right. \\ &\left. + ((2(1-\nu)sh(nh) - nhch(nh))(T_1 + T_2)) \right), \\ B_2 &= \frac{1}{4\mu n\Delta_2} (-ich(nh)(\Sigma_1 - \Sigma_2) + sh(nh)(T_1 + T_2)); \Delta_2 = (sh(nh)ch(nh) - nh). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Подставим (7.39) в первое и второе уравнение (7.35) в итоге получим зависимости трансформант перемещений на границах слоя как функции трансформант граничных напряжений:

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_{11}\Sigma_1 + f_{12}\Sigma_2 + f_{13}T_1 + f_{14}T_2; \\
F_2 &= f_{21}\Sigma_1 + f_{22}\Sigma_2 + f_{23}T_1 + f_{24}T_2; \\
W_1 &= w_{11}\Sigma_1 + w_{12}\Sigma_2 + w_{13}T_1 + w_{14}T_2; \\
W_2 &= w_{21}\Sigma_1 + w_{22}\Sigma_2 + w_{23}T_1 + w_{24}T_2;
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Где

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{i(\alpha^2 + (1-2\nu)sh^2\alpha)}{2n\mu\Delta}, f_{12} = \frac{i\alpha(1-\nu)sh\alpha}{n\mu\Delta}, f_{13} = -\frac{i(1-\nu)(sh2\alpha - 2\alpha)}{2n\mu\Delta}, \\
f_{14} &= \frac{(1-\nu)(sh\alpha - \alpha ch\alpha)}{n\mu\Delta}; f_{21} = \frac{i\alpha(1-\nu)sh\alpha}{n\mu\Delta}, f_{22} = \frac{i(\alpha^2 + (1-2\nu)sh^2\alpha)}{2n\mu\Delta}, \\
f_{23} &= \frac{(1-\nu)(sh\alpha - \alpha ch\alpha)}{n\mu\Delta}, f_{24} = \frac{(1-\nu)(sh2\alpha - 2\alpha)}{2n\mu\Delta}; \\
w_{11} &= \frac{(1-\nu)(sh(2\alpha) + 2\alpha)}{2\mu n\Delta}, w_{12} = -\frac{(1-\nu)(sh(\alpha) + zch(\alpha))}{\mu n\Delta}, \\
w_{13} &= \frac{i(\alpha^2 + sh^2(\alpha)(1-2\nu))}{2\mu n\Delta}, \\
w_{14} &= \frac{i\alpha(sh(\alpha)(1-\nu))}{\mu n\Delta}; w_{21} = \frac{(1-\nu)(\alpha ch(\alpha) + sh(\alpha))}{\mu n\Delta}, \\
w_{22} &= -\frac{(1-\nu)(sh(2\alpha) + 2\alpha)}{2\mu n\Delta}, \\
w_{23} &= \frac{iz(sh(\alpha)(1-\nu))}{\mu n\Delta}, w_{24} = \frac{i(\alpha^2 + sh^2(\alpha)(1-2\nu))}{2\mu n\Delta}; \\
\Delta &= \Delta_1\Delta_2 = sh^2(\alpha) - \alpha^2, \alpha = nh
\end{aligned} \tag{7.41}$$

Формулы (7.40, 7.41) будут использоваться ниже, для формулировки сопряженной задачи. Пусть полупространство занимает область $z < 0$. Воспользуемся формулами (7.40, 7.41), считая, что

$$\begin{aligned}
F_{1\infty} &= F(0); W_{\infty 1} = W(0); \Sigma_{1\infty} = \Sigma(0); \\
T_{1\infty} &= T(0); F_2 = W_2 = \Sigma_2 = T_2 = 0;
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Тогда выражения для смещений при $z = 0$ выражается через напряжения по формулам

$$\begin{aligned}
F_{1\infty} &= f_{11\infty}\Sigma_{1\infty} + f_{13\infty}T_{1\infty}; W_{1\infty} = w_{11\infty}\Sigma_{1\infty} + w_{13\infty}T_{1\infty}; \\
f_{11\infty} &= \lim_{h \rightarrow \infty} f_{11}; f_{13\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} f_{13}; w_{11\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} w_{11}; w_{13\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} w_{13};
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Необходимо отметить, что коэффициент Пуассона и модуль сдвига отличаются от аналогичных величин для слоев. Вернемся к рисунку 7.6 и будем считать, что слой толщины h с упругими характеристиками (μ_1, ν_1) расположен на полупространстве (μ_2, ν_2) . На границе сопряжения выполнены условия равенства напряжений и смещений

$$F_{2s} = F_{1\infty}, W_{2s} = W_{1\infty}, \Sigma_{2s} = \Sigma_{1\infty} = \Sigma, T_{2s} = T_{1\infty} = T. \tag{7.44}$$

Используем (7.40) и (7.43) для получения системы для контактных напряжений Σ, T .

$$\begin{aligned}
f_{21}\Sigma_1 + f_{22}\Sigma + f_{23}T_1 + f_{24}T &= f_{11\infty}\Sigma + f_{13\infty}T, \\
w_{21}\Sigma_1 + w_{22}\Sigma + w_{23}T_1 + w_{24}T &= w_{11\infty}\Sigma + w_{13\infty}T.
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Решение системы (7.45)

$$\Sigma = \Sigma_{ss} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_{st} \cdot T_1; T = T_{ts} \cdot \Sigma_1 + T_{ss} \cdot T_1. \tag{7.46}$$

Выражения $\Sigma_{ss}, \Sigma_{st}, T_{ts}, T_{ss}$ и Σ_1, T_1 полностью определяют напряжения на линии контакта. Выпишем $\Sigma_{ss}, \Sigma_{st}, T_{ts}, T_{ss}$ в преобразованном виде

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ss} &= -\frac{1}{2} \frac{(((2(1-\alpha)L - 1 + 2\alpha)K - L)\exp(-\alpha) - (2(1-\alpha) + L + (1 + 2z)K)\exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL\exp(-2\alpha)}, \\
\Sigma_{st} &= \frac{1}{2} \frac{(((2\alpha(L-1) - 1)K + L)\exp(-\alpha) - (2\alpha + (1 - 2\alpha)K - L)\exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL\exp(-2\alpha)}, \\
T_{ts} &= -\frac{1}{2} \frac{(((2\alpha(L-1) - 1)K + L)\exp(-\alpha) - (2\alpha + (1 - 2\alpha)K - L)\exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL\exp(-2\alpha)}, \\
T_{ss} &= \frac{1}{2} \frac{(((2(1+\alpha)L - 1 - 2\alpha)K - L)\exp(-\alpha) - (2(1-\alpha) - L - (1 - 2z)K)\exp(\alpha))}{\exp(2\alpha) - (L + K + 4K\alpha^2) + KL\exp(-2\alpha)}
\end{aligned} \tag{7.47}$$

$$\alpha = nh$$

Выражения (7.47) и безразмерные переменные (7.48) впервые были получены в [254] для осесимметричного случая. В нашей трехмерной

задаче эти выражения появляются естественным образом. Так как касательные напряжения на границе слоя и штампа возникают благодаря силе трения, то они выражаются через нормальное напряжение, поэтому выпишем только трансформанту Фурье Σ_1 . Для этого представим двумерное преобразование Фурье напряжений при $z = h$

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma(k, m, h) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z(x, y, h) \exp(-i(kx + my)) dx dy \quad (7.48)$$

Будем считать, что нормальные напряжения распределены равномерно с постоянным значением напряжения σ_l по кругам D_l , центры которых расположены в точках с координатами x_l, y_l , радиусами r_l , где l номер круга, L – количество кругов. Значит, нормальные напряжения при $z = h$ можно записать в виде:

$$\sigma_z(x, y, h) = \sum_{l=1}^L \sigma_l \Omega(x, y, x_l, y_l) \quad (7.49)$$

Здесь $\Omega(x, y, x_l, y_l)$ носитель D_l , т.е. $\Omega(x, y, x_l, y_l) = 1$, $\Omega(x, y, x_l, y_l) = 0$, $(x, y) \notin D_l$. Пусть область D круг в плоскости (x, y) с центром в точке x_l, y_l и радиусом r_l . Тогда интеграл, входящий в (18) можно выразить

$$S_l = \sigma_l \iint_{D_l} \exp(-i(kx + my)) dx dy = \sigma_l \exp(-i(kx_l + my_l)) \frac{J_1(r_l n)}{n}. \quad (7.50)$$

Тогда трансформанту нормальных напряжений можно задать по формуле

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2\pi n} \sum_{l=1}^L \sigma_l J_1(r_l n) \exp(-i(kx_l + my_l)); \quad (7.51)$$

Используя (7.47) и (7.51) можно записать трансформанту нормальных напряжений на контакте слоев. Представим схему нахождения обратного преобразования Фурье на примере одного слагаемого из (21).

$$\Sigma = \Sigma_{ss} \cdot J_1(r_l n) \exp(-i(kx_l + my_l)). \quad (7.52)$$

Тогда обратное преобразование Фурье выражается по формуле

$$\sigma_z(x, y, 0) = \int_0^{\infty} \Sigma_{ss}(nh) J_1(r_l n) J_0(r_{pl} n) dn \quad (7.53)$$

где $r_{pl} = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}$. Для нахождения интеграла в (23) представим произведение функций Бесселя в виде ряда [255]

$$J_0(r_l n) J_1(r_{pl} n) = \frac{nr_l}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p n^{2p}}{4^p (p!)^2} (r_{pl})^{2p} F(-p, -p; 2; (r_l / r_{pl})^2); \quad (7.54)$$

Здесь $F(-p, -p; 2; \beta)$ – гипергеометрическая функция, которая выражается через полиномы степени p :

$$\begin{aligned} P_0(\beta) &= 1, P_1(\beta) = 1 + \frac{1}{2}\beta, P_2(\beta) = 1 + 2\beta + \frac{1}{3}\beta^2 \\ P_3(\beta) &= 1 + \frac{9}{2}\beta + 3\beta^2 + \frac{1}{4}\beta^3, P_4(\beta) = 4\beta^3 + 12\beta^2 + 8\beta + \frac{1}{5}\beta^4 \end{aligned} \quad (7.55)$$

где $\beta = \left(\frac{r_l}{r_{pl}}\right)^2$. Подстановка (7.55) в (7.54) позволяет получить

$$\sigma_z(x, y, 0) = \frac{r_l}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} (r_{pl})^{2p} P_p((r_l / r_{pl})^2) I_p \quad (7.56)$$

где

$$I_p = \frac{1}{h^{2p+2}} \int_0^{\infty} \alpha^{2p+1} \Sigma_{ss}(\alpha) d\alpha \quad (7.57)$$

Таким образом, вся процедура нахождения нормального напряжения на границе слоев сводится к интегрированию (7.57). Можно получить приближенное выражение для $\Sigma_{ss}(\alpha)$ в виде

$$\Sigma_{ss}(\alpha) \approx \Sigma_p(\alpha) = \Sigma_{\max} \alpha / \alpha_{\max} \exp(1 - \alpha / \alpha_{\max}). \quad (7.58)$$

Где α_{\max} – значение аргумента, при котором $\Sigma_{ss}(\alpha)$ достигает экстремума, при этом $\Sigma_{ss}(\alpha_{\max}) = \Sigma_{\max}$. На рисунке 7.7 показаны зависимости $\Sigma_{ss}(\alpha), \Sigma_p(\alpha)$, из которых видно хорошая аппроксимация

сложной функции $\Sigma_{ss}(\alpha)$ простой $\Sigma_p(\alpha)$. Аналогичный подход используют многие исследователи, начиная с пионерской работы Снеддона [255]. Тогда (7.58) примет вид

$$I_p = e \Sigma_{\max} \left(\frac{\alpha_{\max}}{h} \right)^{2p+2} (2p+2)! \quad (7.59)$$

