УДК 519.865

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОГО ТИПА ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ В ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ (*B*,*S*)-ФИНАНСОВОГО РЫНКА

А.В. Аникина, Н.С. Демин*, С.В. Рожкова

Томский политехнический университет
*Томский государственный университет
E-mail: oceanann@rambler.ru

Приводится решение задачи оптимального хеджирования для Европейских опционов купли и продажи экзотического типа, когда возможные выплаты по опционам ограничиваются заданной величиной. Получены формулы, определяющие стоимости опционов, а также эволюцию во времени портфелей и капиталов, т. е. хеджирующие стратегии и соответствующие им капиталы. Исследованы некоторые свойства решений.

Введение

В случае стандартных опционов купли и продажи выплата по опциону может быть достаточно большой, что представляет существенный риск для инвестора [1–4]. Первый способ ограничения этого риска заключается в рассмотрении опционов, когда платежное обязательство выполняется с вероятностью меньшей единицы [5, 6]. Второй способ заключается в решении задачи относительно платежных функций, которые предусматривают выплаты, не превышающие заданную величину, и которые относятся к классу так называемых экзотических опционов [7]. В обзорной работе [8], написанной на основе иностранной научной периодики, отмечается достаточно широкое хождение на финансовых рынках экзотических опционов и вместе с тем отсутствие развитой теории для них. В данной работе для диффузионной модели [3, 4] – рынка ценных бумаг и платежных функций указанного типа приводится решение задачи оптимального хеджирования в случае опционов купли и продажи с фиксированным временем исполнения (опционов Европейского типа).

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стандартном вероятностном пространстве $(\Omega, F_t, \mathbb{F}=(F_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ [3]. На финансовом рынке обращаются рисковые и безрисковые активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t\in[0,T]$ определяются уравнениями [1–4]

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad dB_t = rB_t dt, \tag{1.1}$$

где W_t – винеровский процесс, $\sigma>0$, $r>0$, $S_0>0$, $B_0>0$, решение которых имеет вид

$$S_t(\mu) = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\},$$
$$B_t = B_0 \exp\{rt\}. \tag{1.2}$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде [1–4]

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \; t\in[0,T], \tag{1.3}$$

где $\pi_t=(\beta_t,\gamma_t)$ есть пара F_t – измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. Цель управления портфелем – достижения равенства $X_T=f_T(S_T)$, где X_T – капитал, S_T – цена рискового актива в момент времени T, когда опцион предъявляется к исполнению, $f(\cdot)$ – платежная функция. В данной работе для опционов купли и продажи платежные функции имеют соответственно вид [3, 4, 7, 8]

$$f(S_T) = \min\{(S_T - K_1)^+, K_2\}, \tag{1.4}$$
$$f(S_T) = \min\{(K_1 - S_T)^+, K_2\}, \tag{1.5}$$

где $K_1>0$ – оговариваемая в момент заключения контракта цена реализации рискового актива в момент исполнения T, а $K_2>0$ – величина, ограничивающая выплату по опциону, причем для опциона продажи $K_2<K_1$. Суть платежных функций (1.4), (1.5) заключается в следующем. Опцион купли предъявляется к исполнению, если $S_T>K_1$. При этом владелец опциона получает доход, равный S_T-K_1, если $S_T-K_1<K_2$, и равный K_2 в противном случае. Опцион продажи предъявляется к исполнению, если $S_T<K_1$. При этом владелец опциона полу-

чает доход, равный K_1-S_T, если $K_1-S_T<K_2$, и равный K_2 в противном случае.

2. Опцион купли

Далее всюду E – математическое ожидание, $N\{a,\sigma^2\}$ – гауссовское распределение с параметрами a и σ^2, $\Phi(y)$ – функция Лапласа, т. е.

$$\Phi(y)=\int_{-\infty}^{y}\phi(x)dx,\quad \phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теорема 1. Пусть $d_1^C(t)$, $d_2^C(t)$, $b_1^C(t)$ и $b_2^C(t)$ определены формулами

$$d_1^C(t)=\frac{\ln(K_1/S_t)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\qquad(2.1)$$

$$d_2^C(t)=\frac{\ln((K_1+K_2)/S_t)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.\qquad(2.2)$$

$$b_1^C(t)=\frac{\ln(K_1/S_t)-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\qquad(2.3)$$

$$b_2^C(t)=\frac{\ln((K_1+K_2)/S_t)-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.\qquad(2.4)$$

