ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

ОДНО СВОЙСТВО НЕПРЕРЫВНОЙ КРИВОЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Л. Е. ПОРТНОВ

(Представлена проф. П. П. Куфаревым)

Пусть L_0 — непрерывная кривая евклидова пространства E_1 и $\{f(t)\}$ семейство эквивалентных отображений [1], определяющих L_0.

Пусть $f_0(t) \in \{f(t)\}$.

Возьмем на $[a, b]$ открытое множество

$$G = \bigcup_i (a_i, b_i),$$

где (a_i, b_i) $i = 1, 2, \ldots$ составляющие интервалы, и положим

$$\overline{f_0}(t) = \begin{cases} f_0(t) & \text{при } t \in [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i) \\ \dfrac{f(a_i)(b_i - t) + f(b_i)(t - a_i)}{b_i - a_i} & \text{при } t \in [a_i, b_i]. \end{cases}$$

Пусть теперь L_1 — кривая, определяемая отображением $\overline{f_0}(t)$, а $\{f_1(t)\}$ — семейство эквивалентных отображений, содержащее функцию $\overline{f_0}(t)$.

Пусть $f_1(t) \in \{f(t)\}$.

Возьмем на $[a, b]$ открытое множество

$$G = \bigcup_i (c_i, d_i),$$

где (c_i, d_i) $i = 1, 2, \ldots$ составляющие интервалы, и положим

$$\overline{f_1}(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } t \in [a, b] \setminus \bigcup_i (c^i, d_i) \\ \dfrac{f(c_i)(d_i - t) + f(d_i)(t - c_i)}{d_i - c_i} & \text{при } t \in [c_i, d_i]. \end{cases}$$

Пусть $\{f_2(t)\}$ семейство эквивалентных отображений, содержащее функцию $\overline{f_1}(t)$, а L_2 — кривая, определяемая этим семейством.

Продолжив этот процесс, получим кривые

$$L_0, L_1, \ldots, L_n, \tag{1}$$

соответствующие им семейства эквивалентных отображений

$$\{f(t)\}, \quad \{f_1(t)\}, \ldots, \{f_n(t)\}, \tag{2}$$

некоторые параметрические задания кривых

$$\overline{f_0}(t),\ \overline{f_0}(t),\ \ \overline{f_1}(t),\ldots,\overline{f}_{n-1}(t) \tag{3}$$

и открытые множества

$$G,\ G_1,\ G_2,\ldots,G_n. \tag{4}$$

Теорема. Если последовательности (3) и (4) таковы, что

$$L_0 \neq L_1 \neq L_2 \neq \ldots \neq L_n,$$

то

$$L_0 \neq L_n.$$

Для доказательства теоремы установим некоторые свойства характеристики непрерывной функции [2].

Лемма 1. Если функция $\varphi(t)$, $t \in [a, b]$ непрерывна и неубывающая, то для любой непрерывной функции $f(t)$, $t \in [\varphi(a), \varphi(b)]$ и любого $\delta > 0$ имеем

$$N[f(t), \delta;\ \varphi(a),\ \varphi(b)] = N\{f[\varphi(t)],\ \delta;\ a, b\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(a) = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N_1} = \varphi(b). \tag{6}$$

есть δ — разбиение $[\varphi(a),\ \varphi(b)]$ для $f(t)$ такое, что

$$N_1 = N[f(t),\ \delta;\ \varphi(a),\ \varphi(b)],$$

и аналогично

$$a = s_0 < s_1 < \ldots < s_{N_2} = b \tag{7}$$

есть δ — разбиение $[a, b]$ для $f[\varphi(t)]$ такое, что

$$N_2 = N\{f[\varphi(t)], \delta;\ a, b\}.$$

Ясно, что

$$\varphi(s_0) < \varphi(s_1) < \ldots < \varphi(s_{N_2}) \tag{8}$$

будет δ — разбиение для $f(t)$.
Следовательно,

$$N_2 \ll N_1. \tag{9}$$

Пусть $t_i' \in \varphi^{-1}(t_i)$, тогда

$$t_0' < t'_1 < \ldots < t'_{N_1} \tag{10}$$

будет δ — разбиением для $f[\varphi(t)]$ и, следовательно,

$$N_2 \gg N_1. \tag{11}$$

Из (9) и (11) имеем

$$N_1 = N_2.$$

Следствие. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, $t \in [a, b]$ эквивалентны, то для любого $\delta > 0$

