

ВЫДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БИНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедр высшей математики и инженерно-вычислительной математики ТПИ)

В статье разбирается вопрос о выделении алгебраической части в интегралах от биномных дифференциалов. При этом используются некоторые соотношения для гипергеометрической функции $F(\alpha, 1; \gamma; z)$. Известно, что функция

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa}} z^{\kappa}, \quad \gamma \neq 0, -1, \dots; |z| < 1, \quad (1)$$

где

$$(\alpha)_{\kappa} = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+\kappa-1) = \frac{\Gamma(\alpha+\kappa)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (\alpha)_0 = 1, \quad (2)$$

выражается посредством интеграла ([1], стр. 308)

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \frac{(\gamma-1) z^{\gamma-1}}{(1-z)^{\alpha-\gamma+1}} \int_0^z z^{\gamma-2} (1-z)^{\alpha-\gamma} dz, \quad \gamma > 1 \quad (3)$$

и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa}} z^{\kappa} + \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n F(\alpha+n, 1; \gamma+n; z), \quad (4)$$

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = -(\gamma-1) \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_{\kappa}}{(\alpha-\gamma+1)_{\kappa+1}} (1-z)^{\kappa} + \frac{(\alpha)_n}{(\alpha-\gamma+1)_n} (1-z)^n F(\alpha+n, 1; \gamma; z), \quad (5)$$

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \frac{1}{1-z} \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^{\kappa} \frac{(\gamma-\alpha)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa}} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\kappa} + (-1)^n \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{1-z}\right)^n F(\alpha, 1; \gamma+n; z). \quad (6)$$

Для доказательства равенств (5), (6) рассматриваются рекуррентные соотношения

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = -\frac{\gamma-1}{\alpha-\gamma+1} + \frac{\alpha}{\alpha-\gamma+1} (1-z) F(\alpha+1, 1; \gamma; z), \quad (7)$$

$$(1-z) F(\alpha, 1; \gamma; z) = 1 - \frac{\gamma-\alpha}{\gamma} z F(\alpha, 1; \gamma+1; z), \quad (8)$$

которые легко проверяются путем подстановки ряда (1) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях z в левой и правой частях рассматриваемых равенств. Например, в равенстве (7) коэффициент при z^n следующий:

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} &= \frac{\alpha}{\alpha-\gamma+1} \left[\frac{(\alpha+1)_n}{(\gamma)_n} - \frac{(\alpha+1)_{n-1}}{(\gamma)_{n-1}} \right] = \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)_{n-1} [(\alpha+n) - (\gamma+n-1)]}{(\alpha-\gamma+1)(\gamma)_n} \equiv \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}. \end{aligned}$$

Равенства (4) и (8) доказываются аналогичным образом.

Равенство (5) при $n=1$ совпадает с соотношением (7). Предположим, что справедливо равенство (5), тогда, заменяя $F(\alpha+n, 1; \gamma; z)$ по формуле (7), получим:

$$\begin{aligned} F(\alpha, 1; \gamma; z) &= -(\gamma-1) \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha-\gamma+1)_{\kappa+1}} (1-z)^\kappa + \\ &+ \frac{(\alpha)_n}{(\alpha-\gamma+1)_n} (1-z)^n \left[-\frac{\gamma-1}{\alpha-\gamma+n+1} + \right. \\ &\left. \frac{\alpha+n}{\alpha-\gamma+n+1} (1-z) F(\alpha+n+1, 1; \gamma; z) \right] = \\ &= -(\gamma-1) \sum_{\kappa=0}^n \frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha-\gamma+1)_{\kappa+1}} (1-z)^\kappa + \\ &+ \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha-\gamma+1)_{n+1}} (1-z)^{n+1} F(\alpha+n+1, 1; \gamma; z), \end{aligned}$$

чем подтверждается равенство (5). Равенство (6) доказывается аналогично с помощью соотношения (8).