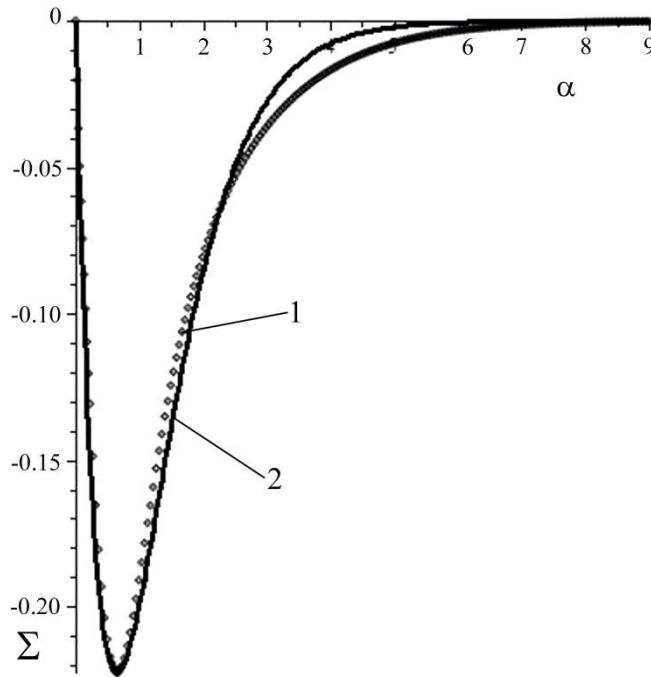


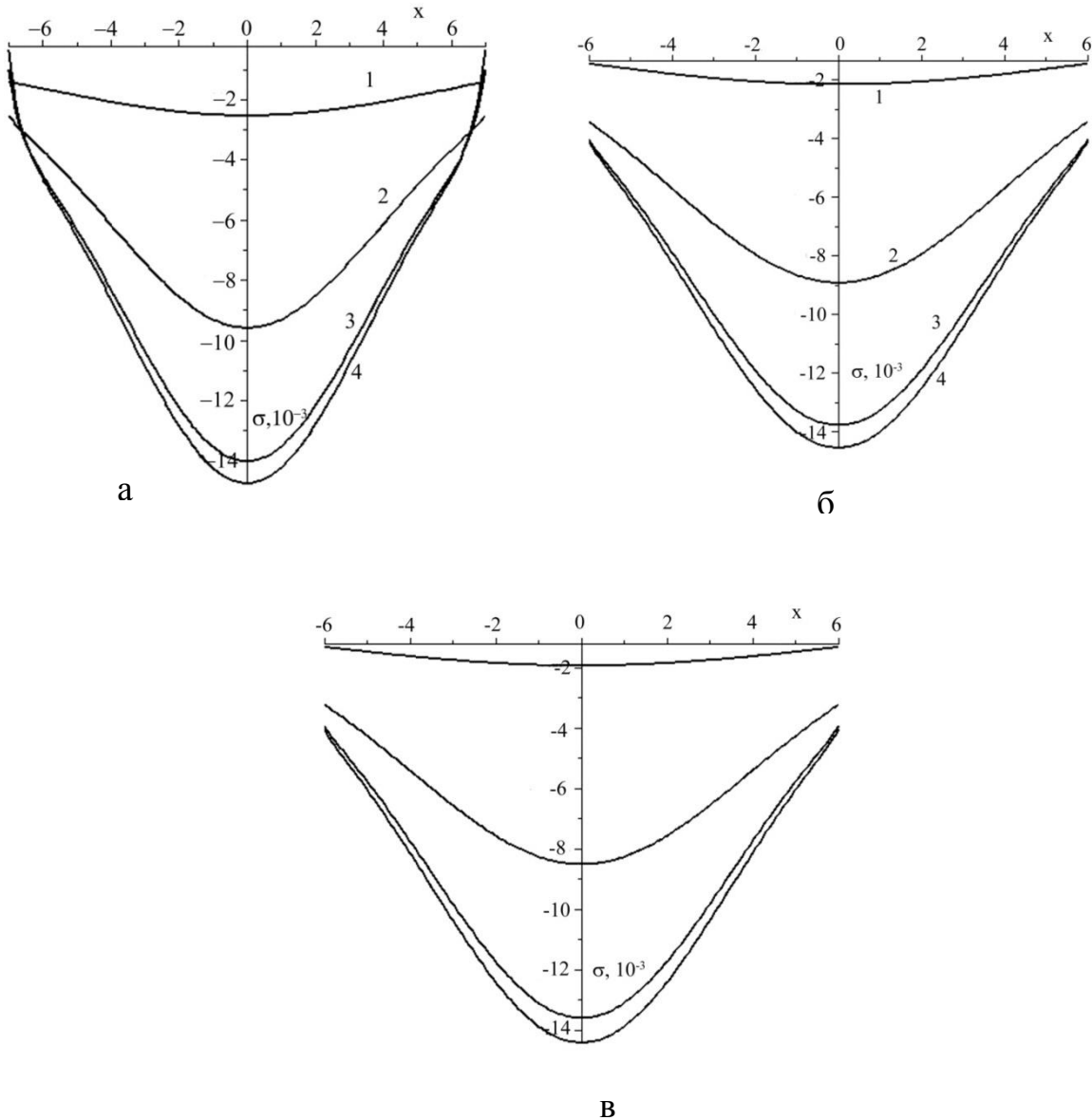
Рисунок 7.7 – Аппроксимация трансформанты $\Sigma_{ss}(\alpha)$ (кривая 1) функцией $\Sigma_p(\alpha)$ (кривая 2)

Действие от l -той нагрузки приводит к нормальным напряжениям в интерфейсе, для которых

$$\sigma_z(x, y, 0) = \frac{r_l e \Sigma_{\max}}{2} \left(\frac{\alpha_{\max}}{h} \right)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+2)!}{4^p (p!)^2} \left(\frac{r_{pl} \alpha_{\max}}{h} \right)^{2p} P_p(\beta) \quad (7.60)$$

Рассмотрим случай $x_l = 0$, $y_l = 0$. На рис. 3 а приведены зависимости напряжения σ_z на границе слое от координаты x при значениях $\nu_1 = 0.33$, $\nu_2 = 0.45$. Видно, что вне зависимости от отношения модулей сдвига значения напряжения принимают отрицательное значение. По мере

удаления от области приложения нагрузки значение сжимающих напряжений идет на спад. В случае мягких покрытий (рисунок 7.8 (а – в) кривые 2 – 4) значение σ_{zm} увеличивается. Аналогичная ситуация возникает в случае $\nu_1 = \nu_2$ (рисунок 7.8 б) и $\nu_1 > \nu_2$ (рисунок 7.8 в).



а – $\nu_1 = 0,33, \nu_2 = 0,45$; б – $\nu_1 = \nu_2 = 0,45$, в – $\nu_1 = 0,45, \nu_2 = 0,33$

1 – $B = 0,1$; 2 – $B = 1$; 3 – $B = 10$; 4 – $B = 100$

Рисунок 7.8 – Распределение нормальной компоненты тензора напряжений на границе раздела покрытие /подложка

В случае, если $x_l \neq 0$, $y_l \neq 0$ аналитический вид кривых практически не изменяется. Разница лишь в том, что максимум нормальных сжимающих напряжений будет приходиться на x_l, y_l .

В таблице 7.4 приведены данные об изменении максимального значения нормальных напряжений от толщины покрытий при различных значениях отношений модулей сдвига. В качестве примера взят случай $\nu_1 = 0.33$, $\nu_2 = 0.45$.

Из данных таблицы следует, что с ростом толщины покрытий значение максимума нормальных напряжений снижается. Таким образом, следует заключить, что более жесткие покрытия способствуют более равномерному распределению сжимающих напряжений по границе контакта.

Таблица 7.4 – Экстремальные значения напряжений в зоне контакта слоев

	Нормальное напряжение, $\sigma/\sigma_0, 10^{-3}$					
B/h	0.01	0.1	0.5	1	10	100
4	-1.95	-15.4	-45	-55.6	-80.1	-84.2
6	-0.87	-7.9	-20.9	-25.9	-37.8	-39.7
8	-0.49	-3.96	-11.9	-14.9	-21.7	-22.8
10	-0.3	-2.5	-7.6	-9.6	-14	-14.7
30	-0.03	-0.29	-0.87	-1.1	-1.6	-1.67

$\sigma_0 = P/S$, P – нагрузка, S – площадь пятна контакта.

7.3 Напряженно-деформированное состояние градиентного материала при действии наклонной контактной нагрузки

Эксплуатация крупногабаритных изделий, таких как ковши экскаваторов, кузова самосвалов показывает, что основными видами износа этих изделий являются истирающий и ударно-абразивный [256,

257]. Истирающему износу обычно подвергаются днище и внутренние поверхности передней и боковых стенок ковша, а также задняя крышка. Днище ковша подвержено истирающему износу в наибольшей степени [258]. Для борьбы с этими явлениями применяется метод футеровки, который заключается в приваривании на поверхности ковша бронеплит из износостойких сталей [259, 260]. Для увеличения срока службы бронеплит в [259] предложена технология нанесения на их поверхность композиционного покрытия методом электродуговой наплавки. Для научно-обоснованного выбора материала наплавки необходимо знать особенности распределения напряжений на границе наплавленного материала, чтобы не допустить его отслоения. Расчеты напряженно-деформированного состояния наплавленного покрытия при статической нормальной контактной нагрузке показывают, что на таких границах возникают сжимающие нормальные напряжения, что позволяет сделать вывод о том, что более жесткие покрытия способствуют более равномерному распределению напряжений на границе контакта слоев [250]. Как известно, в истирающий износ большой вклад вносят касательные напряжения, однако не следует сбрасывать со счетов вклад нормальных напряжений, поэтому в настоящей статье будет решена задача о нахождении распределения напряжений на границе «наплавленный слой / подложка» при статической наклонной нагрузке.

Так же как и в [253] рассмотрим задачу о равновесии полосы, занимающей область $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-h < z < h$ (рисунок 7.9).

Будем считать ее толщину равной $2h$, а начало координат поместим в середину полосы. Запишем уравнения равновесия и обобщенный закон Гука для покрытия и подложки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \\ \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7.61)$$

где u, v, w – компоненты вектора перемещения; μ – модуль сдвига; λ – постоянная Ламе. Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, y, h) &= \sigma_+(x, y), \quad \sigma_{zz}(x, y, -h) = \sigma_-(x, y); \\ \sigma_{xz}(x, y, h) &= \tau_{x+}(x, y), \quad \sigma_{xz}(x, y, -h) = \tau_{x-}(x, y); \\ \sigma_{yz}(x, y, h) &= \tau_{y+}(x, y), \quad \sigma_{yz}(x, y, -h) = \tau_{y-}(x, y). \end{aligned} \quad (7.62)$$

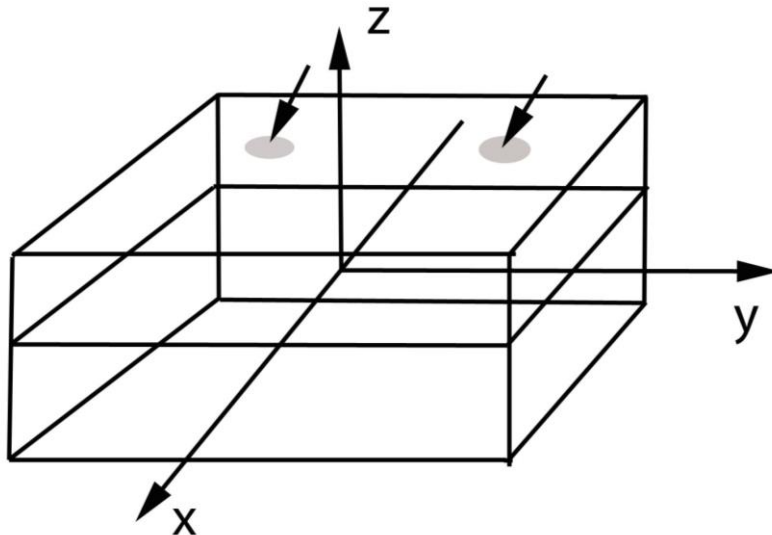
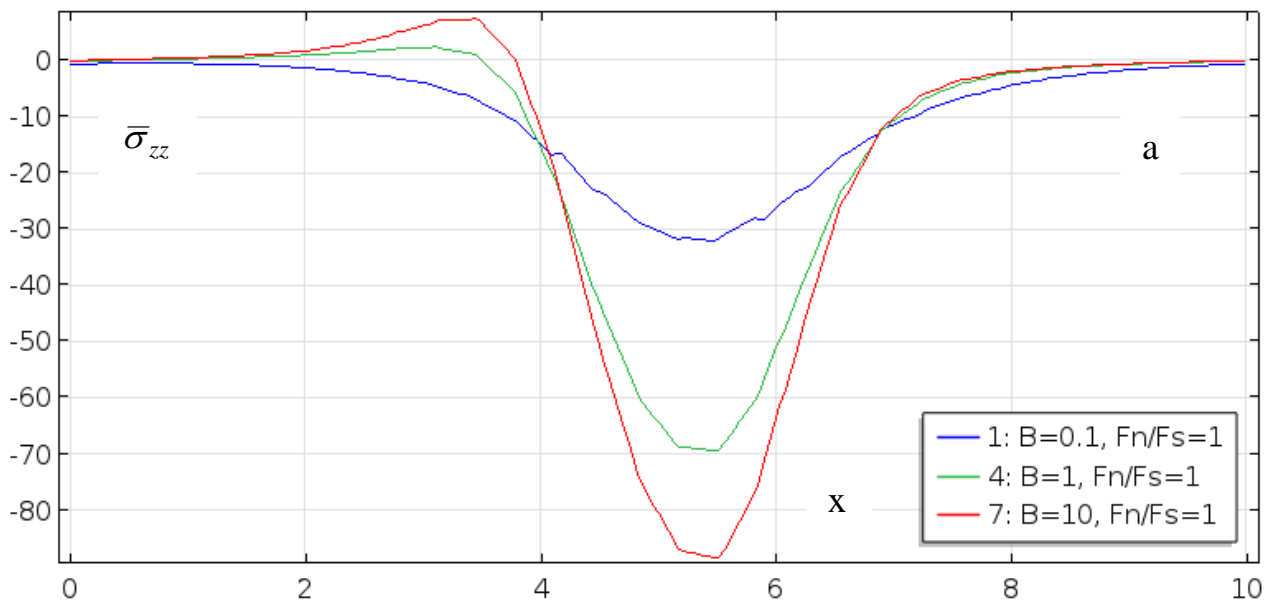