Тогда рациональная стоимость опциона купли C_T определяется формулой

$$C_T=S_0[\Phi(b_2^C)-\Phi(b_1^C)]-$$
$$-K_1e^{-rT}[\Phi(b_2^C)-\Phi(b_1^C)]+K_2e^{-rT}\Phi(-d_2^C),\qquad(2.5)$$

а портфель $\pi_t^C=\{\gamma_t^C,\beta_t^C\}$ и капитал X_t^C соответственно формулами

$$\gamma_t^C=\Phi(b_2^C(t))-\Phi(b_1^C(t)),\qquad(2.6)$$

$$\beta_t^C=-\frac{K_1}{B_t}e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2^C(t))-\Phi(d_1^C(t))]+$$
$$+\frac{K_2}{B_t}e^{-r(T-t)}\Phi(d_2^C(t)),\qquad(2.7)$$

$$X_t^C=S_t[\Phi(d_2^C(t))-\Phi(d_1^C(t))]-$$
$$-K_1e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2^C(t))-\Phi(d_1^C(t))]+$$
$$+K_2e^{-r(T-t)}\Phi(d_2^C(t)),\qquad(2.8)$$

где $b_1^C=b_1^C(t)$, $b_2^C=b_2^C(t)$, $d_1^C=d_1^C(t)$, $d_2^C=d_2^C(t)$ при $t=0$.

Доказательство. Согласно [4] $F_{T-t}(S_t)=E\{f_T(S_T(r))|S_t\}$, где процесс $S_t(r)$ определяется уравнением (1.1) и формулой (1.2) с заменой μ на r. Так как $f^C(S_T)=\min\{(S_T-K_1)^+,K_2\}$, а $W_t\sim N\{0;t\}$, то делая очевидные замены переменных последовательно с учетом (2.1) – (2.4) получаем, что

$$F_{T-t}^C(S_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\min\left\{\left(S_te^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}}-K_1\right)^+,K_2\right\}\times$$
$$\times e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_1^C(t)}^{d_2^C(t)}\left(S_te^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}}-K_1\right)e^{-\frac{z^2}{2}}dz+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_2^C(t)}^{\infty}K_2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_te^{r(T-t)}\int_{d_1^C(t)}^{d_2^C(t)}e^{-\frac{z^2}{2}+\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}dz-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_1\int_{d_1^C(t)}^{d_2^C(t)}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_2\int_{d_2^C(t)}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_te^{r(T-t)}\int_{d_1^C(t)}^{d_2^C(t)}e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}dz-$$
$$-K_1(\Phi(d_2^C(t))-\Phi(d_1^C(t)))+K_2\Phi(-d_2^C(t))=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_te^{r(T-t)}\int_{b_1^C(t)}^{b_2^C(t)}e^{-\frac{y^2}{2}}dy-$$
$$-K_1(\Phi(d_2^C(t))-\Phi(d_1^C(t)))+K_2\Phi(-d_2^C(t))=$$
$$=S_te^{r(T-t)}(\Phi(d_2^C(t))-\Phi(d_1^C(t)))-$$
$$-K_1(\Phi(d_2^C(t))-\Phi(d_1^C(t)))+K_2\Phi(-d_2^C(t)).\qquad(2.9)$$

Согласно общей теории [3, 4]

$$X_t=e^{-r(T-t)}F_{T-t}(S_t),\qquad(2.10)$$

$$C_T=e^{-rT}F_T(S_0),\qquad(2.11)$$

$$\gamma_t=e^{-r(T-t)}\frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t),\qquad(2.12)$$

$$\beta_t=\frac{1}{B_T}\left[F_{T-t}(S_t)-S_t\frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t)\right].\qquad(2.13)$$

Таким образом (2.5) – (2.8) следуют из (2.9) – (2.13). Теорема доказана.