$$N[f_1(t), \delta;\ a, b] = N[f_2(t), \delta;\ a, b].$$

Доказательство. Так как функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ эквивалентны, то существуют такие непрерывные, неубывающие функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $t \in [a,b]$, что

$$\varphi(a) = \psi(a) = a, \qquad \varphi(b) = \psi(b) = b.$$

и

$$f_1[\varphi(t)] = f_2[\psi(t)]. \tag{12}$$

По лемме 1, учитывая (12), имеем

$$N[f_1(t), \delta;\ a, b] = N\{f_2[\psi(t)], \delta;\ a, b\} = N[f_2(t),\ \delta;\ a, b],$$

то есть

$$N[f_1(t), \delta;\ a, b] = N[f_2(t), \delta;\ a. b].$$

Лемма 2. Для непрерывной функции $f(t)$, $t \in [a, b]$ и разбиения отрезка $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_к = b$$

при любом $\delta > 0$

$$\sum_{i=1}^{к} N_i \leqslant N\,[f(t), \delta;\ a, b] \leqslant \sum_{i=1}^{к} N_i + к - 1, \tag{13}$$

где

$$N_i = N\,[f(t),\ \delta;\ t_{i-1},\ t_i] \quad i = 1, 2, \ldots, к.$$

Доказательство. Пусть

$$S_0^i < S_1^i < \ldots < S_{N_i}^i \qquad i = 1, 2, \ldots к \tag{14}$$

δ — разбиения, определяющие δ — характеристики. Совокупность (14) определяет на $[a, b]\delta$ — разбиение для функции $f(t)$ и поэтому

$$\sum_{i=1}^{к} N_t \leqslant N\,[f(t);\ \delta;\ a, b]. \tag{15}$$

Предположим, что правая часть неравенства (13) не выполняется, то есть

$$N\,[f(t),\ \delta;\ a,\ b] \geqslant \sum_{i=1}^{к} N_i + к.$$

Тогда δ — разбиение, дающее $N[f(t),\ \delta;\ a,\ b]$, определит, хотя бы на одном интервале $[t_{i-1},\ t_i]$ δ — разбиение, состоящее больше, чем из N^i интервалов, что противоречит определению N_i.

Следовательно,

$$N\,[f(t), \delta;\ a, b] \leqslant \sum_{i=1}^{к} N_i + к - 1. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует (13).

Лемма 3. Если $f(t)$, $t \in [a, b]$ непрерывная функция и

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \in [a, b] \setminus \bigcup\limits_{t} (a_i b_i) \\ \dfrac{f(a_i)(b_i - t) + f(b_i)(t - a_i)}{b_i - a_i} & \text{при } t \in (a_i,\ b_i), \end{cases}$$

где $\bigcup\limits_{i} (a_i, b_i) = G \subset [a, b]$, $(a_i,\ b_i)$ $i = 1, 2, \ldots$, составляющие интервалы множества G, то

$$N\,[f(t), \delta;\ a, b] \geqslant N[g(t), \delta;\ a, b].$$

Доказательство. Пусть

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b, \tag{17}$$

δ — разбиение, определяющее

$$N\,[g(t),\ \delta;\ a, b] = m.$$

Возьмем разбиение

$$a = p_0 < p_1 < \ldots < p_m = b, \tag{18}$$

где, в случае $f(t_i) = g(t_i)$, $p_i = t_i$.

Так как

$$\omega_{[t_{i-1},\ t_i]} f(t) \geqslant \omega_{[t_{i-1},\ t_i]}\ g(t),$$

то
$$N[f(t), \delta;\ a, b] \geqslant N[g(t), \delta;\ a, b].$$

Пусть теперь t_z — первая точка из (17), для которой
$$f(t_z) \neq g(t_z).$$

Ясно, что $t_z \in (a_i,\ b_i) \subset G$.