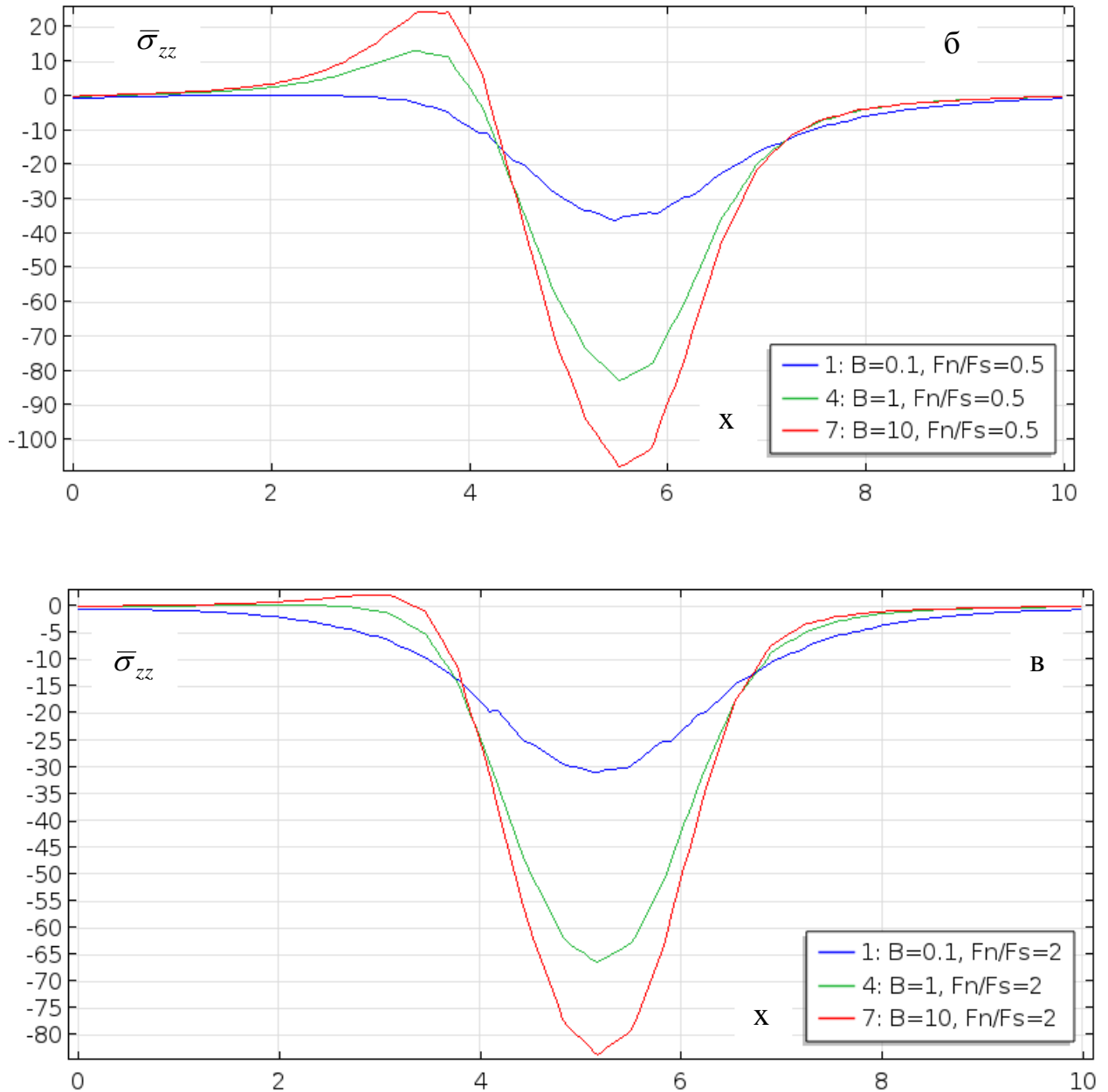
Рисунок 7.9 – К постановке задачи о действии наклонной контактной нагрузки

Для решения поставленной задачи применим метод конечных элементов. Зададим безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= (x, y, z) / h, (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) / h, \\ (\bar{\sigma}_z, \bar{\sigma}_x, \bar{\tau}) &= (\sigma_z, \sigma_x, \tau) / (\sigma_0^2 + \tau_0^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

На рисунке 7.10 представлены результаты расчетов нормальных напряжений σ_{zz} на границе раздела слоев при равенстве нормальных и касательных нагрузок. Видно, что, если отношение модулей упругости подложки и покрытия $B \geq 1$, наблюдается зона растягивающих напряжений в интервале $2 < x < 3,7$. При этом максимум растягивающих напряжений составляет $\bar{\sigma}_{zz \max} = 9$ при $B = 10$ и $\bar{\sigma}_{zz \max} = 3$ при $B = 1$. Если $B < 1$, то зоны растягивающих напряжений не наблюдается. Максимальное значение сжимающих напряжений с ростом модуля упругости подложки также увеличивается, причем при значении модуля упругости на порядок меньшим модуля упругости покрытия распределение напряжения по координате более равномерно. Схожая картина наблюдается при $F_n / F_s = 0,5$, однако зона растягивающих напряжений наблюдается в интервале $1 < x < 4,2$.





а – $F_n/F_s = 1$; б – $F_n/F_s = 0.5$; в – $F_n/F_s = 2$

Рисунок 7.10 – Распределение нормальных напряжений на границе раздела «покрытие/подложка»

Максимальное значение напряжений составляет $\bar{\sigma}_{zz \max} = 22$ для $B = 10$ и $\bar{\sigma}_{zz \max} = 12$ для $B = 1$. Возрастание значения F_n/F_s до 2 приводит к снижению максимальных растягивающих напряжений (рисунок 7.10 в) до значений $\bar{\sigma}_{zz \max} = 3$ при $B = 10$. Если $F_n = 0$ (рисунок 7.11) то при $B = 10$, $\bar{\sigma}_{zz \max} = 25$ и $\bar{\sigma}_{zz \max} = 17$ при $B = 1$.

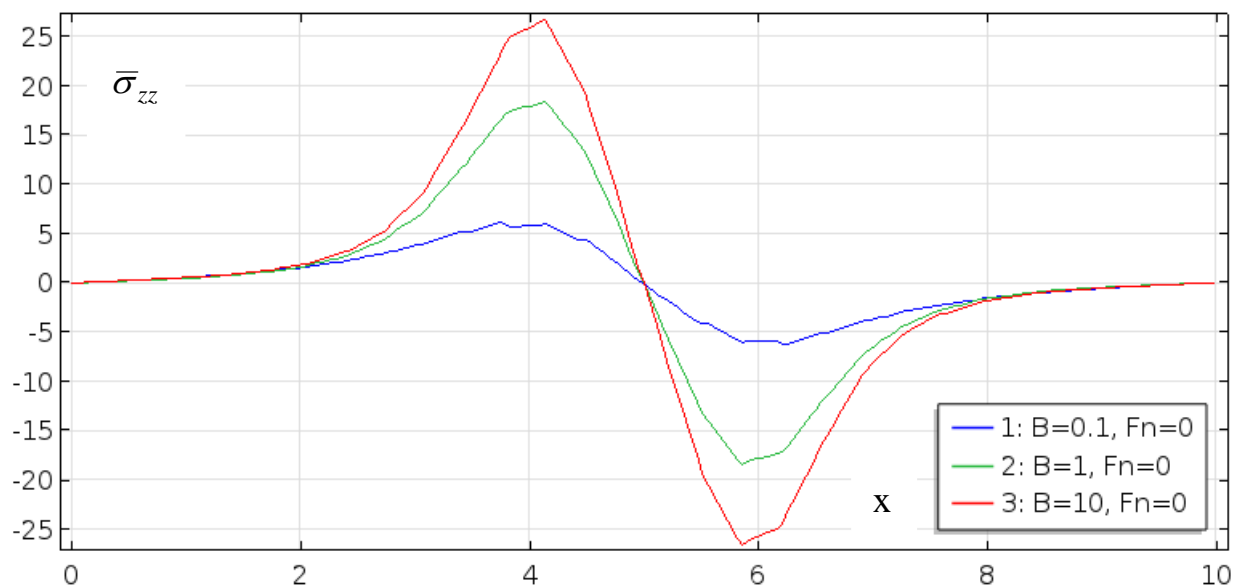


Рисунок 7.11 – Распределение нормальных напряжений на границе “покрытие/подложка” при $F_n = 0$

Выводы по главе

1. Проведен расчет полей нормальных и касательных напряжений на границе «упрочненный поверхностный слой / подложка» методами теории упругости неоднородных сред при воздействии статической контактной нагрузки, которая имеет треугольное распределение. Установлено, что в случае жестких поверхностных слоев и малой ширине нагрузки в материале выгодно создавать градиентную структуру с жестким верхним слоем, при этом однородный слой может оказаться неблагоприятным.
2. С помощью матричного алгоритма решена двухслойная задача теории упругости неоднородных сред в трехмерном случае при действии статической контактной нагрузки, распределенной по кругу. Получена матрица перехода между слоями, имеющая блочно-

диагональный вид. Найдено распределение нормальных напряжений по ширине изделия. Его аналитический вид – ряд по гипергеометрическим функциям. Показано, что, как и в двумерном случае, поверхностные слои с более высоким, чем у подложки модулем упругости способствуют более равномерному распределению нормальных напряжений.

3. В результате решения трехмерной задачи теории упругости при действии наклонной нагрузки выявлен характер распределения напряжений на границе наплавленного покрытия и подложки из низкоуглеродистой стали. Показано, что жесткие покрытия с модулем упругости на порядок большим модуля упругости способствуют равномерному распределению нормальных напряжений, причем эти напряжения будут сжимающими.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В результате проведенного теоретического исследования выявлены физические механизмы и разработаны физико-математические модели процессов формирования градиентных структур в материалах при внешних энергетических воздействиях. Выполненные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Исследование позволило получить приближенные аналитические соотношения, устанавливающие зависимость инкремента неустойчивости Кельвина – Гельмгольца от волнового числа для двух дискретных диапазонов длин волн. Полученные явные аналитические выражения инкремента в зависимости от волнового числа предназначены для параметризации экспериментальных данных, описывающих динамику сдвиговых неустойчивостей в микро- и наноструктурированных средах.
2. Создана модель формирования гетерогенного плазменного потока в торцевом плазменном ускорителе при электрическом взрыве проводников с тремя характерными зонами. Установлено, что в первой зоне течение реализуется параллельно оси ускорителя. Во второй зоне происходит разворот течения на 90° . В третьей зоне линии электрического тока параллельны диэлектрической шайбе. Показано, что развитие этой зоны параметризуется нульмерной моделью. С помощью метода конечных элементов получены распределения скорости, плотности электрического тока и поле силы Лоренца вблизи первой зоны и показано, что течение подобно течению в плазменном фокусе.
3. Предложен и математически обоснован гидродинамический механизм образования градиентных структурно-фазовых состояний

при обработке гетерогенными плазменными потоками, заключающийся в возникновении неустойчивости течения материалов на границе «плазма/расплав». Показано, что поверхностные периодические структуры образуются в результате термокапиллярной неустойчивости. Образование наноструктурных слоев в материале обусловлено возникновением неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Перемешивание материалов при такой обработке происходит вследствие неустойчивости Релея-Тейлора.

4. Проведено моделирование воздействия низкоэнергетических сильноточных электронных пучков на титан. Разработаны тепловая модель с учетом фазовых переходов, модели возникновения термоупругих волн, растворения легирующих элементов и формирования ячеистых наноструктур. Экспериментальные данные свидетельствуют о линейной связи между глубиной проплавления и плотностью энергии. Выявлен биполярный характер возникающей термоупругой волны, который обусловлен сменой режимов нагрева и охлаждения. Наличие участков с удвоенным расширением у тыльной границы и удвоенным сжатием материала у лицевой поверхности приводит к немонотонному (неоднородному) изменению микротвердости в зависимости от глубины.
5. Выявлены закономерности диффузного растворения легирующих элементов в системе «титан – углерод» при электронно-пучковой обработке. Показано, что время растворения частиц углерода микрометрового размера в 10^6 раз больше, чем наноразмерных частиц. В процессе комбинированной обработки (гетерогенные плазменные потоки и электронно-пучковая обработка) для создания однородного слоя карбида титана рекомендуется использовать углеродные частицы наноразмерного диапазона.