3. Опцион продажи

Теорема 2. Пусть $d_1^P(t)$, $d_2^P(t)$, $b_1^P(t)$ и $b_2^P(t)$ определены формулами

$$d_1^P(t)=\frac{\ln(K_1/S_t)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\qquad(3.1)$$

$$d_2^P(t)=\frac{\ln((K_1-K_2)/S_t)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (3.2)$$

$$b_1^P(t)=\frac{\ln(K_1/S_t)-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (3.3)$$

$$b_2^P(t)=\frac{\ln((K_1-K_2)/S_t)-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (3.4)$$

Тогда рациональная стоимость опциона продажи P_T определяется формулой

$$P_T=-S_0[\Phi(b_1^P)-\Phi(b_2^P)]+$$
$$+K_1e^{-rT}[\Phi(b_1^P)-\Phi(b_2^P)]+K_2e^{-rT}\Phi(b_2^P), \quad (3.5)$$

а портфель $\pi_t^P=\{\gamma_t^P,\beta_t^P\}$ и капитал X_t^P соответственно формулами

$$\gamma_t^P=-[\Phi(b_1^P(t))-\Phi(b_2^P(t))], \quad (3.6)$$

$$\beta_t^P=\frac{K_1}{B_t}e^{-r(T-t)}[\Phi(b_1^P(t))-\Phi(b_2^P(t))]+$$
$$+\frac{K_2}{B_t}e^{-r(T-t)}\Phi(b_2^P(t)), \quad (3.7)$$

$$X_t^P=-S_t[\Phi(b_1^P(t))-\Phi(b_2^P(t))]+$$
$$+K_1e^{-r(T-t)}[\Phi(b_1^P(t))-\Phi(b_2^P(t))]+$$
$$+K_2e^{-r(T-t)}\Phi(b_2^P(t)), \quad (3.8)$$

где $b_1^P=b_1^P(t)$, $b_2^P=b_2^P(t)$, $d_1^P=d_1^P(t)$, $d_2^P=d_2^P(t)$ при $t=0$.

Доказательство. Так как $f^P(S_T)=\min\{(S_T-K_1)^+,K_2\}$, то аналогично выводу (2.9)

$$F_{T-t}^P(S_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\min\left\{\left(K_1-S_te^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}}\right)^+,K_2\right\}\times$$
$$\times e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_2^P(t)}^{d_1^P(t)}\left(K_1-S_te^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}}\right)e^{-\frac{z^2}{2}}dz+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_2^P(t)}K_2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_te^{r(T-t)}\int_{d_2^P(t)}^{d_1^P(t)}e^{-\frac{z^2}{2}+\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}dz+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_1\int_{d_2^P(t)}^{d_1^P(t)}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_2\int_{-\infty}^{d_2^P(t)}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_te^{r(T-t)}\int_{d_2^P(t)}^{d_1^P(t)}e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}dz+$$
$$+K_1(\Phi(d_1^P(t))-\Phi(d_2^P(t)))+K_2\Phi(d_2^P(t))=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_te^{r(T-t)}\int_{b_2^P(t)}^{b_1^P(t)}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+$$
$$+K_1(\Phi(d_1^P(t))-\Phi(d_2^P(t)))+K_2\Phi(d_2^P(t))=$$
$$=-S_te^{r(T-t)}(\Phi(d_1^P(t))-\Phi(d_2^P(t)))+$$
$$+K_1(\Phi(d_1^P(t))-\Phi(d_2^P(t)))+K_2\Phi(d_2^P(t)). \quad (3.9)$$

Подстановка (3.9) в (2.10) – (2.13) приводит к (3.5) – (3.8). Теорема доказана.

4. Анализ решения

Теорема 3. Имеют место паритетные соотношения:

$$P_T=C_T+S_0[\Phi(b_2^P)-\Phi(b_2^C)]-$$
$$-K_1e^{-rT}\Phi(b_2^P)-\Phi(b_2^C)]+K_2e^{-rT}\Phi(b_2^P)-\Phi(b_2^C)], \quad (4.1)$$

$$\gamma_t^P=\gamma_t^C+\Phi(b_2^P(t))-\Phi(b_2^C(t)), \quad (4.2)$$

$$\beta_t^P=\beta_t^C+\frac{K_1}{B_t}e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2^C(t))-\Phi(d_2^P(t))]+$$
$$+\frac{K_2}{B_t}e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2^C(t))-\Phi(-d_2^C(t))], \quad (4.3)$$

$$X_t^P=X_t^C+S_t[\Phi(d_2^P(t))-\Phi(d_2^C(t))]-$$
$$-K_1e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2^P(t))-\Phi(d_2^C(t))]+$$
$$+K_2e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2^P(t))-\Phi(-d_2^C(t))]. \quad (4.4)$$

Доказательство следует непосредственно из соотношений Теорем 1 и 2 с учетом свойства функции Лапласа $\Phi(y)+\Phi(-y)=1$.