Так как $f(a_i) = g(a_i)$, $f(b_i) = g(b_i)$ и $g(t)$ — монотонна на $[a, b]$, то существует $p_z \leqslant [a_i, b_i]$ такая, что
$$f(p_z) = g(t_z).$$

Пусть
$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \in [t_{z-1},\ a_i] \\ \dfrac{a_i(t_z - t) + p_z(t - a_i)}{t_z - a_i} & \text{при } t \in [a_i,\ t_z]. \end{cases}$$

Так как $\varphi(t)$ монотонна, то
$$\omega_{[t_{z-1}, p_z]}\ f(x) = \omega_{[z-1, t_z]}\ f[\varphi(t)],$$

но
$$\omega_{[t_{z-1}, t_z]}\ f[\varphi(t)] \geqslant \omega_{[t_{z-1}, t_z]}\ g(t).$$

Следовательно,
$$\omega_{[p_{z-1}, p_z]}\ f(t) \geqslant \omega_{[t_{z-1}, t_z]}\ g(t).$$

Положим теперь $p_{z+1} = t_{z+1}$ при $f(t_{z+1}) = g(t_{z+1})$, а если $f(t_{z+1}) \neq$ $\neq g(t_{z+1})$, то выбираем p_{z+1} так же, как и p_z. Таким образом, каждому $[i_{i-1},\ t_i]$ $i = 1, 2, \ldots, m$ поставим в соответствие $[p_{i-1},\ p_i]$, причем
$$\omega_{[p_{i-1}, p_i]}\ f(t) \geqslant \omega_{[t_{i-1}, t_i]}\ g(t)$$

и, следовательно,
$$N[f(t), \delta;\ a, b] \geqslant N[g(t), \delta;\ a, b].$$

Приступим к доказательству теоремы.

Пусть $L_0 \neq L_1$, тогда $f_0(t)$ не эквивалентна $\overline{f}_0(t)$. Последнее возможно в случае, когда хотя бы на одном $[a_i,\ b_i]$ $f_0(t)$ не эквивалентна функции
$$\frac{f_0(a_i)\ (b_i - t) + f_0(b_i)\ (t - a_i)}{b_i - a_i},$$

то есть при $t \in [a_i, b_i]$ $f_0(t)$ не монотонна. Последнее означает, что можно указать такие три точки $t_1, t_2, t_3 \in [a_i, b_i]$, что $t_1 < t_2 < t_3$ и $f_0(t_1) = f_0(t_3) \neq f_0(t_2)$. Можно считать, что
$$f_0(a_i) \leqslant f_0(t_1) = f_0(t_2) \leqslant f_0(b_i). \tag{19}$$

Пусть далее при $t = t_4 \in [a_i, b_i]$
$$f_0(t_4) = f_0(t_1).$$

Такое $t_4 \in [a_i, b_i]$ существует в силу (19).

Положим

$$f_0'(t) = \begin{cases} t_0(t) & \text{при } f\in[a,b]\setminus(a_i, b_i), \\ f_0\left[\dfrac{a_i(t_4-t)+t_1(t-a_i)}{t_4-a_i}\right] & \text{при } t\in[a_i, t_4], \\ f_0\left[\dfrac{t_4(b_i-t)+t_3(t-t_4)}{b_i-t_4}\right] & \text{при } t\in[t_4, b_i[. \end{cases}$$

Ясно, что $f'_0(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и по лемме 3 при любом $\delta>0$

$$N[f'_0(t),\ \delta;\ a,\ b] \geqslant N[\overline{f}_0(t),\ \delta;\ a, b]. \tag{20}$$

По лемме 2, при любом $\delta>0$, имеем

$$N[f'_0(t),\ \delta;\ a, b] \leqslant N[f'_0(t),\ \delta;\ a,\ t_4] + \\ + N[f'_0(t),\ \delta;\ t_4,\ b]+1 \tag{21}$$

и

$$N[f_0(t)\,\sigma;\ a;\ t_1] + N[f_0(t),\ \delta;\ t_1,\ t_3] + \\ + N[f_0'(t),\ \delta;\ t_3,\ b] \leqslant N[f_0(t),\ \sigma;\ a,\ b]. \tag{22}$$

