

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БРУСЕ С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Л. Г. ФУКС

(Представлена кафедрой котлостроения и котельных установок)

В ряде электротехнических конструкций имеют широкое применение материалы, теплопроводность которых в различных направлениях неодинакова. К числу таких конструкций можно, например, отнести сердечники трансформаторов, магнитопроводы бетатронов и т. п., работающие в условиях внутреннего тепловыделения. Теплопроводность стальных листов вдоль пакета выше, чем в поперечном направлении, так что в целом сердечник можно рассматривать как анизотропное тело.

Задачей расчета является нахождение поля температур по сечению магнитопровода и, в частности, определение максимальной температуры перегрева.

Имеются приближенные решения задачи, например, работа [1]. Эти решения основаны на допущении большой разницы в теплопроводности анизотропного материала или применении приближенных способов численного интегрирования. Ниже приводится точное решение для бруса бесконечной длины.

Если направить оси x и y по осям симметрии поперечного сечения бруса (рис. 1), то стационарное температурное поле опишется уравнением

$$\lambda_x \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + q_v = 0. \quad (1)$$

Граничные условия при отводе тепла по закону Ньютона могут быть выражены как

$$\alpha_x (t - t_0) = -\lambda_x \left(\frac{dt}{dx} \right) \text{ при } x = \pm a, \quad (2)$$

$$\alpha_y (t - t_0) = -\lambda_y \left(\frac{dt}{dy} \right) \text{ при } y = \pm b. \quad (3)$$

Здесь обозначено:

t — температура в произвольной точке бруса,
 t_0 — температура окружающей среды,
 $2a, 2b$ — линейные размеры сечения бруса,

λ_x, λ_y — теплопроводность по направлениям x и y ,
 q_v — внутреннее тепловыделение,
 α_x, α_y — коэффициенты теплоотдачи от поверхности бруса по направлениям x и y .

Введем в уравнение (1) и граничные условия (2), (3) новую функцию и независимые переменные

$$\vartheta = t - t_0, \quad x = u\sqrt{\lambda_x}, \quad y = v\sqrt{\lambda_y}.$$

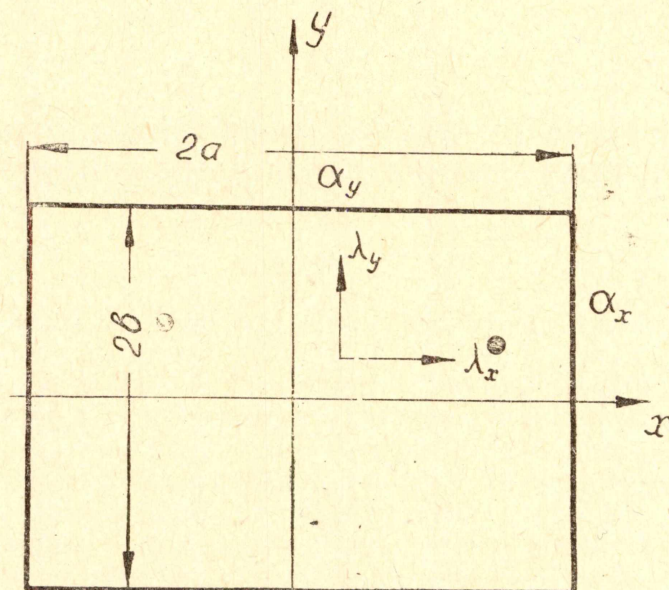


Рис. 1. Расчетная схема задачи.

При этом (1), (2) и (3) примут вид

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} + q_v = 0, \quad (4)$$

$$\vartheta = -\gamma_x \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u} \right)_{u=a_1}, \quad \vartheta = -\gamma_y \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right)_{v=b_1}, \quad (5), (6)$$

где

$$\gamma_x = \frac{V\lambda_x}{\alpha_x}, \quad \gamma_y = \frac{V\lambda_y}{\alpha_y}, \quad a_1 = \frac{a}{V\lambda_x},$$

$$b_1 = \frac{b}{V\lambda_y}.$$

Будем искать решение в виде

$$\vartheta = \varphi(u) + U(u) \cdot U(v). \quad (7)$$

Подставим функцию (7) в уравнение (4)

$$UV'' + VU'' + \varphi'' + q_v = 0. \quad (8)$$

Подберем φ так, чтобы

$$\varphi'' + q_v = 0,$$

причем постоянные интегрирования определим из граничных условий. Находим следующий вид функций:

$$\varphi(u) = \frac{q_v a_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{u}{a_1} \right)^2 + \frac{2\gamma_x}{a_1} \right]. \quad (9)$$