Замечание. Поскольку в случае опциона продажи $K_2<K_1$, то паритетные соотношения справедливы при этом условии.

Теорема 4. Пусть $\overline{C_T}$, $\overline{\gamma_t^C}$, $\overline{\beta_t^C}$, $\overline{X_t^C}$ есть пределы C_T, γ_t^C, β_t^C, X_t^C при $K_2\uparrow\infty$. Пусть $\overline{P_T}$, $\overline{\gamma_t^P}$, $\overline{\beta_t^P}$, $\overline{X_t^P}$ есть пределы P_T, γ_t^P, β_t^P, X_t^P при $K_2\uparrow K_1$. Тогда

$$\overline{C_T}=S_0\Phi(-b_1^C)-K_1e^{-rT}\Phi(-d_1^C), \quad (4.5)$$

$$\overline{\gamma_t^C}=\Phi(-b_1^C(t)), \quad (4.6)$$

$$\overline{\beta_t^C}=-\frac{K_1}{B_t}e^{-r(T-t)}\Phi(-d_1^C(t)), \quad (4.7)$$

$$\overline{X_t^C}=S_t\Phi(-b_1^C(t))-K_1e^{-r(T-t)}\Phi(-d_1^C(t)), \quad (4.8)$$

$$\overline{P_T}=-S_0\Phi(b_1^P)+K_1e^{-rT}\Phi(d_1^P), \quad (4.9)$$

$$\overline{\gamma_t^P}=-\Phi(b_1^P(t)), \quad (4.10)$$

$$\overline{\beta_t^P} = \frac{K_1}{B_t} e^{-r(T-t)} \Phi(d_1^P(t)), \qquad (4.11)$$

$$\overline{X_t^P} = -S_t \Phi(b_1^P(t)) + K_1 e^{-r(T-t)} \Phi(d_1^P(t)), \quad (4.12)$$

$$\overline{P_T} = \overline{C_T} - S_0 + K_1 e^{-rT}, \qquad (4.13)$$

$$\overline{\gamma_t^P} = \overline{\gamma_t^C} - 1, \qquad (4.14)$$

$$\overline{\beta_t^P} = \overline{\beta_t^C} + \frac{K_1}{B_t} e^{-r(T-t)}, \qquad (4.15)$$

$$\overline{X_t^P} = \overline{X_t^C} - S_t + K_1 e^{-r(T-t)}. \qquad (4.16)$$

Данные результаты следуют непосредственно из соотношений Теорем 1–3 в результате указанных предельных переходов и представляют собой полное решение задач хеджирования стандартных Европейских опционов купли и продажи [4, 9]. Формула (4.5) известна как формула Блэка-Шоулса [1, 3, 4].

Сравним стоимости экзотических опционов купли и продажи со стандартными Европейскими опционами.

Теорема 5. Пусть $\Delta C_T = \overline{C_T} - C_T$, $\Delta P_T = \overline{P_T} - P_T$. Тогда

$$\Delta C_T = S_0 \Phi(-b_2^C) - (K_1 + K_2) e^{-rT} \Phi(-d_2^C), \quad (4.17)$$

$$\Delta P_T = -S_0 \Phi(b_2^P) + (K_1 - K_2) e^{-rT} \Phi(d_2^P). \quad (4.18)$$

Формулы (4.17), (4.18) следуют непосредственно из (2.5), (3.5), (4.5), (4.9).