6. На основе теоретического анализа термокапиллярной неустойчивости обосновано образование ячеистых наноструктур на поверхности облученных материалов. Показано, что возникающий вследствие градиента температур максимум инкремента термокапиллярной неустойчивости приходится на нанометровый диапазон длин волн. Установлено, что возмущения с такой длиной волны будут наиболее неустойчивыми, и поэтому будут генерироваться наноразмерные ячейки. Численное решение уравнений модели с учетом кривизны поверхности показало, что в момент окончания действия импульса в расплавленном слое материала начинает формироваться многовихревая структура. Размер ванны расплава увеличивается как в горизонтальном, так и вертикальном направлениях, что способствует миграции частиц на расстояния, превышающие глубину проникновения по механизму диффузии.
7. Предложена математическая модель расчета распределения температурных полей при прерывистом охлаждении проката. Найдено значение коэффициента теплопередачи из сравнения установившейся температуры проката и экспериментально измеренной. Из численного решения краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности найдены распределения температур по сечению и получены зависимости температуры от времени. Эти зависимости являются основой для прогнозирования структурно-фазовых превращений при термомеханическом упрочнении.
8. Предложен механизм ускоренного охлаждения проката, заключающийся в прохождении капель жидкости, образовавшихся вследствие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, через паровую пленку. Капли, попадая на прокат, возбуждают термоупругую волну,

которая, распространяясь его сечению, инициирует протекание структурно-фазовых превращений.

9. С помощью уравнений Колмогорова-Аврами и интеграла Шейля исследована кинетика распада аустенита в арматурной стали при прерывистом охлаждении. Построены диаграммы структурно-фазовых превращений по сечению проката.
10. Изучено воздействие контактных нагрузок на градиентную структуру материалов. Установлено, что покрытия, модуль упругости которых на порядок больше модуля упругости подложки, способствуют равномерному распределению нормальных напряжений.
11. Предложен механизм образования наноструктур в материале при интенсивной пластической деформации. Он основан на представлениях о гидродинамическом течении материала в полосах сдвига. Полосы сдвига являются поверхностями разрыва скорости, на которых возникает неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, приводящие к образованию фрагментов нано- и микрогабаритного диапазона.
12. На основе обобщения и анализа результатов исследований процессов формирования градиентных структур в материалах при внешних энергетических воздействиях даны рекомендации по определению режимов ускоренного охлаждения проката, сварки, электродуговой наплавки и плазменного упрочнения крупногабаритных изделий на предприятиях Кемеровской области с суммарным экономическим эффектом 4,6 млн. руб/год. Результаты диссертации использованы в научной деятельности и учебном процессе в ФГБОУ ВО «Сибирский государственный индустриальный университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багаутдинов, А.Я. Физические основы электровзрывного легирования металлов и сплавов [Текст] / А.Я. Багаутдинов, Ю.Ф. Будовских, Ю.Ф. Иванов [и др.]. – Новокузнецк: СибГИУ, 2007. – 301 с.
2. Глезер, А.М. Наноматериалы: структура, свойства, применение [Текст] / А.М. Глезер, В.Е. Громов, Ю.Ф. Иванов [и др.]. – Новокузнецк: «Интер-Кузбасс», 2012. – 423 с.
3. Сарычев, В.Д. Образование наноразмерных структур в металлах при воздействии импульсных плазменных струй электрического взрыва [Текст] / В.Д. Сарычев, Е.С. Ващук, Е.А. Будовских [и др.] // Письма в Журнал технической физики. – 2010. – Т. 36. – № 14. – С. 41-48.
4. Сарычев, В.Д. Изучение поведения металлов в процессе импульсного деформирования при совместном действии электротока [Текст] / В.Д. Сарычев, Е.В. Евстифеев, В.Е. Громов // Действие электромагнитных полей на пластичность и прочность металлов и сплавов: Тез. Док. I Всесоюзной конф. – Юрмала, 1987.
5. Сарычев, В.Д. Особенности поверхностного легирования металлов импульсными потоками плазмы электрически взрывааемых проводников [Текст] / В.Д. Сарычев, В.А. Петрунин, Е.А. Будовских [и др.] // Изв.вузов. Черная металлургия. – 1991. – № 4. – С. 64-67.
6. Сарычев, В.Д. Математическое моделирование и исследование формирования конвективных структур в металлах и сплавах при воздействии импульсных многофазных плазменных струй [Текст] / В.Д. Сарычев, С.П. Мочалов, Е.А. Будовских [и др.] // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2010. – № 6. – С. 44-49.
7. Nusselt, W. Die oberflächenkondensation des wasserdampfes / W. Nusselt // VDI-Zs. – 1916. – Vol. 60. – P. 541-546.

8. Капица, П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости [Текст] / П.Л. Капица // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18. – № 1. – С. 3.
9. Холпанов, Л.П. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела [Текст] / Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов, В.А. Малюсов. – М.: Наука, 1990. – 271 с.
10. Алексеенко, С.В. Волновое течение пленок жидкости [Текст] / С.В. Алексеенко, В.Е. Накоряков, Б.Г. Покусаев. – Наука, 1992. – 256 с.
11. Chang, H. Complex wave dynamics on thin films. Vol. 14 / H. Chang, E.A. Demekhin. – Elsevier, 2002. – 402 p.
12. Шкадов, В.Я. Волновые движения пленок жидкости на вертикальной поверхности (теория для истолкования экспериментов) [Текст] / В.Я. Шкадов, Е.А. Демехин // Успехи механики. – 2006. – Т. 4. – № 2. – С. 3-6.
13. Трифонов, Ю.Я. Расчет волнового стекания пленок в рамках уравнений Навье-Стокса [Текст] / Ю.Я. Трифонов // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 416. – С. 195-199.
14. Трифонов, Ю.Я. Расчет устойчивости волнового стекания пленок с использованием уравнений Навье-Стокса [Текст] / Ю.Я. Трифонов // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49. – № 2. – С. 239-252.
15. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости [Текст] / Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 288 с.
16. Григорьев, А.И. Параметрические и нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости [Текст] / А.И. Григорьев, А.В. Климов, С.В. Черникова [и др.]. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – 170 с.
17. Григорьев, А.И. О структуре течения, связанного с капиллярно-гравитационной волной в заряженном слое вязкой электропроводной

- жидкости на твердом дне [Текст] / А.И. Григорьев, Д.М. Пожарицкий, С.О. Ширяева // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79. – № 2. – С. 51-57.
18. Авербух Е.Л. Дисперсионные свойства волн на поверхности вязкой жидкости, покрытой упругой пленкой [Текст] Т// Е.Л. Авербух Е.Л., А.А. Куркин, Ю.А. Степанянц, Т.Г. Талипова. // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 6. С. 99–107.
19. Андреев, В.К. Современные математические модели конвекции [Текст] / В.К. Андреев, Ю.А. Гапоненко, О.Н. Гончарова [и др.]. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с
20. Андреев, В.К. Термокапиллярная неустойчивость [Текст] / В.К. Андреев, В.Е. Захватаев, Е.А. Рябицкий [и др.]. – Новосибирск: Наука, 2000. – 280 с.
21. Ilyuschenko, A.P. Friction and wear of powder coatings produced by using high-energy pulsed flows / A.P. Ilyuschenko, A.I. Shevtsov, V.M. Astashynski [et al.] // High Temperature Material Processes: An International Quarterly of High-Technology Plasma Processes. – 2015. – Vol. 19. – № 2. – P. 141-152.
22. Huang, Z.T. Effect of heat treatment on microstructure and property of TC18 titanium alloy prepared by electron beam rapid manufacturing / Z.T. Huang, H.B. Suo, G. Yang [et al.] // Trans. Mater. Heat Treat. – 2015. – Vol. 36. – P. 50-54.
23. Silva, M.R. da. Laser surface remelting of a Cu-Al-Ni-Mn shape memory alloy / M.R. da Silva, P. Gargarella, T. Gustmann [et al.] // Materials Science and Engineering: A. – 2016. – Vol. 66. – P. 161-167.
24. Chen, X. Investigation of microstructures and residual stresses in laser peened Incoloy 800H weldments / X. Chen, J. Wang, Y. Fang [et al.] // Optics & Laser Technology. – 2014. – Vol. 57. – P. 159-164.

25. Hu, J.J. Microstructural modification of brush-plated nanocrystalline Cr by high current pulsed electron beam irradiation / J.J. Hu, L.J. Chai, H. Bin Xu [et al.] // Journal of Nano Research. – 2016. – Vol. 41. – P. 87-95.
26. Zhiming, Z. Microstructure and properties of CuFe10 alloys treated by high current pulsed electron beam / Z. Zhiming, C. Baofeng, X. Hongmei [et al.] // High Power Laser and Particle Beams. – 2015. – Vol. 27. – P. 024105.
27. Devyatkov, V.N. Generation and propagation of high-current low-energy electron beams / V.N. Devyatkov, N.N. Koval, P.M. Schanin [et al.] // Laser and Particle Beams. – 2003. – Vol. 21. – № 2. – P. 243-248.
28. Sosnin, K. V. Morphology of the surface of technically pure titanium VT1-0 after electroexplosive carbonization with a weighed zirconium oxide powder sample and electron beam treatment / K. V Sosnin, S. V Raykov, E.S. Vaschuk [et al.] // AIP Conference Proceedings. – 2014. – Vol. 1623. – P. 603-606.
29. Sosnin, K. V. Formation of a microcomposite structure in the surface layer of yttrium-doped titanium / K. V Sosnin, S. V Raikov, V.E. Gromov [et al.] // Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. – 2015. – Vol. 9. – № 2. – P. 377-382.
30. Ivanov, Y.F. Surface layer of commercially pure VT1-0 titanium after electric-explosion alloying and subsequent treatment by a high-intensity pulsed electron beam / Y.F. Ivanov, A.D. Teresov, E.A. Petrikova [et al.] // Steel in Translation. – 2013. – Vol. 43. – № 12. – P. 798-802.
31. Markov, A.B. Calculation and experimental determination of dimensions of hardening and tempering zones in quenched U7A steel irradiated with a pulsed electron beam / A.B. Markov, V.P. Rotshtein // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. – 1997. – Vol. 132. – № 1. – P. 79-86.

32. Markov, A.B. Mechanisms for hardening of carbon steel with a nanosecond high-energy, high-current electron beam / A.B. Markov, Y.F. Ivanov, D.I. Proskurovsky [et al.] // *Materials and Manufacturing processes*. – 1999. – Vol. 14. – № 2. – P. 205-216.
33. Leyvi, A.Y. Modification of the Constructional Materials with the Intensive Charged Particle Beams and Plasma Flows / A.Y. Leyvi, K.A. Talala, V.S. Krasnikov [et al.] // *Ser. Mech. Eng. Ind.* – 2016. – Vol. 16. – P. 28-55.
34. Mazhukin, V.I. Mathematical modeling of dynamics of fast phase transitions and overheated metastable states during nano-and femtosecond laser treatment of metal targets / V.I. Mazhukin, A. V Mazhukin, M.G. Lobok // *Mathematical Models and Computer Simulations*. – 2010. – Vol. 2. – № 3. – P. 396-405.
35. Bleykher, G.A. Thermal Processes and Emission of Atoms from the Liquid Phase Target Surface of a Magnetron Sputtering System / G.A. Bleykher, V.P. Krivobokov, A.V. Yuryeva // *Russian Physics Journal*. – 2015. – Vol. 58. – № 4. – P. 431-437.
36. Yalovets, A.P. Calculation of flows of a medium induced by high-power beams of charged particles / A.P. Yalovets // *Journal of applied mechanics and technical physics*. – 1997. – Vol. 38. – № 1. – P. 137-150.
37. Khaimzon, B.B. Temperature distribution produced by pulsed energy fluxes, with evaporation of the target / B.B. Khaimzon, V.D. Sarychev, N.A. Soskova [et al.] // *Steel in Translation*. – 2013. – Vol. 43. – № 2. – P. 55-58.
38. Mayer, A.E. Mechanical stresses in an irradiated target with a disturbed surface / A.E. Mayer, A.P. Yalovets // *Technical physics*. – 2006. – Vol. 51. – № 4. – P. 459-465.
39. Chumakov, Y.A. Interrelated processes of heat mass transfer and stress evolution in a disk with an inclusion under the action of high density energy

- flow / Y.A. Chumakov, A.G. Knyazeva // *Phys. Mesomech.* – 2013. – Vol. 16. – P. 85-91.
40. Sarychev, V.D. Mathematical model of generation of the thermoplastic waves under action of concentrated energy fluxes at the materials [Текст] / V.D. Sarychev, M.S. Voloshina, V.E. Gromov // *Basic Probl. Mater. Sci.* – 2011. – Т. 8. – С. 71-76.
41. Любов, Б.Я. Диффузионные процессы в неоднородных твердых средах [Текст] / Б.Я. Любов. – М.: Наука, 1981. – 296 с.
42. Bukrina, N. V. Numerical solution algorithm for non-isothermal diffusion problems in surface treatment processes / N. V Bukrina, A.G. Knyazeva // *Phys. Mesomech.* – 2006. – Vol. 9. – P. 55-62.
43. Knyazeva, A.G. Simulation issues of surface treatment and coating materials using high energy sources / A.G. Knyazeva, O.N. Krukova, O. V Bukrina [et al.] // *Izv. TPU.* – 2010. – Vol. 317. – P. 93-101.
44. Merzhanov, A.G. The present state of the thermal ignition theory: An invited review / A.G. Merzhanov, A.E. Averson // *Combustion and Flame.* – 1971. – Vol. 16. – № 1. – P. 89-124.
45. Nekrasov, E.A. Adiabatic heating in the titanium-carbon system / E.A. Nekrasov, V.K. Smolyakov, Y.M. Maksimov // *Combustion, Explosion and Shock Waves.* – 1981. – Vol. 17. – № 3. – P. 305-311.
46. Khina, B.B. Combustion synthesis of advanced materials (Chemistry Research and Applications Series) / B.B. Khina. – New York: Nova Science Publishers, 2010. – 110 p.
47. Aleksandrov, V. V. Mechanism and macrokinetics of reactions accompanying the combustion of SHS systems / V. V Aleksandrov, M.A. Korchagin // *Combustion, Explosion and Shock Waves.* – 1987. – Vol. 23. – № 5. – P. 557-564.