При таком выборе φ получаем из (8) после разделения переменных

$$V''/V = -U''/U = \beta^2. \quad (10)$$

Для нахождения частного решения воспользуемся условиями симметрии, которые в рассматриваемом случае записываются как

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)_{u=0} = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)_{v=0} = 0. \quad (12)$$

Полное решение дифференциального уравнения (4) при граничных условиях (5) и (6) будет

$$\vartheta(u, v) = \frac{q_v a_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{u}{a_1}\right)^2 + \frac{2v_x}{a_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \beta_n u \cdot \operatorname{ch} \beta_n v. \quad (13)$$

Постоянные A_n и собственные числа β_n находятся из граничных условий обычным путем. Окончательное решение задачи после перехода к исходным аргументам имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta(x, y) = & \frac{q_v a^2}{2\lambda_x} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{2\lambda_x}{a \cdot \alpha_x} - \right. \\ & - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n \cdot \cos \mu_n \frac{x}{a} \operatorname{ch} \mu_n \frac{y}{a} \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}}{\mu_n^3 \left(\mu_n \frac{\lambda_y}{a \alpha_y} \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \operatorname{sh} \mu_n \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} + \operatorname{ch} \mu_n \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \right)} \times \\ & \times \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right) \Bigg], \end{aligned} \quad (14)$$

где собственные числа μ_n представляют собой корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\alpha_x a}{\lambda_x} \operatorname{ctg} \mu = \mu. \quad (15)$$

Значение первых двух корней уравнения (15) приведены на рис. 2. Более подробные таблицы имеются, например, в работе [2].

Анализ уравнения (14) показывает, что в большинстве практических случаев расчета достаточно ограничиться только первым членом бесконечной суммы. По крайней мере, если величина

$$\frac{\alpha_x a}{\lambda_x} \leq 0,5,$$

то, отбрасывая второй член, мы сделаем ошибку меньше, чем 0,2 % от всей суммы.

При работе с точным решением следует располагать ось x в том направлении, в котором величина $\frac{\alpha_x \cdot a}{\lambda_x}$ окажется наименьшей, так как в этом случае сходимость ряда будет лучшей.

В качестве примера приводим сравнение предлагаемого расчета с методом, принятым в работе [1], откуда заимствованы следующие ниже данные.

Пример: Бесконечный брус прямоугольного сечения $0,48 \times 0,16 \text{ м}^2$, коэффициенты теплопроводности которого соответственно равны