Теорема 6. Коэффициенты чувствительности $\kappa^C = dC_T/dK_2$, $\kappa^P = dP_T/dK_2$, $\zeta^C = dC_T/dK_1$, $\zeta^P = dP_T/dK_1$, $\xi^C = dC_T/dS_0$, $\xi^P = dP_T/dS_0$, характеризующие изменение стоимостей опционов, соответственно по параметрам K_2, K_1, S_0, определяются формулами

$$k^C = e^{-rT} \Phi(-d_2^C) + \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\frac{S_0}{K_1 + K_2} \phi(b_2^C) - e^{-rT} \phi(d_2^C) \right), \quad (4.19)$$

$$k^P = e^{-rT} \Phi(d_2^P) + \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(e^{-rT} \phi(d_2^P) - \frac{S_0}{K_1 - K_2} \phi(b_2^P) \right), \quad (4.20)$$

$$\varsigma^C = \frac{S_0}{\sigma\sqrt{T}} \left[\frac{\phi(b_2^C)}{K_1 + K_2} - \frac{\phi(b_1^C)}{K_1} \right] - e^{-rT} [\Phi(d_2^C) - \Phi(d_1^C)] - \frac{e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}} [\phi(d_2^C) - \phi(d_1^C)], \quad (4.21)$$

$$\varsigma^P = \frac{S_0}{\sigma\sqrt{T}} \left[\frac{\phi(b_2^P)}{K_1 - K_2} - \frac{\phi(b_1^P)}{K_1} \right] - e^{-rT} [\Phi(d_2^P) - \Phi(d_1^P)] - \frac{e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}} [\phi(d_2^P) - \phi(d_1^P)], \quad (4.22)$$

$$\xi^C = \Phi(b_2^C) - \Phi(b_1^C) - \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\phi(b_2^C) - \phi(b_1^C)] + \frac{e^{-rT}}{S_0 \sigma\sqrt{T}} [(K_1 + K_2) \phi(d_2^C) - K_1 \phi(d_1^C)], \quad (4.23)$$

$$\xi^P = \Phi(b_2^P) - \Phi(b_1^P) - \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\phi(b_2^P) - \phi(b_1^P)] + \frac{e^{-rT}}{S_0 \sigma\sqrt{T}} [(K_1 - K_2) \phi(d_2^P) - K_1 \phi(d_1^P)]. \quad (4.24)$$

Доказательство производится дифференцированием (2.5), (3.5) по соответствующим параметрам.

Теорема 7. Асимптотические свойства рациональной стоимости экзотических опционов, а также портфелей и капиталов, которые им соответствуют, заключаются в следующем:

1. $\lim\limits_{K_1 \to 0} C_T = S_0 \Phi(b_2^C) + K_2 e^{-rT} \Phi(-d_2^C)$;

   $\lim\limits_{K_1 \to \infty} C_T = 0$; $\lim\limits_{K_2 \to 0} C_T = 0$; $\lim\limits_{K_2 \to \infty} C_T = \overline{C_T}$;

   $\lim\limits_{S_0 \to 0} C_T = 0$; $\lim\limits_{S_0 \to \infty} C_T = K_2 e^{-rT}$.

2. $\lim\limits_{K_2 \to K_1} P_T = -S_0 \Phi(b_1^C) + K_1 e^{-rT} \Phi(d_1^C) = P_T$;

   $\lim\limits_{K_2 \to 0} P_T = 0$; $\lim\limits_{K_1 \to \infty} P_T = K_2 e^{-rT}$; $\lim\limits_{S_0 \to 0} P_T = K_2 e^{-rT}$;

   $\lim\limits_{S_0 \to \infty} P_T = 0$.

Доказательство сформулированных результатов проводится непосредственно с использованием свойств функции Лапласа: $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=0$; $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$; $\Phi(x)$ – непрерывна справа по x.

