ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БИНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедр высшей математики и инженерно-вычислительной математики ТПИ)

В статье используются параметры $\gamma > 1$, $\gamma > \alpha > 0$, $r > 0$, $0 < \Theta < 1$, $0 < \zeta < 1$; z — комплексное переменное. Вводится обозначение

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \ (a)_0 = 1.$$

1. Академиком А. А. Марковым ([1], стр. 320) для гипергеометрического ряда $F(\alpha, 1; \gamma; -z)$ было получено следующее выражение в виде цепной дроби:

$$F(\alpha, 1; \gamma; -z) = \frac{P_{2k}(z)}{Q_{2k}(z)} + R_{2k}(z),$$

где

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_n},$$

$$R_{2k}(z) = \sum_{n=\kappa}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+2}}{Q_{2n}(z)\, Q_{2n+2}(z)} \quad ([2], \text{ стр. } 34),$$

$$\alpha_1 = 1, \ \alpha_{2k} = \frac{(\gamma-\alpha)_{\kappa-1}(k-1)!(\gamma+2k-2)}{(\gamma)_{\kappa-1}(\alpha)_\kappa} \cdot \frac{1}{z},$$

$$\alpha_{2\kappa+1} = \frac{(\gamma)_{\kappa-1}(\alpha)_k(\gamma+2k-1)}{(\gamma-\alpha)_k \cdot k!}, \ k = 1, 2, \dots \qquad (1)$$

Для знаменателей подходящих дробей с четными индексами известно рекуррентное соотношение ([2], стр. 14)

$$Q_{2\kappa+2}(z) = \left(\alpha_{2\kappa+2}\,\alpha_{2\kappa+1} + \frac{\alpha_{2\kappa+2}}{\alpha_{2k}} + 1 \right) Q_{2k}(z) - \frac{\alpha_{2\kappa+2}}{\alpha_{2k}} Q_{2\kappa-2}(z). \qquad (2)$$

Далее предполагается, что

$$Q_{2k}(z) = \sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(\gamma+k-1)_n}{(\alpha)_n} \cdot \frac{1}{z^n}, \ k = 1, 2, \dots \qquad (3)$$

После непосредственного вычисления цепной дроби (1) убеждаемся, что равенство (3) справедливо при $k = 1, 2$. На основании метода математической индукции нетрудно установить, что если многочлены будут удовлетворять соотношению (2), тогда они будут справедливы и для $k=3,\ 4,\ldots$

На основании (1) — (3) получается

$$Q_{2k+2}(z)=\left[\frac{(\gamma+2k-1)(\gamma+2k)}{(\gamma+k-1)(\alpha+k)}\cdot\frac{1}{z}+\right.$$

$$\left.+\frac{k(\gamma-\alpha+k-1)(\gamma+2k)}{(\gamma+k-1)(\alpha+k)(\gamma+2k-2)}+1\right]\sum_{n=0}^{k}C_k^n\frac{(\gamma+k-1)_n}{(\alpha)_n}\cdot\frac{1}{z^n}-$$

$$-\frac{k(\gamma-\alpha+k-1)(\gamma+2k)}{(\gamma+k-1)(\alpha+k)(\gamma+2k-2)}\sum_{n=0}^{k-1}C_{k-1}^n\frac{(\gamma+k-2)_n}{(\alpha)_n}\cdot\frac{1}{z^n}=$$

$$=1+\sum_{n=0}^{k-2}C_k^n\frac{(\gamma+k-1)_n}{(\alpha)_n}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\left[\frac{(\gamma+2k-1)(\gamma+2k)}{(\gamma+k-1)(\alpha+k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(k-n)(\gamma-\alpha+k-1)(\gamma+2k)}{(\alpha+n)(\gamma+k-1)(\alpha+k)}+\frac{(k-n)(\gamma+k+n-1)}{(n+1)(\alpha+n)}\right]+$$

