УДК 62.505

# ОЦЕНКА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

З.К. Иманалиев, Ж.Т. Баракова

Кыргызско-Российский славянский университет, г. Бишкек
E-mail: Janna05_05@mail.ru

*Исследуется задача оптимального управления для однопродуктовой модели экономики. Предложен новый подход, который основан на простых свойствах убывающей функции на замкнутом промежутке.*

## Введение

Во многих работах качественные исследования моделей экономических систем и разработка аналитических алгоритмов оптимизации основаны на идеях достаточных условий оптимальности [1] или на непосредственном применении принципа максимума [2]. В последние годы исследование задач оптимального управления методом теории возмущений [3, 4] представляет особый интерес и при этом большое внимание уделяется к изучению моделей с малым возмущением, которые требуют высокой культуры асимптотического анализа. Асимптотический анализ дает возможность получить качественную картину решения и позволяет предложить экономичные вычислительные процедуры для приближенного решения исходных задач оптимального управления, решение которых затруднено, либо практически невозможно из-за нелинейности, вычислительной неустойчивости, высокой размерности и т. д.

Малые возмущения в задачах оптимального управления могут быть введены искусственно, и тогда теория возмущений выступает как метод исследования исходной задачи [4]. В этом смысле ее можно применить к изучению магистральных свойств траекторий и режимов развития экономической системы.

В данной работе методом малого параметра исследуется задача оптимального управления для однопродуктовой модели экономики и проводится сравнительный анализ с известными результатами, которые получены в [1] другими способами. Следует отметить, что в начале этой задачи требуется формировать магистраль данной модели и найти соответствующее управление, реализующее эту магистраль. При решении последнего, здесь предложен новый подход, который основан на простых свойствах убывающей функции на замкнутом промежутке.

### 1. Решение задачи управления экономики на макроуровне с линейным функционалом

Рассмотрим процесс экономики, который характеризуется в каждый момент времени $t$ набором переменных $X, Y, C, K, L, J$, где $X$ – интенсивность валового продукта, $Y$ – интенсивность конечного продукта, $C$ – непроизводственное потребление, $J$ – валовые капитальные вложения, $K$ – размер капитала, $L$ – трудовые ресурсы.

Взаимозависимости этих переменных определяются следующими соотношениями:

$$Y = (1-a)X = J + C, \qquad \mu\dot{K} = J - \varepsilon K, \qquad (1)$$

где $0<a<1$, $\varepsilon$ – коэффициент амортизации, $\mu$ – «малый параметр» ($0\le\mu\le1$) характеризует темп изменения наличного капитала. Из ур. (1) получаем

$$\mu\dot{K} = (1-a)(1-u)X - \varepsilon K, \qquad (2)$$

где $u = \dfrac{C}{Y}$ – доля непроизводственного потребления,

$$0 \le u \le 1. \qquad (3)$$

Размеры валового продукта определяются заданной производственной функцией $F(K,L,t)$, т. е.

$$0 \le X \le F(K,L,t). \qquad (4)$$

Предполагается, что производственная функция $F(K,L,t)$ непрерывна и дважды дифференцируема, причем при любых положительных затратах факторов имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial F}{\partial K}>0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0,\ \frac{\partial F}{\partial L}>0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0,\ \lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial K}=\infty,$$
$$\lim_{K\to\infty}\frac{\partial F}{\partial K}=0,\ \lim_{L\to 0}\frac{\partial F}{\partial L}=\infty,\ \lim_{L\to\infty}\frac{\partial F}{\partial L}=0.$$

Будем считать также, что отдача от масштаба производства постоянна, т. е. для любого положительного числа $\lambda$:

$$F(\lambda K,\lambda L,t)=\lambda F(K,L,t). \qquad (5)$$

При исследовании данного процесса учитываются следующие ограничения:

$$K(0)=K_0,\quad K(t)\geq K_3(t),$$

где $K_3$ – заданный уровень капитала, $K_0$ – уровень капитала в начальный момент времени. Допустимый процесс представляется совокупностью функции $\upsilon=(K(t),X(t),u(t))$, которые удовлетворяют условиям (1–5).