5. Заключение

1. Исследования показывают, что $\Delta C_T > 0$, $\Delta P_T > 0$, т. е. стоимости стандартных опционов выше стоимости экзотических опционов. Данное свойство объясняется тем, что для владельца опциона получение более высокого дохода возможно в случае стандартного, нежели экзотического опциона, выплаты по которому ограничены, а за возможность получения более высокого дохода следует больше платить.
2. Исследования показывают, что $\kappa^C > 0$, если $S_0 e^{rT} > K_1 + K_2$, и $\kappa^P > 0$, если $S_0 e^{rT} > K_1 - K_2$. Таким образом, стоимости опционов купли и продажи являются возрастающими функциями параметра K_2 при выполнении указанных условий. Экономический смысл этого свойства заключается в следующем. С ростом параметра K_2 у владельца опциона увеличивается возможность получения большей прибыли, за возможность получения которой необходимо больше заплатить, поэтому цена опциона и возрастает.
3. Экономический смысл предельных свойств стоимостей опционов (Теорема 7) очевиден.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. – 1973. – May/Jun. – P. 637–657.
2. Merton R. Theory of rational option pricing // Bell J. Economics and Management Science. – 1973. – V. 4. – P. 141–183.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: ФАЗИС, 1998. – 1010 с.
4. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 80–129.
5. Новиков А.А. Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и её применения. – 1998. – Т. 43. – № 1. – С. 152–161.
6. Follmer H., Len K.P. Quantile hedging // Finance and Stochastic. – 1999. – V. 3. – № 3. – P. 251–273.
7. Rubinstein M. Exotic options // Finance working paper. – 1991. – № 220. – Inst. of Business and Economic research. University of California. Berkley.
8. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – № 15. – С. 53–57; № 16. – С. 60–64; № 17. – С. 68–73.
9. Демин Н.С., Лазатникова А.В. Исследование портфеля, капитала и стоимости опциона в случае стандартного Европейского опциона продажи с непрерывным временем // Вестник ТГУ. Приложение. – 2002. – №1(I). – С. 147–149.

Поступила 16.10.2006 г.

УДК 519.865

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЦИОНА КУПЛИ В СЛУЧАЕ ХЕДЖИРОВАНИЯ С ЗАДАННОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ

Н.С. Демин, А.И. Трунов

Томский государственный университет
E-mail: anton.trunov@ngs.ru

Получены формулы, определяющие стоимость опциона, а также эволюцию во времени портфеля и капитала для Европейского опциона купли в случае хеджирования с заданной вероятностью (квантильного хеджирования) при непрерывном времени и диффузионной модели (B, S)-финансового рынка. Исследуются некоторые свойства решения.

1. Введение

Используемые на рынках финансовые инструменты становятся более разнообразными и порождают довольно изощренные потоки платежей. Ситуация усложняется тем, что изменение процентных ставок и доходностей на рынках стохастические, а математические модели этих изменений – случайные процессы. Поэтому такая основная задача участников финансовых рынков, как определение цен финансовых инструментов, может быть решена только с привлечением вероятностных методов. При этом построение математической модели финансового рынка и анализ процессов, которые там происходят, требуют использования математических методов на достаточно высоком уровне. В связи с этим большую популярность приобрела финансовая математика, основным объектом исследования которой являются различные модели рынка ценных бумаг [1, 2]. В данной работе проводится исследование неклассической задачи теории опционов – задачи хеджирования с заданной вероятностью выполнения платежного обязательства, для случая опциона купли, когда в отличие от стационарных опционов платежное обязательство выполняется не с вероятностью единица, а с вероятностью меньшей единицы, что более соответствует реалиям финансового рынка.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, как пары активов: безрискового (банковский счет) B и рискового (акции) S, представляемых своими ценами B_t и S_t, $t\in[0,T]$. В этом случае говорят о (B, S) – рынке с непрерывным временем [1, 2]. Активы B и S будем называть *основными активами* или *основными ценными бумагами*. Относительно банковского счета B предполагается, что $B=(B_t)_{t>0}$ – детерминированная функция, подчиняющаяся уравнению $dB_t=rB_tdt$, т. е. $B_t=B_0e^{rt}$, $B_0>0$, $r\geq 0$ где r – процентная ставка (банковский процент). Для описания эволюции стоимости акции $S=(S_t)_{t\geq 0}$ будем предполагать, что рассмотрение задачи происходит на винеровском стохастическом базисе $(\Omega,F,\mathbf{F}=(F_t)_{t>0},\mathrm{P})$ [1, 3].

Введение в рассмотрение винеровского процесса обусловлено ролью случайного ингредиента, который определяет «хаотическую» структуру в реально наблюдаемых флуктуациях цен акций. В этой связи П. Самуэльсоном была предложена модель «геометрического», или «экономического», броуновского движения $S=(S_t)_{t\geq 0}$, согласно которой S является случайным процессом с

$$S_t=S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right), \qquad (1)$$