48. Sarychev, V.D. Mathematical model of dissolution of carbon particles in the titan at influence of the concentrated streams of energy [Текст] / V.D. Sarychev, B.B. Khaimzon, V.E. Gromov [и др.] // Titan. – 2012. – Т. 1. – С. 4-8.
49. Грановский, А.Ю. Модель формирования внутренних нанослоев при сдвиговых течениях материалов [Текст] / А.Ю. Грановский, В.Д. Сарычев, В.Е. Громов // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83. – № 10. – С. 155-158.
50. Sarychev, V.D. Viscous flow analysis of the Kelvin--Helmholtz instability for short waves / V.D. Sarychev, S.A. Nevskii, E. V Sarycheva [et al.] // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1783. – P. 020198.
51. Inogamov, N.A. Solitary nanostructures produced by ultrashort laser pulse / N.A. Inogamov, V. V Zhakhovsky, V.A. Khokhlov [et al.] // Nanoscale research letters. – 2016. – Vol. 11. – № 1. – P. 177.
52. Suh, K.Y. Capillarity-assisted fabrication of nanostructures using a less permeable mold for nanotribological applications / K.Y. Suh, H.E. Jeong, D.-H. Kim [et al.] // Journal of applied physics. – 2006. – Vol. 100. – № 3. – P. 034303.
53. Prokoshev, V.G. Mathematical modelling of the temperature fields induced under the laser processing material / V.G. Prokoshev, S.D. Parfionov, T.A. Obgadze // Proceedings of the International conference on laser assisted net shape engineering LANE. – Erlangen, 2001. – P. 185-190.
54. Galkin, A.F. Laser-induced hydrodynamic waves on the surface of melt / A.F. Galkin, D. V Abramov, L.D. Savina [et al.] // International Seminar on Novel Trends in Nonlinear Laser Spectroscopy and High-Precision Measurements in Optics. – Vladimir/Suzdal, 2001. – Vol. 4429. – P. 101-105.

55. Lee, P.D. Modelling of Marangoni effects in electron beam melting / P.D. Lee, P.N. Quested, M. McLean // Philosophical transactions-royal society of london series a mathematical physical and engineering sciences. – 1998. – Vol. 356. – P. 1027-1044.
56. Lukashov, E.A. Structurization of the instability zone and crystallization / E.A. Lukashov, E.V. Radkevich, N.N. Yakovlev // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 179. – № 4. – P. 491-514.
57. Kuznetsov, V.P. Toward control of subsurface strain accumulation in nanostructuring burnishing on thermostrengthened steel [Текст] / V.P. Kuznetsov, I.Y. Smolin, A.I. Dmitriev [и др.] // Surface and Coatings Technology. – 2016. – Т. 285. – С. 171-178.
58. Sarychev, V.D. Thermocapillary model of formation of surface nanostructure in metals at electron beam treatment / V.D. Sarychev, S.A. Nevskii, S. V Konovalov [et al.] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2015. – Vol. 91. – P. 012028.
59. Поут, Д.М. Модифицирование и легирование поверхности лазерными, ионными и электронными пучками [Текст] / Д.М. Поут, Г. Фоти, Е. Римини. – М.: Машиностроение, 1987. – 424 с.
60. Садовский, В.Д. Лазерный нагрев и структура стали: Атлас микроструктур [Текст] / В.Д. Садовский, В.М. Счастливец, Т.И. Табатчикова [и др.]. – Свердловск: УрО АН СССР, 1989. – 102 с.
61. Диденко, А.Н. Воздействие пучков заряженных частиц на поверхность металлов и сплавов [Текст] / А.Н. Диденко, А.Е. Лигачев, И.Б. Куракин. – Энергоатомиздат, 1987. – 187 с.
62. Мажукин, В.И. Иерархия математических моделей в лазерном воздействии на материалы [Текст] / В.И. Мажукин // Знание. Понимание. Умение. – 2007. – № 3. – С. 246-247.

63. Гнюсов, С.Ф. Высокоскоростная деформация и откольное разрушение стали Гадфильда при воздействии сильнофокусированного наносекундного релятивистского электронного пучка [Текст] / С.Ф. Гнюсов, В.П. Ротштейн, С.Д. Полевин [и др.] // Письма в Журнал технической физики. – 2010. – Т. 36. – № 17. – С. 48-53.
64. Майер, А.Е. Численное моделирование упрочнения металлов при интенсивном электронном и ионном облучении [Текст] / А.Е. Майер, В.С. Красников, А.П. Яловец // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 8-2. – С. 429-433.
65. Марков, А.Б. Термический и деформационно-волновой механизмы упрочнения углеродистой стали при воздействии высокоэнергетического сильнофокусированного электронного пучка [Текст] / А.Б. Марков, В.П. Ротштейн // ФиХОМ. – 1997. – № 6. – С. 36-41.
66. Ivanov, Y.F. On the fatigue strength of grade 20Cr13 hardened steel modified by an electron beam / Y.F. Ivanov, D.A. Bessonov, S. V Vorob'ev [et al.] // Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. – 2013. – Vol. 7. – № 1. – P. 90-93.
67. Gromov, V.E. Increase in the fatigue durability of stainless steel by electron-beam surface treatment / V.E. Gromov, Y.F. Ivanov, V. V Sizov [et al.] // Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. – 2013. – Vol. 7. – № 1. – P. 94-98.
68. Grishunin, V.A. Evolution of the phase composition and defect substructure of rail steel subjected to high-intensity electron-beam treatment / V.A. Grishunin, V.E. Gromov, Y.F. Ivanov [et al.] // Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. – 2013. – Vol. 7. – № 5. – P. 990-995.
69. Raikov, S. Structurally-Phase States of Surface Titanium VT1-0 Layers After Electroexplosive Carbonization with a Weighed Zirconium Oxide

- Powder Sample and Electron Beam Treatment. / S. Raikov, K. Sosnin, Y. Ivanov [et al.] // Russian Physics Journal. – 2014. – Vol. 57. – № 2. – P. 252-258.
70. Potekaev, A.I. Modification of Structure and Properties of Titanium Surfaces During Formation of Silicides and Borides Initiated by High-Energy Treatment / A.I. Potekaev, A.A. Klopotov, Y.F. Ivanov [et al.] // Russian Physics Journal. – 2013. – Vol. 56. – № 8. – P. 914-919.
71. Райков, С.В. Структура, фазовый состав и свойства поверхностных слоев титановых сплавов после электровзрывного легирования и электронно-пучковой обработки [Текст] / С.В. Райков, Л.П. Бащенко, Н.А. Соскова [и др.]; ред. В.Е. Громов, Ю.Ф. Иванов, Е.А. Будовских. – Новокузнецк: «Интер-Кузбасс», 2012. – 435 с.
72. Ivanov, Y. Hardening of the surface layer of silumin by electron beam / Y. Ivanov, E. Petrikova, N. Cherenda [et al.] // Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 872. – P. 162-166.
73. Song, R.G. Electron beam surface treatment. Part I: surface hardening of AISI D3 tool steel / R.G. Song, K. Zhang, G.N. Chen // Vacuum. – 2003. – Vol. 69. – № 4. – P. 513-516.
74. Gao, B. Study on continuous solid solution of Al and Si elements of a high current pulsed electron beam treated hypereutectic Al17. 5Si alloy / B. Gao, Y. Hao, W.F. Zhuang [et al.] // Physics Procedia. – 2011. – Vol. 18. – P. 187-192.
75. Urpin, V.A. Excitation of capillary waves in nonuniformly heated liquid films / V.A. Urpin, D.G. Yakovlev // Soviet Physics, Technical Physics. – 1989. – Vol. 59. – P. 19-25.
76. Volkov, N.B. The dynamics of under surface condensed substance irradiated by intense energy stream / N.B. Volkov, A.Y. Leyvi, A.E. Mayer [et al.] // AIP Conference Proceedings. – 2006. – Vol. 849. – P. 268-272.

77. Volkov, N.B. Thermocapillary convection in a target irradiated by an intense charged particle beam / N.B. Volkov, A.Y. Leivi, K.A. Talala [et al.] // *Technical Physics*. – 2010. – Vol. 55. – № 4. – P. 484-490.
78. Astashinski, V.M. Formation of relief on a metallic target surface under the action of compression-plasma flows / V.M. Astashinski, A.Y. Leyvi, V. V Uglov [et al.] // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. – 2014. – Vol. 8. – № 3. – P. 519-523.
79. Gupta, N.R. Thermocapillary flow in double-layer fluid structures: an effective single-layer model / N.R. Gupta, H. Haj-Hariri, A. Borhan // *Journal of colloid and interface science*. – 2006. – Vol. 293. – № 1. – P. 158-171.
80. Zen'kovskaya, S.M. Long-wave oscillatory Marangoni instability in a horizontal liquid layer / S.M. Zen'kovskaya // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2007. – Vol. 71. – № 5. – P. 755-761.
81. Golovin, A.A. A convective Cahn-Hilliard model for the formation of facets and corners in crystal growth / A.A. Golovin, S.H. Davis, A.A. Nepomnyashchy // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1998. – Vol. 122. – № 1-4. – P. 202-230.
82. Visintin, A. *Models of phase transitions. Vol. 28* / A. Visintin. – Boston: Birkhauser, 1996. – 326 p.
83. Lacey, A.A. A mushy region in a Stefan problem / A.A. Lacey, A.B. Tayler // *IMA Journal of Applied Mathematics*. – 1983. – Vol. 30. – № 3. – P. 303-313.
84. Zen'kovskaya, S.M. The effect of a high-frequency progressive vibration on the convective instability of a two-layer fluid / S.M. Zen'kovskaya, V.A. Novosyadlyi // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2009. – Vol. 73. – № 3. – P. 271-280.

85. Zen'kovskaya, S.M. Averaging method and long-wave asymptotics in vibrational convection in layers with an interface / S.M. Zen'kovskaya, V.A. Novosiadliy // Journal of Engineering Mathematics. – 2011. – Vol. 69. – № 2-3. – P. 277-289.
86. Стародубов, К.Ф. Термическое упрочнение проката [Текст] / К.Ф. Стародубов, И.Г. Узлов, В.Я. Савенков [и др.]. – М.: Metallurgy, 1970. – 368 с.
87. Большаков, В.И. История развития термического упрочнения проката: монография [Текст] / В.И. Большаков. – Днепропетровск: ПГАСА, 2012. – 388 с.
88. Морозов, С.И. Повышение стойкости против коррозионного растрескивания под напряжением термомеханически упрочненной арматурной стали [Текст] / С.И. Морозов, А.И. Погорелов, Е.М. Демченко [и др.] // Сталь. – 1994. – № 6. – С. 66-69.
89. Сидоренко, О.Г. Виды разрушений термомеханически упрочненной высокопрочной арматуры, подверженной водородному охрупчиванию [Текст] / О.Г. Сидоренко, И.П. Федорова, Е.М. Демченко [и др.] // Фундаментальные и прикладные проблемы черной металлургии. – 1995. – С. 222-229.
90. Сидоренко, О.Г. Новые технологические решения процесса термомеханического упрочнения арматурной стали [Текст] / О.Г. Сидоренко // Фундаментальные и прикладные проблемы черной металлургии. – 1999. – № 3. – С. 306-311.
91. Узлов, И.Г. Новое в технологии управления процессом термического упрочнения арматурного проката [Текст] / И.Г. Узлов, О.Г. Сидоренко, И.П. Федорова [и др.] // Металлург. и горноруд. пром-сть. – 2008. – № 1. – С. 89-91.