Задача управления данной экономикой состоит в том, чтобы процесс $\upsilon=(K(t),X(t),u(t))$, который обеспечивал бы наибольшее среднедушевое потребление на отрезке времени [0,T] с учетом дисконтирования потребления, т. е.

$$J_1=\int_0^{\mathrm{T}} e^{-\delta t}\frac{C}{L}dt, \qquad (6)$$

где $e^{-\delta t}$ – взвешивающая функция, $\delta$ – коэффициент дисконтирования.

Промежуток времени переходного процесса будем считать конечным. Тогда в конечный момент времени ($t=T$) нужно задать минимально допустимое значение капитала, для того чтобы обеспечить возможность потребления и за пределами данного горизонта времени $K(T)=K_1$.

Редуцируем данную задачу. Для этого введём относительные переменные: $k=\frac{K}{L}$ – величина капитала на одного рабочего (капиталовооруженности), $c=\frac{C}{L}$ – среднедушевое потребление, $x=\frac{X}{L}$ – производительность труда. Считаем, что прирост трудовых ресурсов происходит с постоянным темпом, равным $n$, тогда $\dot{L}=nL$.

Проведем преобразование функционала (6) к относительным переменным:

$$J_1=\int_0^T e^{-\delta t}(1-a)uxdt\to\max \qquad (7)$$

или $$J_1=-\int_0^T e^{-\delta t}(1-a)uxdt\to\min. \qquad (7)$$

Тогда редуцированную задачу можно сформулировать так: найти такой процесс $\upsilon=(K(t),X(t),u(t))$, который доставляет минимум (7) при ограничениях

$$\mu\dot{k}=-(\varepsilon+n)k+(1-a)(1-u)x, \qquad (8)$$

$$k(0)=k_0,\quad k(T)=k_1,$$
$$0\leq u\leq 1,\quad x=f(k,t)\geq 0, \qquad (9)$$
$$k(t)\geq k_3(t),\quad 0\leq\mu\leq 1,$$

где $f(k,t)=\frac{1}{L}F(k,L,t)$.

Обозначим через $D$ множество значений $k$, удовлетворяющие условия (8), (9) и назовем её допустимой областью процесса.

Подобная задача в случае $\mu$=1 рассмотрена в [1].

Наибольшее среднедушевое потребление, которое должно быть обеспечено этим процессом оценивается величиной функционала (7) с обратным знаком. В этой задаче состоянием системы является $k$ – величина капитала на одного рабочего, управлением – производительность труда $x$ и доля потребления $u$. Уравнением процесса служит дифференциальное уравнение роста капиталовооруженности.

Если ввести «быстрое» время $\tau$ по формуле $\tau=t/\mu$, где $\mu$ – малый параметр, тогда во времени $\tau$ исходное $t$ является «медленным» временем. В таком случае, переменные коэффициенты исследуемой системы в «быстром» времени $\tau$ окажутся медленно меняющимися. Введение в систему малого параметра $\mu$ – это определенная идеализация, которая подчеркивает то, что темп протекания процесса выше (примерно, $1/\mu$ раз увеличивается), чем в обычном режиме.

Пусть размеры конечного продукта определяются производственной функцией Кобба-Дугласа [1, 5]. Тогда производительность труда $x$ определяется функцией

$$x=be^{\rho t}k^{\alpha},\quad \alpha=1-\beta, \qquad (10)$$

где $\rho$ – коэффициент определяющий темп роста технического процесса, $\alpha$ – коэффициент эластичности выпуска по производственным фондам; $\beta$ – коэффициент эластичности выпуска по труду.

Уравнение (8) с учетом (10) записывается в виде:

$$\mu\dot{k}=-(\varepsilon+n)k+(1-a)(1-u)be^{\rho t}k^{\alpha}. \qquad (11)$$

Рассмотрим задачу (7), (11), (9). Введем новую функцию

$$V=ke^{-\delta t}. \qquad (12)$$

Тогда с учетом (12) из (11) будем иметь:

$$\mu\frac{dV}{dt}=(-(\varepsilon+n+\delta\mu)k+(1-a)be^{\rho t}k^{\alpha})e^{-\delta t}-$$
$$-e^{-\delta t}b(1-a)e^{\rho t}k^{\alpha}u. \qquad (13)$$