$$+\left[\frac{(\gamma+2k-1)(\gamma+2k)\,k(\gamma+k)_{k-2}}{(\alpha+k)(\alpha)_{k-1}}+\frac{(\gamma+k-1)_k}{(\alpha)_k}+\right.$$

$$\left.+\frac{k(\gamma-\alpha+k-1)(\gamma+2k)(\gamma+k)_{k-2}}{(\alpha+k)(\alpha)_k}\right]\frac{1}{z^k}+\frac{(\gamma+k)_{k+1}}{(\alpha)_{k+1}}\cdot\frac{1}{z^{k+1}}=$$

$$=1+\sum_{n=0}^{k-2}C_k^n\frac{(\gamma+k-1)_n}{(\alpha)_n}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{(\gamma+k+n-1)(k+1)(\gamma+n+k)}{(n+1)(\gamma+k-1)(\alpha+n)}+$$

$$+(k+1)\frac{(\gamma+k)_k}{(\alpha)_k}\cdot\frac{1}{z^k}+\frac{(\gamma+k)_{k+1}}{(\alpha)_{k+1}}\cdot\frac{1}{z^{k+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{k+1}C_{k+1}^n\frac{(\gamma+k)_n}{(\alpha)_n}\cdot\frac{1}{z^n},$$

тем самым равенство (3) доказано.

Далее согласно (2) получим числитель $P_{2k}(z)$, который преобразуется следующим образом:

$$P_{2k}(z)=\sum_{n=1}^{k}C_k^n\frac{(\gamma+k-1)_n}{(\alpha)_n}\cdot\frac{1}{z^n}\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m}z^m=$$

$$=C_k^1\frac{\gamma+k-1}{\alpha}\cdot\frac{1}{z}+C_k^2\frac{(\gamma+k-1)_2}{(\alpha)_2}\left[\frac{1}{z^2}-\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{1}{z}\right]+$$

$$+C_k^3\frac{(\gamma+k-1)_3}{(\alpha)_3}\left[\frac{1}{z^3}-\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{(\alpha)_2}{(\gamma)_2}\cdot\frac{1}{z}\right]+\ldots$$

$$\ldots+C_k^k\frac{(\gamma+k-1)_k}{(\alpha)_k}\left[\frac{1}{z^k}-\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{1}{z^{k-1}}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{(\alpha)_{k-1}}{(\gamma)_{k-1}}\cdot\frac{1}{z}\right],$$

$$P_{2k}(z)=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{z^n}\sum_{m=0}^{k-n}C_k^{n+m}(-1)^m\frac{(\gamma+k-1)_{n+m}(\alpha)_m}{(\alpha)_{n+m}(\gamma)_m}. \qquad (4)$$

Учитывая равенства (1), (3) и (4), окончательно получаем

$$F(\alpha, 1; \gamma; -z) = \frac{P_{2k}(z)}{Q_{2k}(z)} + R_{2k}(z) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=1}^{\kappa} \frac{1}{z^n} \sum\limits_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa}^{n+m} (-1)^m \frac{(\gamma+k-1)_{n+m}}{(\alpha+m)_n (\gamma)_m}}{\sum\limits_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{n} \frac{(\gamma+k-1)_n}{(\alpha)_n} \cdot \frac{1}{z^n}} + R_{2k}(z),$$

$$|\arg(1+z)| < \pi, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

2. Так как предел отношения последующего коэффициента ряда $F(\alpha, 1; \gamma; -z)$ к предыдущему при $\gamma > \alpha > 0$ стремится к единице слева, то ввиду ([2], стр. 5, 24) все корни многочлена $Q_{2k}(z)$ располагаются в интервале $(-\infty, -1)$, то есть

$$Q_{2k}(z) = \prod_{n=1}^{\kappa} \left(1 + \frac{a_n}{z}\right),$$

$$a_0 = \infty > a_1 > \ldots > a_k > 1 = a_{\kappa+1}, \tag{6}$$

к тому же

$$Q_{2\kappa+2}(z) = \prod_{n=1}^{\kappa+1} \left(1 + \frac{b_n}{z}\right),$$

$$\infty > b_1 > b_2 > \ldots > b_{\kappa+1} > 1. \tag{7}$$

Ввиду того, что корни многочлена $Q_{2k}(z)$ расположены между корнями многочлена $Q_{2\kappa+2}(z)$ ([2], стр. 14), то

$$a_0 = \infty > b_1 > a_1 > \ldots > a_k > b_{\kappa+1} > 1 = a_{\kappa+1}. \tag{8}$$