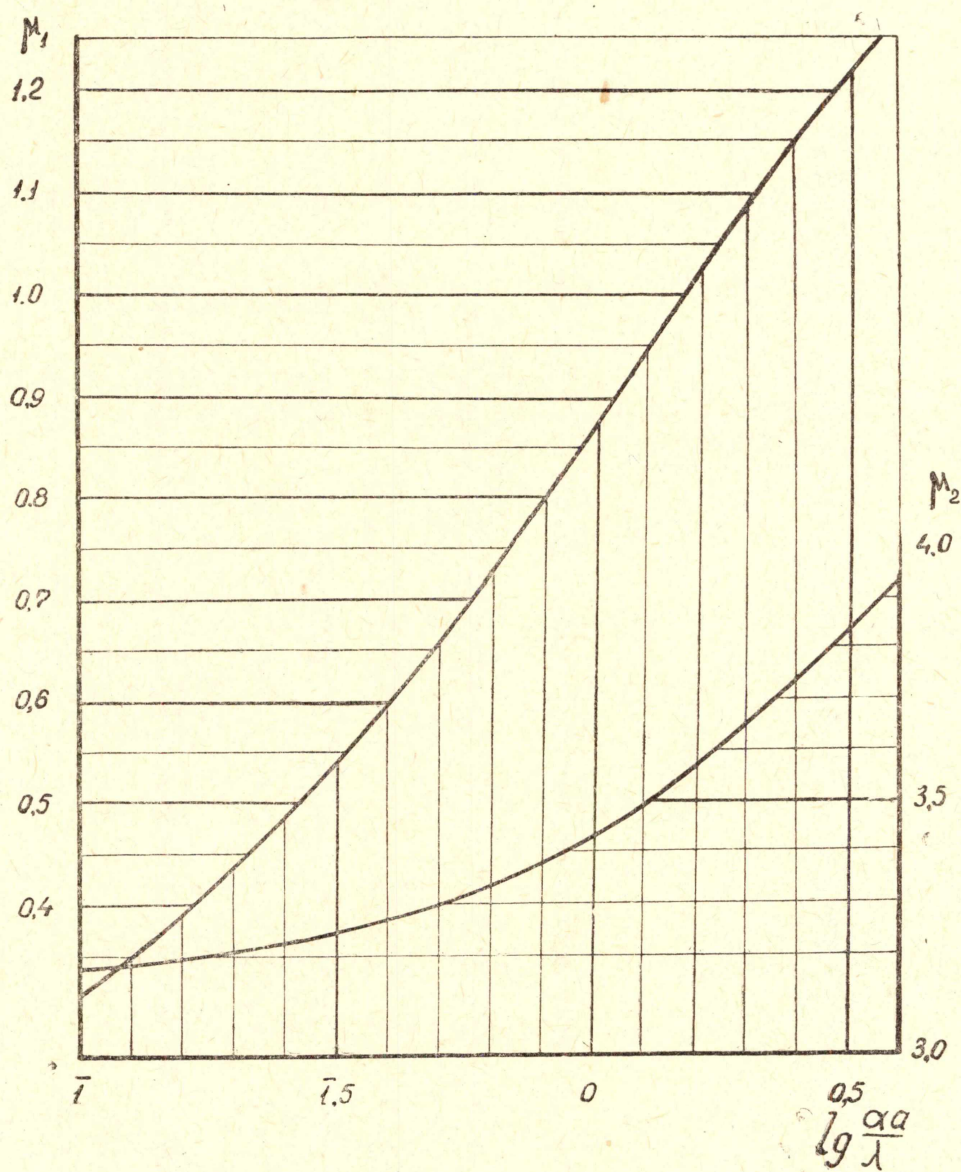


Рис. 2. Корни трансцендентного уравнения.

$$\frac{\alpha_x a}{\lambda_x} \operatorname{ctg} \rho = \rho.$$

$45,4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{С}}$ и $1,16 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{С}}$ нагревается за счет внутреннего тепловыделения интенсивностью $30200 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$. Охлаждение бруса происходит с одинаковым коэффициентом теплоотдачи $62,8 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{С}}$ по всем граням.

Температура окружающего воздуха 35°C . Найти температуру любой точки бруса и определить максимальную температуру в условиях стационарного нагрева.

Определим две величины

$$\frac{54 \cdot 0,24}{39} = 0,332, \quad \frac{54 \cdot 0,08}{1} = 4,32.$$

Таким образом, ось x удобнее направить параллельно стороне $0,48 \text{ м}$. При этом $\mu_1 = 0,9547$ и $\mu_2 = 3,24$.

Данные задачи будут следующими:

$$\begin{aligned} a &= 0,24 \text{ м}, & b &= 0,08 \text{ м}, & \lambda_x &= 45,4 \text{ Вт/м}^{\circ}\text{C}, \\ \lambda_y &= 1,16 \text{ Вт/м}^{\circ}\text{C}, & \alpha_x &= \alpha_y = \alpha = 62,8 \text{ Вт/м}^2\text{C}, \\ q_v &= 30200 \text{ Вт/м}^3, & t_0 &= 35^{\circ}\text{C}. \end{aligned}$$

Вычисляем последовательно расчетные комплексы

$$\begin{aligned} \frac{q_v a^2}{2\lambda_x} &= 19,2^{\circ}\text{C}; & \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} &= 6,25; \\ \mu_1 \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} &= 1,138; & \frac{2\lambda_x}{\alpha_x \cdot a} &= 6,02; \\ \mu_1 \frac{\lambda_y}{\alpha_y \cdot a} \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} &= 0,263 \end{aligned}$$

и, подставив эти величины в (14), с учетом только первого члена суммы получим после преобразований

$$t(x, y) = 169,8 - 333x^2 - 64,7 \cos \cdot 2,28x \cdot \text{ch } 14,25y.$$

Для определения температуры величины x и y необходимо брать в метрах.

Максимальная температура будет в точке $x = y = 0$,

$$t_{\max} = 105,1^{\circ}\text{C}.$$

(по расчету, приведенному в работе [1], $t_{\max} = 98^{\circ}\text{C}$).

Подсчет поправки, связанной с пренебрежением вторым членом ряда, дал малую величину $0,2 \cdot 10^{-3}^{\circ}\text{C}$.

Выводы

1. При расчете температур анизотропного прямоугольного бруса с внутренним тепловыделением следует пользоваться предлагаемым точным решением, дающим величину температуры в любой точке бруса.

2. Особо рекомендуется применение точного решения при близких значениях критерия Био по двум взаимно перпендикулярным направлениям сечения бруса, так как в этом случае приближенные способы могут дать значительную ошибку.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гурченко. Расчет температуры нагрева магнитопроводов бетатронов. Известия высших учебных заведений, Электромеханика, № 3, 1959.
2. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. ГИТТЛ, Москва, 1952.