Теперь из правой части (13) исключим $k$. Потребуем, чтобы сумма, стоящая перед $e^{-\delta t}$, т. е. функция

$$m(k,t)=-(\varepsilon+n+\delta\mu)k+(1-a)be^{\rho t}k^{\alpha}$$

не зависела от $k$. Тогда

$$\frac{\partial m}{\partial k}=-(\varepsilon+n+\delta\mu)+(1-a)be^{\rho t}\alpha k^{\alpha-1}=0.$$

Отсюда будем иметь:

$$k^{\alpha-1}=\frac{\varepsilon+n+\delta\mu}{\alpha(1-a)be^{\rho t}}=k^{-\beta} \qquad (14)$$

или

$$k = k_\mu^* = \left( \frac{\alpha(1-a)b}{\varepsilon + n + \delta\mu} \right)^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\rho}{\beta}t}. \qquad (15)$$

С учетом (12) уравнению (13) можно придать вид

$$\mu \frac{dV}{dt} = (-(\varepsilon + n + \delta\mu) + (1-a)be^{\rho t}k^{\alpha-1})V -$$

$$-b(1-a)e^{\rho t}uk^{\alpha-1}V. \qquad (16)$$

Тогда с учетом (14) из (16) получим:

$$\mu \frac{dV}{dt} = -\frac{\varepsilon + n + \delta\mu}{\alpha}(u - \beta)V. \qquad (17)$$

С учетом (14) функционал (7) можно записать в виде:

$$J = -\frac{\varepsilon + n + \delta\mu}{\alpha} \int_0^T uVdt. \qquad (18)$$

Учитывая (15) из (12) будем иметь:

$$V = \left( \frac{\alpha(1-a)b}{\varepsilon + n + \delta\mu} \right)^{\frac{1}{\beta}} e^{-(\delta - \frac{\rho}{\beta})t} = e^{-(\delta - \frac{\rho}{\beta})t} V(0), \qquad (19)$$

$$V(0) = k(0) = \left( \frac{\alpha(1-a)b}{\varepsilon + n + \delta\mu} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Из формулы (19) найдем:

$$\dot{V} = -(\delta - \frac{\rho}{\beta})V. \qquad (20)$$

Сравнивая уравнения (17), (20) получим:

$$\frac{\varepsilon + n + \delta\mu}{\alpha}(u - \beta) = \mu(\delta - \frac{\rho}{\beta}). \qquad (21)$$

Условие (21) имеет место, если

$$u = u_\mu^* = 1 - \alpha \frac{\frac{\rho}{\beta}\mu + \varepsilon + n}{\varepsilon + n + \delta\mu}. \qquad (22)$$

Аналогично в [1], функцию $k_\mu^*(t)$ (15) назовем магистралью данной динамической модели. Управление, реализующее эту магистраль – постоянная величина, которая определяется соотношением (22). Тогда с учетом (22) соотношение (18) записывается в виде:

$$J = -\frac{\varepsilon + n + \delta\mu}{\alpha} \left( 1 - \alpha \frac{\frac{\rho}{\beta}\mu + \varepsilon + n}{\varepsilon + n + \delta\mu} \right) \int_0^T V(t)dt.$$

Здесь подынтегральная функция

$$V(t) = e^{-\delta t} k_\mu^*(t) = e^{-(\delta - \frac{\rho}{\beta})t} \cdot V(0)$$

– дисконтированная величина капитала.

Из (19) видно, что при $\delta > \frac{\rho}{\beta}$ функция – убывающая на отрезке $[0, T]$, а $V(0)$ является её наибольшим значением, т. е.

$$Te^{-(\delta - \frac{\rho}{\beta})T} V(0) \le \int_0^T V(t)dt \le TV(0).$$

При этом

$$J_\mu^* = J_{\min} = -\frac{\varepsilon + n + \delta\mu}{\alpha} \left( 1 - \alpha \frac{\frac{\rho}{\beta}\mu + \varepsilon + n}{\varepsilon + n + \delta\mu} \right) V(0)T.$$