Далее преобразуется многочлен (3)

$$Q_{2k}(z) = \frac{(\gamma+k-1)_k}{(\alpha)_k} \cdot \frac{1}{z^{\kappa}} \sum_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{n} \frac{(\alpha+k-n)_n}{(\gamma+2k-1-n)_n} \cdot z^n =$$

$$= \frac{(\gamma+k-1)_k}{(\alpha)_k} \cdot \frac{1}{z^k} \cdot q_{2k}(z), \tag{9}$$

причем наряду с формулами (6), (7) и (9)

$$q_{2k}(z) = \prod_{n=1}^{\kappa} \left(1 + \frac{z}{a_n}\right), \tag{10}$$

$$q_{2k+2}(z) = \prod_{n=1}^{k+1} \left(1 + \frac{z}{b_n}\right). \tag{11}$$

Исходя из формул (8) — (11), нетрудно сделать следующие выводы:

при $Re(z) \geqslant 0$

$$\left|1 + \frac{z}{a_{n-1}}\right| < \left|1 + \frac{z}{b_n}\right|, \ n = 1, 2, \ldots, \ k+1,$$

$$|q_{2k}(z)| < |q_{2\kappa+2}(z)| < \ldots; \tag{12}$$

при $-1 < Re(z) < 0, \quad Re\left(\frac{1}{z}\right) \leqslant -1.$

$$\left|1+\frac{z}{a_n}\right| < \left|1+\frac{z}{b_n}\right|, \; n = 1, 2, \ldots, \; k+1,$$

$$|q_{2k}(z)(1+z)| < |q_{2\kappa+2}(z)|, \ldots; \tag{13}$$

при $-N < Re(z) \leqslant -1$

$$|q_{2k}(z)\cdot Im(z)| < |q_{2\kappa+2}(z)|, \ldots. \tag{14}$$

Если ввести функцию

$$\sigma(z) = \begin{cases} 1 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant Re(z) < 4, \\ 1+z \text{ для } -1 < Re(z) < 0, \; Re\left(\frac{1}{z}\right) \leqslant -1, \\ Im(z) \text{ для } -N < Re(z) \leqslant -1, \end{cases} \tag{15}$$

то неравенства (12) — (14) сведутся к следующим:

$$|q_{2k}(z)\cdot\sigma(z)| < |q_{2\kappa+2}(z)|,$$

$$|q_{2\kappa+2}(z)\cdot\sigma(z)| < |q_{2\kappa+4}(z)|, \ldots; \; -N < Re(z) < 4. \tag{16}$$

Далее согласно (1), (9) и (16) получается

$$|R_{2\kappa}(z)| < \sum_{n=\kappa}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_n n!\,(\alpha)_n \cdot |z|^{2n}}{(\gamma)_{2n}(\gamma+n-1)_n |q_{2n}(z)||q_{2n+2}(z)|} \cdot \frac{\gamma+2n-1}{2n} <$$

$$< \frac{|z|^{2\kappa}}{2|\sigma(z)||q_{2k}(z)|^2} \sum_{n=\kappa}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_n (n-1)!\,(\alpha)_n}{(\gamma)_{2n-1}(\gamma+n-1)_n} \left|\frac{z}{\sigma(z)}\right|^{2n-2\kappa}.$$