По лемме 1, при любом $\delta>0$, имеем

$$N[f'_0(t),\ \delta;\ a,\ t_4] = N[f_0(t),\ \delta;\ a,\ t_1]$$

и

$$N[f_0'(t),\ \delta;\ t_4,\ b] = N[f_0(t),\ \delta;\ t_3,\ b]. \tag{23}$$

Если положить

$$\delta \leqslant \sigma = |f_0(t_1) - f_0(t_2)|,$$

то получим

$$N[f_0(t),\ \delta;\ t_1,\ t_3] \geqslant 2. \tag{24}$$

Учтя (23) и (24), имеем из (22)

$$N[f'_0(t),\ \sigma;\ a,\ t_4] + N[f'_0(t),\ \delta;\ t_4,\ b] + 2 \leqslant N[f_0(t),\ \delta;\ a,\ b]. \tag{25}$$

Из (21) и (25) имеем при $\delta\leqslant\delta_0$.

$$N[f_0(t),\ \delta;\ a,\ b] > N[f'_0(t),\ \delta;\ a,\ b]. \tag{26}$$

Далее, если положить $\delta\leqslant\delta_0$, то из (20) и (26) получаем

$$N[f_0(t),\ \delta;\ a,\ b] > N[\overline{f}_0(t),\ \delta;\ a,\ b]. \tag{27}$$

По лемме 3 и следствию к лемме 1 имеем при любом $\delta>0$

$$N[\overline{f}_{i-1}(t),\ \delta;\ a, b] \geqslant N[\overline{f}_i(t),\ \delta;\ a,\ b], \tag{28}$$

где $\overline{f}_i(t)\in(3)$.

Из (27) и (28) при $\delta<\delta_0$ имеем

$$N[f_0(t), \delta;\ a,\ b] > N[\overline{f}_{n-1}(t), \delta;\ a,\ b].$$

Последнее неравенство, с учетом следствия к лемме 1, означает, что $f_0(t)$ не эквивалентна $f_{n-1}(t)$, то есть

$$L_0 \neq L_n.$$

Доказанная теорема естественным образом обобщается на случай n-мерного евклидова пространства E_n. Покажем, как это сделать в случае E_2.

Пусть L_0 непрерывная кривая пространства E_2.

Рассмотрим последовательности

$$L_0,\ L_1,\ldots,L_n; \tag{29}$$

$$\{f(t)\},\ \{f_1(t)\},\ldots,\{f_n(t)\}; \tag{30}$$

$$f_0(t),\ \overline{f}_0(t),\ \overline{f}_1(t),\ldots,\ \overline{f}_{n-1}(t); \tag{31}$$

$$G,\ G_1,\ G_2,\ldots,G_n, \tag{32}$$

Аналогичные последовательностям (1), (2), (3), (4). Если $f_0(t)$ и $\overline{f}_0(t)$ не являются параметризациями одной и той же кривой, то найдется интервал $(a_i,\ b_i)$ такой, что $f_0(t) \not\equiv \overline{f}_0(t)$ при $t \in (a_i,\ b_i)$.
И возьмем прямую

$$y = \frac{a_i - b_i}{f_0(b_i) - f_0(a_i)}\,t\,. \tag{34}$$

Спроектируем последовательность (31) на прямую (34).

Получим последовательность

$$g_0(t),\ \overline{g}_0(t),\ \overline{g}_1(t),\ldots,\overline{g}_{n-1}(t)$$

непрерывных отображений отрезка $[a,\ b]$ в прямую (24).

Легко видеть, что

$$N\ [g_0(t),\ \delta;\ a,\ b] \not\equiv [\overline{g}_{n-1}(t),\ \sigma;\ a,\ b]. \tag{35}$$

Из (35) следует, что отображение отрезка $[a,\ b]$ в E_2 $f_0(t)$ и $f_{n-1}(t)$ не эквивалентны, то есть

$$L \neq L_n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы функций и функционального анализа. МГУ, 1954.

2. Л. Е. Портнов. Доклады Второй Сибирской конференции. Изд-во ТГУ, стр. 51, 1962.