Если учесть то обстоятельство, что интеграл от биномиального дифференциала (3) выражается посредством функции (1), которая к тому же удовлетворяет соотношениям (4) — (6), то последние применяются для выделения алгебраической части нижеследующих интегралов. Для формул (9) — (14) $n=0, 1, \dots$; $m=0, 1, \dots$; $r>0$, $0 \leq \theta < 1$, $0 \leq \zeta < 1$.

$$\begin{aligned} &\int x^{r(1-\theta-\zeta+n)-1} (a+bx^r)^{\zeta-1+m} dx = \\ &= \frac{1}{br} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(-1)^\kappa (1-\theta-\zeta+n-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n+m-\kappa)_{\kappa+1}} \cdot \frac{a^\kappa}{b^\kappa} \frac{x^{r(-\theta-\zeta+n-\kappa)}}{(a+bx^r)^{-\zeta-m}} + \\ &+ \frac{(-1)^n (1-\theta-\zeta)_n}{ra^{-n} b^n} \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{(\zeta+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+m-\kappa)_{n+\kappa+1}} \cdot a^\kappa \frac{x^{r(1-\theta-\zeta)}}{(a+bx^r)^{-\zeta-m+\kappa+1}} + \\ &+ (-1)^n \frac{a^{n+m}}{b^n} \cdot \frac{(1-\theta-\zeta)_n (\zeta)_m}{(1-\theta)_{n+m}} \int x^{r(1-\theta-\zeta)-1} (a+bx^r)^{\zeta-1} dx. \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int x^{-r(-\theta+n+m)-1} (a + b x^r)^{\zeta+m-1} dx = \\
&= -\frac{1}{ar} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(-1)^\kappa (1-\theta-\zeta+n-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n+m-\kappa)_{\kappa+1}} \cdot \frac{b^\kappa}{a^\kappa} \cdot \frac{(a + b x^r)^{\zeta+m}}{x^{r(-\theta+m+n-\kappa)}} \\
&- \frac{(-1)^n (1-\theta-\zeta)_n}{a^n b^{-n} r} \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{(\zeta+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+m-\kappa)_{n+\kappa+1}} b^\kappa \frac{(a + b x^r)^{\zeta+m-\kappa-1}}{x^{r(-\theta+m-\kappa)}} + \\
&+ (-1)^n \frac{b^{n+m}}{a^n} \frac{(1-\theta-\zeta)(\zeta)_m}{(1-\theta)_{n+m}} \int x^{r\theta-1} (a + b x^r)^{\zeta-1} dx. \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int x^{r(\zeta+m)-\kappa} (a + b x^r)^{\theta-n-m-1} dx = \\
&= \frac{1}{ar} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(1-\theta-\zeta+n-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n+m-\kappa)_{\kappa+1}} \cdot \frac{1}{a^\kappa} \frac{x^{r(\zeta+m)}}{(a + b x^r)^{-\theta+n+m-\kappa}} \\
&- \frac{(1-\theta-\zeta)_n}{a^n b r} \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{(\zeta+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+m-\kappa)_{n+\kappa+1}} \frac{1}{b^\kappa} \cdot \frac{x^{r(\zeta+m-\kappa-1)}}{(a + b x^r)^{-\theta+m-\kappa}} + \\
&+ \frac{(1-\theta-\zeta)_n (\zeta)_m}{a^n b^m (1-\theta)_{n+m}} \int x^{r\zeta-1} (a + b x^r)^{\theta-1} dx. \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int x^{r(\theta-n)-1} (a + b x^r)^{\zeta-m-1} dx = \\
&= -\frac{1}{ar} \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^\kappa \frac{(1-\theta-\zeta+n+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n-\kappa)_{\kappa+1}} \cdot \frac{b^\kappa}{a^\kappa} \cdot \frac{x^{r(\theta-n+\kappa)}}{(a + b x^r)^{-\zeta+m}} + \\
&+ \frac{(-1)^n a^{-n} b^n}{ar (1-\theta)_n} \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{(1-\theta-\zeta+m-\kappa)_{\kappa+n}}{(-\zeta+m-\kappa)_{\kappa+1}} \cdot \frac{1}{a^\kappa} \cdot \frac{x^{r\theta}}{(a + b x^r)^{-\zeta+m-\kappa}} + \\
&+ \frac{(-1)^n b^n}{a^{n+m}} \cdot \frac{(1-\theta-\zeta)_{n+m}}{(1-\theta)_n (1-\zeta)_m} \int x^{r\theta-1} (a + b x^r)^{\zeta-1} dx. \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int x^{r(1-\theta-\zeta+n+m)-1} (a + b x^r)^{\zeta-n-1} dx = \\
&= -\frac{1}{br} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(1-\theta-\zeta+n+m-\kappa)_\kappa}{(-\zeta+n-\kappa)_{\kappa+1}} \cdot \frac{1}{b^\kappa} \cdot \frac{x^{r(-\theta-\zeta+n+m-\kappa)}}{(a + b x^r)^{-\zeta+n}} + \\
&+ \frac{b^{-n-1}}{r (1-\zeta)_n} \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{(-1)^\kappa (1-\theta-\zeta+m-\kappa)_{n+\kappa}}{(-\theta+m-\kappa)_{\kappa+1}} \cdot \frac{a^\kappa}{b^\kappa} \cdot \frac{x^{r(-\theta-\zeta+m-\kappa)}}{(a + b x^r)^{-\zeta}} + \\
&+ \frac{(-1)^m a^m}{b^{n+m}} \cdot \frac{(1-\theta-\zeta)_{n+m}}{(1-\zeta)_n (1-\theta)_m} \int x^{r(1-\theta-\zeta)-1} (a + b x^r)^{\zeta-1} dx. \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int x^{r(\theta-n)-1} (a + b x^r)^{-\theta-\zeta+n+m} dx = \\
&= -\frac{1}{r} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(1-\theta-\zeta+n+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n-\kappa)_{\kappa+1}} \cdot b^\kappa \frac{(a + b x^r)^{-\theta-\zeta+n+m-\kappa}}{x^{r(-\theta+n-\kappa)}} + \\
&+ \frac{b^n}{r (1-\theta)_n} \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{(1-\theta-\zeta+m-\kappa)_{n+\kappa}}{(-\zeta+m-\kappa)_{\kappa+1}} \cdot a^\kappa \cdot \frac{x^{r\theta}}{(a + b x^r)^{\theta+\zeta-m+\kappa}} + \\
&+ a^m b^n \frac{(1-\theta-\zeta)_{n+m}}{(1-\theta)_n (1-\zeta)_m} \int x^{r\theta-1} (a + b x^r)^{-\theta-\zeta} dx. \quad (14)
\end{aligned}$$