Нетрудно проверить, что у полученной бесконечной суммы отношение последующего слагаемого к предыдущему меньше $\left|\frac{z}{4\sigma(z)}\right|^2$, поэтому

$$|R_{2k}(z)| < \frac{8|\sigma(z)|}{|4\sigma(z)|^2 - |z|^2} \cdot \frac{1}{|Q_{2k}(z)|^2} \cdot \frac{(\gamma-\alpha)_k (k-1)!}{(\alpha)_k (\gamma)_{\kappa-1}},$$

$$-N < Re(z) < 4, \quad \left|\frac{z}{4\sigma(z)}\right|^2 < 1. \tag{17}$$

3. Интегралы I выражаются посредством гипергеометрической функции ([3], стр. 308)

$$I = \int_0^z \frac{t^{r\Theta-1}\,dt}{(a+bt^r)^{1-\zeta}} = \frac{z^{r\Theta}(a+bz^r)^{\zeta}}{ar\Theta} F\left(\Theta+\zeta; 1; 1+\Theta; -\frac{bz^r}{a}\right),$$

$$r > 0, \quad 0 < \Theta < 1, \quad 0 < \zeta < 1. \tag{18}$$

Учитывая (5) и (18), получаем:

$$I = \int_0^z t^{r\Theta-1}(a+bt^r)^{\zeta-1}\,dt = \frac{z^{r\Theta}(a+bz^r)^{\zeta}}{ar\Theta} \times$$

$$\times\frac{\sum_{n=1}^{\kappa}\left(\frac{a}{bz^r}\right)^n\sum_{m=0}^{\kappa-n}C_\kappa^{n+m}\frac{(-1)^m(\Theta+k)_{n+m}}{(\Theta+\zeta+m)_n(1+\Theta)_m}}{\sum_{n=0}^{\kappa}C_\kappa^n\frac{(\Theta+k)_n}{(\Theta+\zeta)_n}\left(\frac{a}{bz^r}\right)^n}+$$

$$+\frac{r^{r\Theta}(a+bz^r)^\zeta}{ar\Theta}R_{2k}\left(\frac{bz^r}{a}\right). \qquad (19)$$

Если учесть аналитическое продолжение гипергеометрической функции в смежности с точками $\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{r}}$ и ∞ ([3], стр. 308), получаем также

$$I=\frac{a^{\Theta+\zeta-1}}{(-b)^\Theta r}\cdot B(\Theta,\zeta)+\int\limits_{\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{r}}}^{z}t^{r\Theta-1}(a+bt^r)^{\zeta-1}\,dt=$$

$$=\frac{a^{\Theta+\zeta-1}}{(-b)^\Theta r}\cdot B(\Theta,\zeta)-\frac{z^{r\Theta}(a+bz^r)^\zeta}{ar\zeta}\left[\frac{P_{2k}\left(-\frac{bz^r}{a}-1\right)}{Q_{2k}\left(-\frac{bz^r}{a}-1\right)}+\right.$$

$$\left.+R_{2k}\left(-\frac{bz^r}{a}-1\right)\right],\ \alpha=\Theta+\zeta,\ \gamma=1+\zeta, \qquad (20)$$

$$I=\frac{a^{\Theta+\zeta-1}}{b^\Theta r}\cdot B(\Theta,1-\Theta-\zeta)-\int\limits_{z}^{\infty}t^{r\Theta-1}(a+bt^r)^{\zeta-1}\,dt=$$

$$=\frac{a^{\Theta+\zeta-1}}{b^\Theta r}\cdot B(\Theta,1-\Theta-\zeta)+\frac{z^{r(\Theta-1)}(a+bz^r)}{br(1-\Theta-\zeta)}\left[\frac{P_{2k}\left(\frac{a}{bz^r}\right)}{Q_{2k}\left(\frac{a}{bz^r}\right)}+\right.$$

$$\left.+R_{2k}\left(\frac{a}{bz^r}\right)\right],\ \alpha=1-\Theta,\ \gamma=2-\Theta-\zeta,\ \Theta+\zeta<1. \qquad (21)$$

В равенствах (20) и (21) подходящие дроби вычисляются согласно формуле (5), а оценка остаточных членов по модулю производится по формуле (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
3. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.