92. Узлов, И.Г. Эффективность применения многосекционных установок термического упрочнения арматурного проката [Текст] / И.Г. Узлов, О.Г. Сидоренко, И.П. Федорова [и др.] // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2010. – № 3. – С. 57-59.
93. Капралов, Е.В. Структура и свойства композиционных износостойких наплавов на сталь: монография [Текст] / Е.В. Капралов, Е.А. Будовских, В.Е. Громов [и др.]. – Новокузнецк: Изд. центр СибГИУ, 2014. – 109 с.
94. Рябцев, И.А. Теория и практика наплавочных работ [Текст] / И.А. Рябцев, И.К. Сенченков. – К.: Экотехнология, 2013. – 400 с.
95. Соснин, Н.А. Плазменные технологии: Руководство для инженеров [Текст] / Н.А. Соснин, С.А. Ермаков, П.А. Тополянский. – СПб.: Изд-во СПбПУ, 2008. – 406 с.
96. Kapralov, E. V. Structural-phase states and properties of coatings welded onto steel surfaces using powder wires / E. V Kapralov, S. V Raykov, E.A. Budovskikh [et al.] // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. – 2014. – Vol. 78. – № 10. – P. 1015-1021.
97. Leontiev, L. Phase Interaction in the Metal-Oxide Melts-Gas Systems: The Modelling of Structure, Properties and Processes / L. Leontiev, V. Boronenkov, M. Zinigrad [et al.]. – Berlin: Springer, 2011. – 410 p.
98. Słoma, J. Modelling of thermal phenomena in electric arc during surfacing / J. Słoma, I. Szczygieł, A. Sachajdak // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. – 2011. – Vol. 11. – № 2. – P. 437-449.
99. Shih, T.-M. Literature Survey of Numerical Heat Transfer (2010--2011) / T.-M. Shih, Y. Zheng, M. Arie [et al.] // *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. – 2013. – Vol. 64. – № 6. – P. 435-525.

100. Chen, X. Heat transfer and fluid flow in a high-intensity free-burning arc: an improved modeling approach / X. Chen, H.-P. Li // International journal of heat and mass transfer. – 2001. – Vol. 44. – № 13. – P. 2541-2553.
101. Trelles, J.P. Electrode patterns in arc discharge simulations: effect of anode cooling / J.P. Trelles // Plasma Sources Science and Technology. – 2014. – Vol. 23. – № 5. – P. 54002.
102. Lelevkin, V.M. The effect of a diaphragm on the vortex thermoinsulation of arc in a plasmatron channel / V.M. Lelevkin, V.F. Semenov // Technical Physics Letters. – 2002. – Vol. 28. – № 9. – P. 722-724.
103. Gritsinin, S.I. Numerical analysis of a microwave torch with axial gas injection / S.I. Gritsinin, A.M. Davydov, I.A. Kossyi [et al.] // Plasma Physics Reports. – 2013. – Vol. 39. – № 7. – P. 579-591.
104. Kim, Y.-J. Comparison of turbulence models for a free-burning high-intensity argon arc / Y.-J. Kim, J.-C. Lee // Journal of the Korean Physical Society. – 2013. – Vol. 62. – № 9. – P. 1252-1257.
105. Bolot, R. Modeling of the plasma flow and anode region inside a direct current plasma gun / R. Bolot, C. Coddet, A. Allimant [et al.] // Journal of thermal spray technology. – 2011. – Vol. 20. – № 1-2. – P. 21-27.
106. Li, H.-P. Effect of a near-cathode sheath on heat transfer in high-pressure arc plasmas / H.-P. Li, M.S. Benilov // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2007. – Vol. 40. – № 7. – P. 2010.
107. Traidia, A. Effect of helium-argon mixtures on the heat transfer and fluid flow in gas tungsten arc welding / A. Traidia, F. Roger, A. Chidley [et al.] // Journal of Chemistry and Chemical Engineering. – 2011. – Vol. 5. – № 9. – P. 854--861.
108. Traidia, A. Numerical and experimental study of arc and weld pool behaviour for pulsed current GTA welding / A. Traidia, F. Roger //

- International journal of heat and mass transfer. – 2011. – Vol. 54. – № 9-10. – P. 2163-2179.
109. Tong, L.G. Influences of deposited metal material parameters on weld pool geometry during shield metal arc welding / L.G. Tong, J.C. Gu, L. Wang [et al.] // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2015. – Vol. 90. – P. 968-978.
110. Wang, X. Numerical simulation of arc plasma and weld pool in double electrodes tungsten inert gas welding / X. Wang, D. Fan, J. Huang [et al.] // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2015. – Vol. 85. – P. 924-934.
111. Tong, Z. A dynamic welding heat source model in pulsed current gas tungsten arc welding / Z. Tong, Z. Zhentai, Z. Rui // Journal of Materials Processing Technology. – 2013. – Vol. 213. – № 12. – P. 2329-2338.
112. Семенов, А.П. Методы математического моделирования процессов формирования и переноса капель электродного металла при сварке плавящимся электродом (Обзор) [Текст] / А.П. Семенов // Автоматическая сварка. – 2014. – № 10. – С. 3-12.
113. Waszink, J.H. Experimental investigation of the forces acting on a drop of weld metal / J.H. Waszink // Weld. J. – 1983. – Vol. 62. – P. 109-116.
114. Choi, J.H. Dynamic force balance model for metal transfer analysis in arc welding / J.H. Choi, J. Lee, C.D. Yoo // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2001. – Vol. 34. – № 17. – P. 2658-2664.
115. Allum, C.J. Metal transfer in arc welding as a varicose instability: part 1, part 2 / C.J. Allum // J. Physics D: Applied Physics. – 1985. – Vol. 18. – P. 1431 – 1446.
116. Hartland, S. Axisymmetric fluid-liquid interfaces: tables giving the shape of sessile and pendant drops and external menisci, with examples of their use / S. Hartland, R.W. Hartley. – Elsevier Science Ltd, 1976. – 782 p.

117. Semenov, O. Modelling of the droplet formation process in GMA welding / O. Semenov, V. Demchenko, I. Krivtsun [et al.] // Proc. of 10th Int. Sem. on Numerical Analysis of Weldability. – 2012. – P. 83-94.
118. Lu, F. Analysis of energy flow in gas metal arc welding processes through self-consistent three-dimensional process simulation / F. Lu, H.-P. Wang, A.B. Murphy [et al.] // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – Vol. 68. – P. 215-223.
119. Hu, J. Heat and mass transfer in gas metal arc welding. Part II: The metal / J. Hu, H.-L. Tsai // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2007. – Vol. 50. – № 5. – P. 808-820.
120. Tashiro, S. Visualization of fume formation process in arc welding with numerical simulation / S. Tashiro, T. Zeniya, A.B. Murphy [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2013. – Vol. 228. – P. 301-305.
121. Nemchinsky, V. A droplet in the inter-electrode gap during gas metal arc welding / V. Nemchinsky // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2011. – Vol. 44. – № 44. – P. 445203-1--445203-7.
122. Морозов, А.И. Введение в плазмодинамику [Текст] / А.И. Морозов. – М.: Физматлит, 2006. – 576 с.
123. Bardos, C. Euler equations for incompressible ideal fluids / C. Bardos, E. Titi // Russian Mathematical Surveys. – 2007. – Vol. 62. – № 3. – P. 409.
124. Бакунин, О.Г. Стохастическая неустойчивость и турбулентный перенос. Характерные масштабы, инкременты, коэффициенты диффузии [Текст] / О.Г. Бакунин // Успехи физических наук. – 2015. – Т. 185. – № 3. – С. 271-306.
125. Lee, H.G. Two-dimensional Kelvin--Helmholtz instabilities of multi-component fluids / H.G. Lee, J. Kim // European Journal of Mechanics-B/Fluids. – 2015. – Vol. 49. – P. 77-88.

126. Меньшов, И.С. Моделирование крупных вихревых структур в осесимметричных струйных течениях [Текст] / И.С. Меньшов, А.Н. Ненашев // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23. – № 11. – С. 111-130.
127. Владимиров, В.И. Проблемы физики трения и изнашивания [Текст] / В.И. Владимиров // Физика износостойкости поверхности металлов. Ленинград: ФТИ РАН. – 1988. – С. 8-41.
128. Колубаев АВ, П.В.Л. Особенности структуры поверхностных слоев металлов при трении с высокими нагрузками [Текст] / П.В.Л. Колубаев АВ, Т.С.Ю. Сизова ОВ // Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. – 1995. – № 2. – С. 265-275.
129. Иванисенко, Ю.В. Наноструктура и твердость «белого слоя» на поверхности железнодорожных рельсов [Текст] / Ю.В. Иванисенко, Г. Бауманн, Г. Фехт [и др.] // ФММ. – 1997. – Т. 83. – № 3. – С. 104.
130. Исламгалиев, Р.К. Механическое поведение ультрамелкозернистого армко-железа [Текст] / Р.К. Исламгалиев, И.Ю. Пышминцев, В.А. Хотинев [и др.] // Физика металлов и металловедение. – 1998. – Т. 86. – № 4. – С. 115-123.
131. Тихонов, Л.В. Механические свойства металлов и сплавов [Текст] / Л.В. Тихонов, В. Кононенко, Г. Прокопенко [и др.]. – К.: Наукова думка, 1986. – 567 с.
132. Sarychev, V.D. Three-layer model of load action on gradient structure / V.D. Sarychev // Advanced Materials & Processes. V-th Russian-Chinese Int. Symposium. – Baikalsk, Russia, 1999. – P. 107-108.
133. Сарычев, В.Д. Теоретическая модель воздействия нагрузки на упрочненный рельс [Текст] / В.Д. Сарычев, В.А. Бердышев, В.И. Петров // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1998. – № 4. – С. 17-20.

134. Александров, В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками [Текст] / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
135. Александров, В.М. Контактные задачи в машиностроении [Текст] / В.М. Александров, Б.Л. Ромалис. – М.: Машиностроение, 1986. – 174 с.
136. Александров, В.М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел [Текст] / В.М. Александров, Д.А. Пожарский. – М.: Факториал, 1998. – 288 с.
137. Никишин, В.С. Задачи теории упругости для многослойных сред [Текст] / В.С. Никишин, Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1973. – 129 с.
138. Китороагэ, Т.В. Плоская контактная задача теории упругости для многослойных сред [Текст] / Т.В. Китороагэ // Математическое моделирование и дискретная оптимизация. – 1989. – С. 15-26.
139. Никишин, В.С. Плоские контактные задачи теории упругости с односторонними связями для многослойных сред [Текст] / В.С. Никишин, Т.В. Китороагэ. – Москва: ВЦ РАН, 1994. – 43 с.
140. Шевляков, Ю.А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред [Текст] / Ю.А. Шевляков. – Киев: Вища школа, 1977. – 216 с.
141. Айзикович, С.М. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства [Текст] / С.М. Айзикович, А.С. Васильев // Прикладная математика и механика. – 2013. – Т. 77. – № 1. – С. 129.
142. Heisenberg, W. Über stabilität und turbulenz von flüssigkeitsströmen / W. Heisenberg // Annalen der Physik. – 1924. – Vol. 4. – № 74. – P. 577-627.
143. Цзя-Цзяо, Л. Теория гидродинамической устойчивости [Текст] / Л. Цзя-Цзяо. – М.: Изд.-во ин. лит., 1958. – 194 с.

144. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. том VI. Гидродинамика [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
145. Пригожин, И. Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации [Текст] / И. Пригожин, Г. Николис. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
146. Бойко, А.В. Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью [Текст] / А.В. Бойко, Н.В. Ключнев, Ю.М. Нечепуренко. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. – 123 с.
147. Ламб, Г. Гидродинамика [Текст] / Г. Ламб. – Москва: ГТТИ, 1947. – 784 с.
148. Левич, В.Г. Физико-химическая гидродинамика [Текст] / В.Г. Левич. – М.: Физматгиз, 1959. – 700 с.
149. Антонюк, П.Н. Дисперсионное уравнение для плоской капиллярно-гравитационной волны на свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости [Текст] / П.Н. Антонюк // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286. – № 6. – С. 1324-1328.
150. Taylor, G.I. Generation of ripples by wind blowing over a viscous fluid [Текст] / G.I. Taylor // The Scientific Papers of GI Taylor. – 1940. – Т. 3. – С. 244-254.
151. Кикина, Н.Г. О влиянии вязкости на неустойчивость тангенциальных разрывов в несжимаемой среде [Текст] / Н.Г. Кикина // Акустический журнал. – 1967. – Т. 13. – № 2. – С. 213-217.
152. Алиев, И.Н. К вопросу о неустойчивости границы раздела двух сред конечной толщины [Текст] / И.Н. Алиев, С.О. Юрченко, Е.В. Назарова // Инженерно-физический журнал. – 2007. – Т. 80. – № 6. – С. 127-133.
153. Григорьев, А.И. О нахождении аналитических выражений для декрементов в асимптотике маловязкой жидкости [Текст] / А.И.