Теорема 1. Выражение интегралов от биномных дифференциалов в алгебраических функциях возможно для интегралов (9) — (11) в двух случаях: а) $\zeta = 0$, б) $\theta + \zeta = 1$, для интегралов (12) — (14) только в случае $\theta + \zeta = 1$.

Доказательство. Интегралы, расположенные в правых частях равенств (9) — (14), содержат множитель, равный нулю как раз в перечисленных случаях, и в правых частях этих равенств остаются только алгебраические функции.

Теорема 2. Выражение интегралов, расположенных в правых частях равенств (9) — (14), в элементарных функциях возможно в следующих случаях:

1) для интегралов (9) — (14) при $\theta = 0$ и рациональных значениях ζ , а для интеграла в правой части равенства (11) кроме того при рациональных значениях r ;

2) для интегралов (12) — (14) при $\zeta = 0$ и рациональных значениях θ и r .

Доказательство. После применения к каждому из перечисленных интегралов, расположенных в правых частях равенств (9) — (14), соответствующей подстановки Чебышева ([2], стр. 52) они преобразуются к интегралам вида

$$\int t^{m-1} (a_1 + b_1 t^n)^{-1} dt,$$

где $m = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$; $m \leq n$, представления которых в элементарных функциях даны в таблицах интегралов ([3], стр. 78 — 79).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. — Л. Гостехиздат, 1948.

2. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. — II, М., Физматгиз, 1962.

3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.