- Григорьев, С.О. Ширяева // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83. – № 10. – С. 18-25.
154. Ширяева, С.О. О роли вязкости жидкости в реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [Текст] / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, С.А. Суханов // Электронная обработка материалов. – 2013. – № 5. – С. 56-61.
155. Евстигнеев, Н.М. О развитии неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода в вязком газе [Текст] / Н.М. Евстигнеев, Н.А. Магницкий // Труды ИСА РАН. – 2014. – Т. 64. – № 3. – С. 41-52.
156. Funada, T. Viscous potential flow analysis of Kelvin--Helmholtz instability in a channel / T. Funada, D.D. Joseph // Journal of Fluid Mechanics. – 2001. – Vol. 445. – P. 263-283.
157. Kim, H. Viscous effects on Kelvin-Helmholtz instability in a channel / H. Kim, J.C. Padrino, D.D. Joseph // Journal of Fluid Mechanics. – 2011. – Vol. 680. – P. 398-416.
158. Куликовский, А.Г. О развитии возмущений на границе раздела двух жидкостей [Текст] / А.Г. Куликовский, И.С. Шикина // Изв. АН, Механика жидкости и газа. – 1977. – № 5. – С. 46-49.
159. Лесников, В.П. О неустойчивости стратифицированной жидкости, обусловленной капиллярно-гравитационной волной с отрицательной энергией [Текст] / В.П. Лесников // Изв. АН, Механика жидкости и газа. – 1985. – № 1. – С. 94-97.
160. Куликовский, А.Г. О влиянии вязкости на устойчивость тангенциального разрыва в несжимаемой жидкости [Текст] / А.Г. Куликовский, И.С. Шикина // Вестник МГУ. – 1997. – № 6. – С. 29-32.

161. Разуменко, Л.С. Неустойчивость границы раздела вязких течений [Текст] / Л.С. Разуменко, В.И. Ткаченко // Вестник Харьковского университета. – 2005. – Т. 3. – № 710. – С. 73-80.
162. Денисов, Г.Г. О влиянии диссипации на устойчивость механических систем [Текст] / Г.Г. Денисов, В.В. Новиков // Вестник Нижегородского университета им. НИ Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2001. – № 2. – С. 34-53.
163. Алиев, И.Н. Особенности комбинированной неустойчивости заряженной границы раздела движущихся сред [Текст] / И.Н. Алиев, С.О. Юрченко, Е.В. Назарова // Инженерно-физический журнал. – 2007. – Т. 80. – № 5. – С. 64-69.
164. Li, X. On the temporal instability of a two-dimensional viscous liquid sheet / X. Li, R.S. Tankin // Journal of Fluid Mechanics. – 1991. – Vol. 226. – P. 425-443.
165. Сарычев, В.Д. Модель образования наноструктур в рельсовой стали при интенсивной пластической деформации [Текст] / В.Д. Сарычев, С.А. Невский, В.Е. Громов // Деформация и разрушение материалов. – 2016. – № 6. – С. 25-29.
166. Сарычев, В.Д. Механизм формирования микро- и наноструктурных состояний рельсовой стали при интенсивной пластической деформации [Текст] / В. Д. Сарычев, С. А. Невский, В. Е. Кормышев, В. Е. Громов // Деформация и разрушение материалов. – 2022. – № 6. – С. 20-27.
167. Невский, С.А. Формирование микро- и наноструктур при электровзрывном карбоборировании титановых сплавов по механизму гидродинамических неустойчивостей [Текст] / С. А. Невский, В. Д. Сарычев, А.Ю. Грановский, Л.П. Башенко, Е. Громов // Фундаментальные проблемы современного материаловедения – 2023. Т. –20–№ 3 – С. 317-328

168. Бугаев, А.А. Термокапиллярные явления и образование рельефа поверхности под воздействием пикосекундных лазерных импульсов [Текст] / А.А. Бугаев, В.А. Лукошкин, В.А. Урпин [и др.] // Журнал технической физики. – 1988. – Т. 58. – № 5. – С. 908-914.
169. Урпин, В.А. Возбуждение капиллярных волн в неоднородно прогретых жидких пленках [Текст] / В.А. Урпин, Д.Г. Яковлев // Журнал технической физики. – 1989. – Т. 59. – № 2. – С. 19-25.
170. Левченко, Е.Б. Неустойчивость поверхностных волн в неоднородно нагретой жидкости [Текст] / Е.Б. Левченко, А.Л. Черняков // ЖЭТФ. – 1981. – № 54. – С. 102-106.
171. Левченко, Е.Б. Неустойчивость капиллярных волн в неоднородно нагретой жидкости при воздействии лазерного [Текст] / Е.Б. Левченко, А.Л. Черняков // Физика и химия обработки материалов. – 1983. – № 1. – С. 129-130.
172. Takashima, M. Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. I. Stationary convection / M. Takashima // Journal of the Physical Society of Japan. – 1981. – Vol. 50. – № 8. – P. 2745-2750.
173. Рябицкий, Е.А. Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя при наличии вертикального градиента температуры [Текст] / Е.А. Рябицкий // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1992. – № 3. – С. 19-23.
174. Velarde, M.G. Interfacial oscillations in Benard-Marangoni layers / M.G. Velarde, P.L. Garcia-Ybarra, J.L. Castillo // Physico Chemical Hydrodynamics. – 1987. – Vol. 9. – P. 387-392.
175. Hashim, I. The onset of oscillatory Marangoni convection in a semi-ininitely deep layer of fluid / I. Hashim, S.K. Wilson // Zeitschrift für

- angewandte Mathematik und Physik ZAMP. – 1999. – Vol. 50. – № 4. – P. 546-558.
176. Nevskii, S. Mathematical Model of Nanostructure Formation in Binary Alloys at Electron Beam Treatment / S. Nevskii, V. Sarychev, S. V Konovalov [et al.] // Materials Science Forum. – 2016. – Vol. 870. – P. 34-39.
177. Ниженко, В.И. Поверхностное натяжение жидких металлов и сплавов [Текст] / В.И. Ниженко, Л.И. Флока. – М.: Metallurgiya, 1981. – 208 с.
178. Смитлз, К.Д. Металлы: справочник [Текст] / К.Д. Смитлз. – М.: Metallurgiya, 1980. – 447 с.
179. Modeling of the initial stages of the formation of heterogeneous plasma flows in the electric explosion of conductors [Text] / V. Sarychev, S. Nevskii, S. Konovalov, A. Granovskii // Current Applied Physics. – 2018. – V. 18 (10). – P. 1101-1107.
180. Модель формирования гетерогенного плазменного потока при электрическом взрыве проводников в плазменном ускорителе с коаксиальным расположением электродов [Текст] / В.Д. Сарычев, А.Ю. Грановский, С.А. Невский, В.Е. Громов, М.В. Темлянцев // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2017. – Т. 14. – № 3. – С. 337-346.
181. Финкель, В.М. Об импульсном воздействии плазмы на материалы [Текст] / В.М. Финкель, В.Н. Гурарий. – Новокузнецк: Сибирский металлург. ин-т., 1970. – 44 с.
182. Гольдберг, М.М. Исследование особенностей работы торцевого ускорителя плазмы, инициируемого электрическим взрывом фольги [Текст] / М.М. Гольдберг, А.Я. Викарук, С.В. Соколов // Изв. вузов. Физика. – 1986. – № 7. – С. 8-12.

183. Сарычев, В.Д. Становление и развитие метода ГПП [Текст] / В.Д. Сарычев, В.Е. Громов, Е.А. Будовских // Прочность и пластичность материалов при внешних энергетических воздействиях / ред. В.Е. Громов. – Новокузнецк: Изд-во «Интеркузбасс», 2010. – С. 393.
184. Будовских, Е.А. Основы технологии обработки поверхности материалов импульсной гетерогенной плазмой [Текст] / Е.А. Будовских, В.Д. Сарычев, В.Е. Громов. – Новокузнецк: изд-во СибГИУ, 2002. – 170 с.
185. Лернер, М.И. Современные технологии получения наноразмерных материалов [Текст] / М.И. Лернер. – Томск: ТПУ, 2007. – 76 с.
186. Sedoi, V.S. Particles and crystallites under electrical explosion of wires / V.S. Sedoi, Y.F. Ivanov // Nanotechnology. – 2008. – Vol. 19. – № 14. – P. 145710.
187. Бакшт, Р.Б. Динамика стратообразования и развитие перегретой неустойчивости при электрическом взрыве проводников [Текст] / Р.Б. Бакшт, С.И. Ткаченко, В.М. Романова [и др.] // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83. – № 8. – С. 43-52.
188. Сивков, А.А. Математическое моделирование коаксиального магнитоплазменного ускорителя [Текст] / А.А. Сивков, Ю.Н. Исаев, О.В. Васильева [и др.] // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 4. – С. 74-78.
189. Ананьев, С.С. Моделирование динамики плазмы в плазменном фокусе типа филиппова [Текст] / С.С. Ананьев, С.В. Суслин, А.М. Харрасов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. – 2016. – Т. 39. – № 2. – С. 69-80.
190. Васильев, В.И. Устойчивый динамический плазменный шнур [Текст] / В.И. Васильев, С.Ю.В. Комельков ВС, С.С. Церевитинов // ЖТФ. – 1960. – Т. 30. – № 7. – С. 756-768.

191. Крауз, В.И. Исследование параметров плазменных потоков и их распространения в фоновой плазме в установках типа «плазменный фокус» с различной конфигурацией разрядной системы [Текст] / В.И. Крауз, Д.А. Войтенко, К.Н. Митрофанов [и др.] // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. – 2015. – Т. 38. – № 2. – С. 19-31.
192. Лобок, М.Г. Влияние временного профиля импульсов на процессы лазерного воздействия [Текст] / М.Г. Лобок, В.И. Мажукин // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19. – № 9. – С. 54-78.
193. Ковалев, О.Б. К теории разрушения поверхности металлов под действием лазерного излучения [Текст] / О.Б. Ковалев, А.М. Оришич, В.М. Фомин [и др.] // Доклады Академии наук. – 2004. – Т. 395. – С. 47-50.
194. Блейхер, Г.А. Эрозия поверхности твердого тела под действием мощных пучков заряженных частиц [Текст] / Г.А. Блейхер, В.П. Кривобоков. – Новосибирск: Наука, 2014. – 248 с.
195. Марков, А.В. Формирование зоны теплового влияния в железе и стали 45 при воздействии низкоэнергетичных сфокусированных электронных пучков [Текст] / А.В. Марков, Д.И. Проскуровский, В.П. Ротштейн. – Томск: Изд. ТНЦ СО РАН, 1995. – 63 с.
196. Cheynet, V. Données thermodynamiques des éléments chimiques / V. Cheynet // Tech. Ing. Traité Mater. Metall. – 1993. – P. M64-1-M64-22.
197. Missenard, A. Conductivité thermique des solides, liquides, gaz et de leurs mélanges / A. Missenard. – Paris: Editions Eyrolles, 1965. – 554 p.
198. Новацкий, В. Динамические задачи термоупругости [Текст] / В. Новацкий. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
199. Карташов, Э.М. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара [Текст] / Э.М. Карташов, В.З. Партон // Механика

- деформированного твердого тела. М.: ВИНТИ. – 1991. – Т. 22. – С. 55-127.
200. Paul, A. Thermodynamics, diffusion and the Kirkendall effect in solids / A. Paul, T. Laurila, V. Vuorinen [et al.]. – Berlin: Springer, 2014. – 543 p.
201. Mehrer, H. Diffusion in solids: fundamentals, methods, materials, diffusion-controlled processes. Vol. 155 / H. Mehrer. – Berlin: Springer, 2007. – 654 p.
202. Моделирование на ЭВМ процессов превращений аустенита в сталях при прерывистом охлаждении арматуры большого диаметра [Текст] / В.Д. Сарычев, А.Б. Юрьев, В.Е. Громов // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2003. – № 6. – С. 30-33.
203. Прерывистое охлаждение арматуры большого диаметра в потоке стана 450 / А.Б. Юрьев, В.Д. Сарычев, В.Я. Чинокалов, М.В. Зезиков, В.Е. Громов // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2002. – № 2. – С. 44-46.
204. Математическая модель расчета температурных полей при прерывистом охлаждении проката / В.Д. Сарычев, В.Е. Громов, А.Ю. Грановский, С.С. Шляпников, А.В. Ильященко // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2016. – Т. 13. – № 3. С. 339-342.
205. О механизме ускоренного охлаждения при термоупрочнении проката / Сарычев В.Д., Невский С.А., Ильященко А.В. // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2017. – Т. 60. – № 12. – С. 1005-1007.
206. Математические модели механизмов ускоренного охлаждения проката / В.Д. Сарычев, Б.Б. Хаимзон, С.А. Невский, А.В. Ильященко, В.А. Гришунин // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2018. Т. 61. № 4. С. 326-332.

207. Самарский, А.А. Уравнения математической физики [Текст] / А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 798 с.
208. Алифанов, О.М. Обратные задачи теплообмена [Текст] / О.М. Алифанов. – М.: Машиностроение, 1988. – 279 с.
209. Тихонов, А.Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод решения обратных задач в машиностроении [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.
210. Кухлинг Х. Справочник по физике [Текст] / Х.Кухлинг. – М. Мир, 1985. – 520с
211. Огибалов, П.М. Механика физических процессов: Учебное пособие [Текст] / П.М. Огибалов, А.Х. Мирзаджанзаде. – М.: МГУ, 1976. – 370 с.
212. Громов, В.Е. Градиентные структурно-фазовые состояния в рельсовой стали [Текст] / В.Е. Громов, В.А. Бердышев, Э.В. Козлов. – Москва: «Недра коммюникейшинс ЛТД», 2000. – 176 с.
213. Андреев, В.К. Термокапиллярное движение двух вязких жидкостей в цилиндрической трубе [Текст] / В.К. Андреев, В.В. Кузнецов // Журн. СФУ. Серия Математика и физика. – 2010. – Т. 3. – № 4. – С. 461-474.
214. Кутателадзе, С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие [Текст] / С.С. Кутателадзе. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 с.
215. Рыбалов, А.А. Конвективный теплообмен при ускоренном охлаждении проката [Текст] / А.А. Рыбалов, В.И. Губинский // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78. – № 1. – С. 54-59.
216. Громов, В.Е. Структурно-фазовые состояния и дефектная субструктура термомеханически упрочненной малоуглеродистой стали

- [Текст] / В.Е. Громов, Ю.Ф. Иванов, В.Б. Костерев [и др.]. – Новокузнецк: «Интер-Кузбасс», 2011. – 167 с.
217. Михеев, М.А. Основы теплопередачи [Текст] / М.А. Михеев, И.М. Михеева. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.
218. Сарычев, В.Д. Математическая модель генерации термоупругих волн при воздействии концентрированных потоков энергии на материалы [Текст] / В.Д. Сарычев, М.С. Волошина, В.Е. Громов // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2011. – Т. 8. – № 4. – С. 71-76.
219. Финкель, В.М. Физические основы торможения разрушения [Текст] / В.М. Финкель. – М.: Metallurgiya, 1977. – 360 с.
220. Фомин, И.М. Залечивание трещин волнами напряжений в щелочно-галоидных кристаллах [Текст] : Автореферат диссертации на соискания ученой степени кандидата физико-математических наук / И.М. Фомин. – Ростов-на-Дону, 1984. – 20 с.
221. Liska, S. Model vyvycje struktury a mechanickyh vlastnosti oceli privalco valcovani za tepla / S. Liska, J. Wozniak // *Kovove materialy*. – 1982. – Vol. 20. – № 5. – P. 562-572.
222. Saito, Y. Optimum Designing of Mechanical Properties of Hot Rolled Steel Coils by Controlled Rolling and Cooling / Y. Saito, M. Saeki, M. Nishida [et al.] // *International Conference on Steel Rolling*. – 1980. – Vol. 2. – P. 1309-1320.
223. Ноговицын, А.В. Прогнозирование процессов структурообразования при охлаждении металлопроката с применением математической модели [Текст] / А.В. Ноговицын, А.В. Богачева, Н.Ф. Евсюков [и др.] // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 1999. – № 5. – С. 75-78.

224. Лешковцев, В.Г. Математическое моделирование процессов превращения переохлажденного аустенита в эвтектоидных сталях [Текст] / В.Г. Лешковцев, А.М. Покровский, В.Н. Бойков // *Металловедение и термическая обработка металлов.* – 1988. – № 1. – С. 17-19.
225. Воронов, А.Н. Моделирование на ЭВМ превращений аустенита при охлаждении стали [Текст] / А.Н. Воронов, Т. Квачкай, В.Т. Жадан [и др.] // *Изв. АН СССР. Металлы.* – 1991. – № 2. – С. 81-89.
226. Адамова, Н.А. Регламентированная закалка в воде крупных стальных изделий [Текст] / Н.А. Адамова // *МиТОМ.* – 1991. – № 4. – С. 29-30.
227. Чернышев, А.П. Компьютерное моделирование структурных и фазовых превращений в неизотермических условиях [Текст] / А.П. Чернышев // *Известия вузов. Черная металлургия.* – 2001. – № 2. – С. 27-29.
228. Numerical simulation of hydrodynamic flows in the jet electric / V.D. Sarychev, A.Y. Granovskii, S.A. Nevskii // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* – 2016. – V. 110 (1). – № 012043, DOI: 10.1088/1757-899X/110/1/012043
229. Model of formation of droplets during electric arc surfacing of functional coatings / V.D. Sarychev, A.Y. Granovskii, S.A. Nevskii, V. E. Gromov // *AIP Conference Proceedings.* – 2016. – V. 1698. – № 030013, DOI: 10.1063/1.4937835
230. Mathematical modelling of convective processes in a weld pool under electric arc surfacing / V.D. Sarychev, A.Y. Granovskii, S.A. Nevskii, S.V. Konovalov // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* – 2017. – V. 168 (1). – № 012039, DOI: 10.1088/1757-899X/168/1/012039

231. Sarychev V. D. Solution of Niobium in Iron during Arc Surfacing / V. D. Sarychev, B. B. Khaimzon, S. A. Nevskii // *Steel in Translation*. – 2016. – Vol. 46, № 8. – P. 563-566.
232. Zhao, Y. Numerical simulation of droplet transfer behavior in variable polarity gas metal arc welding / Y. Zhao, H. Chung // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2017. – Vol. 111. – P. 1129-1141.
233. Choi, S.K. Dynamic simulation of metal transfer in GMAW, part 1: Globular and spray transfer modes / S.K. Choi, C.D. Yoo, Y.S. Kim // *Welding Journal*. – 1998. – Vol. 77. – P. 38-44.
234. Murty, G.S. Instability of conducting fluid cylinder due to axial current / G.S. Murty // *Arkiv Fysik*. – 1960. – Vol. 18. – № 14. – P. 241-250.
235. Султангазиева, Р.Т. Численное моделирование влияние паров металла сварочной ванны на параметры электродуговой плазмы [Текст] / Р.Т. Султангазиева, Н.А. Аманкулова // *Вестник КГУСТА*. – 2015. – № 2. – С. 78-83.
236. Park, A.-Y. Modification of pinch instability theory for analysis of spray mode in GMAW / A.-Y. Park, S.-R. Kim, M.A. Hammad [et al.] // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 2009. – Vol. 42. – № 22. – P. 225503.
237. Kim, Y. Numerical Study of Effect of Thermocapillary Convection on Melting Process of Phase Change Material subjected to Local Heating / Y. Kim, A. Hossain, Y. Nakamura // *Journal of Thermal Science and Technology*. – 2013. – Vol. 8. – № 1. – P. 136-151.
238. Волков, Н.Б. Термокапиллярная конвекция в мишени, облучаемой интенсивным пучком заряженных частиц [Текст] / Н.Б. Волков, А.Я. Лейви, К.А. Талала [и др.] // *Журнал технической физики*. – 2010. – Т. 80. – № 4. – С. 52-58.

239. Rai, R. Heat transfer and fluid flow during electron beam welding of 304L stainless steel alloy / R. Rai, T.A. Palmer, J.W. Elmer [et al.] // *Weld. J.* – 2009. – Vol. 88. – № 3. – P. 54-61.
240. Попов, В.Н. Численная оценка влияния поверхностно-активного вещества на массоперенос при плавлении поверхности металла лазерным импульсом [Текст] / В.Н. Попов, О.Б. Ковалёв, Е.М. Смирнова [и др.] // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика.* – 2012. – Т. 7. – № 3. – С. 114-121.
241. Wu, C.S. Numerical simulation of transient 3-D surface deformation of a completely penetrated GTA weld / C.S. Wu, P.C. Zhao, Y.M. Zhang // *Welding Journal.* – 2004. – Vol. 83. – № 12. – P. 330-335.
242. Tanaka, T. Surface Tension Models / T. Tanaka // *Treatise on Process Metallurgy: Process Phenomena.* – Elsevier, 2014. – P. 35-59.
243. Канчуков, В.З. Влияние электрического поля на поверхностную энергию и работу выхода электрона тонких пленок сплавов щелочных металлов [Текст] / В.З. Канчуков, А.З. Кашежев, А.Х. Мамбетов [и др.] // *Письма в ЖТФ.* – 2002. – Т. 28. – № 12. – С. 57-61.
244. Лякишев, Н.П. Диаграммы состояния двойных металлических систем [Текст]. Т. 2 / Н.П. Лякишев; ред. Н.П. Лякишев. – М.: Машиностроение, 1997. – 1024 с.
245. Neumann, T. Diffusion in Solids / T. Neumann. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. – 651 p.
246. Бокштейн, Б.С. Диффузия в металлах [Текст] / Б.С. Бокштейн. – М.: Metallurgia, 1978. – 248 с.
247. Лариков, Л.Н. Структура и свойства металлов и сплавов. Справочник: Диффузия в металлах и сплавах [Текст] / Л.Н. Лариков, В.И. Исайчев. – Киев: Наукова думка, 1987. – 512 с.

248. Сарычев, В.Д. Математическая модель растворения частиц углерода в титане при воздействии концентрированных потоков энергии [Текст] / В.Д. Сарычев, Б.Б. Хаимзон, В.Е. Громов [и др.] // Титан. – 2012. – № 1. – С. 4-8.
249. Хаимзон, Б.Б. Механизм растворения частиц углерода в титане при воздействии концентрированных потоков энергии [Текст] / Б.Б. Хаимзон, Н.А. Соскова, В.Д. Сарычев [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2012. – Т. 9. – № 4. – С. 475-479.
250. Sarychev, V.D. The theoretical analysys of stress-strain state of materials with gradient structure. / V.D. Sarychev, S.A. Nevskii, V.E. Gromov // Materials Physics & Mechanics. – 2015. – Vol. 22. – № 2.
251. Zenkour, A.M. Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler--Pasternak elastic substrate medium / A.M. Zenkour, M. Sobhy // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. – 2013. – Vol. 53. – P. 251-259.
252. Tornabene, F. Winkler--Pasternak foundation effect on the static and dynamic analyses of laminated doubly-curved and degenerate shells and panels / F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola [et al.] // Composites Part B: Engineering. – 2014. – Vol. 57. – P. 269-296.
253. Сарычев, В.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния поверхностных слоев наплавленного материала при контактных нагрузках [Текст] / В.Д. Сарычев, С.А. Невский, В.Е. Громов // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Т. 27. – № 2. – С. 171-182.
254. Burmister, D.M. The general theory of stresses and displacements in layered systems. I / D.M. Burmister // Journal of applied physics. – 1945. – Vol. 16. – № 2. – P. 89-94.

255. Снеддон, И.Н. Классическая теория упругости [Текст] / И.Н. Снеддон, Д.С. Берри. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 219 с.
256. Stress-strain state of gradient materials under inclined contact load / V. D. Sarychev, A. Yu. Granovskii, S. A. Nevskii, S. V. Konovalov, V. E. Gromov // AIP Conference Proceedings. – 2017. – № 1909. – P. 1-4 (020185).
257. Богданов, А.П. Дефекты металлоконструкции карьерных экскаваторов [Текст] / А.П. Богданов, А.А. Гайнуллин, А.А. Ефимов [и др.] // Universum: технические науки. – 2015. – № 11 (22).
258. Грнеж, Б. Применение стали марки Hardox в горной промышленности. [Текст] / Б. Грнеж // Горная промышленность. – 2008. – № 3(79). – С. 34-38.
259. Райков, С.В. Использование новых материалов для упрочняющей наплавки рабочих поверхностей ковшей экскаваторов [Текст] / С.В. Райков // Заготовительные производства в машиностроении. – 2014. – № 12. – С. 10-13.
260. Коновалов, С.В. Фазовый состав и дефектная субструктура двойной наплавки, сформированной С-V-Cr-Nb-W порошковой проволокой на стали Hardox 450 [Текст] / С.В. Коновалов, В.Е. Кормышев, В.Е. В.Е. Громов [и др.] // Перспективные материалы. – 2016. – № 8. – С. 57-63.