При $\delta < \frac{\rho}{\beta}$ функция $V(t)$ – возрастающая на отрезке $[0, T]$. Тогда

$$TV(0) \le \int_0^T V(t)dt \le T e^{(\frac{\rho}{\beta} - \delta)T} V(0),$$

$$J_\mu^* = J_{\min} =$$

$$= -\frac{\varepsilon + n + \delta\mu}{\alpha} \left( 1 - \alpha \frac{\frac{\rho}{\beta} + \varepsilon + n}{\varepsilon + n + \delta\mu} \right) T e^{(\frac{\rho}{\beta} - \delta)T} V(0). \qquad (23)$$

При $\delta = \frac{\rho}{\beta}$, будем иметь

$$J_\mu^* = J_{\min} = -\frac{\varepsilon + n + \delta\mu}{\alpha} \beta \cdot T \cdot V(0). \qquad (24)$$

В «быстром» времени $\tau$ магистраль

$$k_\mu^* = k_\mu^*(\tau\mu) = \left( \frac{\alpha(1-a)b}{\varepsilon + n + \delta\mu} \right)^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\rho}{\beta}\tau\mu} \qquad (25)$$

окажется медленно меняющимися функциями.

При $\mu \to 0$, $k_\mu^*$, $u_\mu^*$, $J_\mu^*$ имеют следующие предельные значения:

$$k_\mu^* \to k_0^* = \left( \frac{\alpha(1-a)b}{\varepsilon + n} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$u_\mu^* \to u_0^* = \beta, \quad J_\mu^* \to J_0^* = -\frac{\varepsilon + n}{\alpha} \beta V(0) \cdot T.$$

За короткие промежутки времени изменение «медленных» переменных не сказывается на быстрых уравнениях и следовательно предельные значения $k_0^*$, $u_0^*$ могут служить в качестве асимптотического приближения при формировании магистрали и дает возможность получить его качественную картину.

Для того чтобы процесс $\upsilon$, был оптимальным в смысле поставленной задачи решение $k_\mu^*$ должно удовлетворить заданные краевые условия (9). Но это не так, решение $k_\mu^*$ не может удовлетворить краевым условиям (9), так как через эти точки проходят другие кривые, которые являются частными решениями исходного уравнения (11) при заданном управлении $u$.

Определим эти кривые и их точки пересечения с магистралью (точки переключения) $k_\mu^*$.

Разделив обе части дифференциального уравнения (5) на $k^\alpha$ имеем:

$$\mu k^{-\alpha} \dot{k} = -(\varepsilon + n)k^{1-\alpha} + (1-a)(1-u)be^{\rho t}.$$

Введём новую переменную

$$k^{1-\alpha} = k^{\beta} = z. \qquad (26)$$

Тогда с учётом (25) из (24) получим:

$$\mu \dot{z} = -\beta(\varepsilon + n)z + \beta(1-a)(1-u)be^{\rho t}. \qquad (27)$$

При известном $u$ ($u$ – постоянная величина) точное решение (27) с начальным условием $z(0)=k_0^{\beta}$ записывается в виде формулы Коши:

$$z(t) = e^{-\beta(\varepsilon+n)\frac{t}{\mu}} k_0^{\beta} + \frac{\beta}{\mu}(1-a)(1-u)b\int_0^t e^{-\beta(\varepsilon+n)\frac{t-s}{\mu}} e^{\rho s} ds$$

или

$$z(t) = e^{-\beta(\varepsilon+n)\frac{t}{\mu}} \left( k_0^{\beta} - \frac{a_0(1-u)}{\varepsilon+n+\mu\frac{\rho}{\beta}} \right) + \frac{a_0(1-u)}{\varepsilon+n+\mu\frac{\rho}{\beta}} e^{\rho t}, \qquad (28)$$

где $a_0=b(1-a)$.

Аналогично решение уравнения (27) с начальным условием $z(T)=k_1^{\beta}$ определяется соотношением:

$$z(t) = e^{-\beta(\varepsilon+n)\frac{t}{\mu}} \left( k_0^{\beta} - \frac{a_0(1-u)}{\varepsilon+n+\mu\frac{\rho}{\beta}} \right) + \frac{a_0(1-u)}{\varepsilon+n+\mu\frac{\rho}{\beta}} e^{\rho t}, \qquad (29)$$

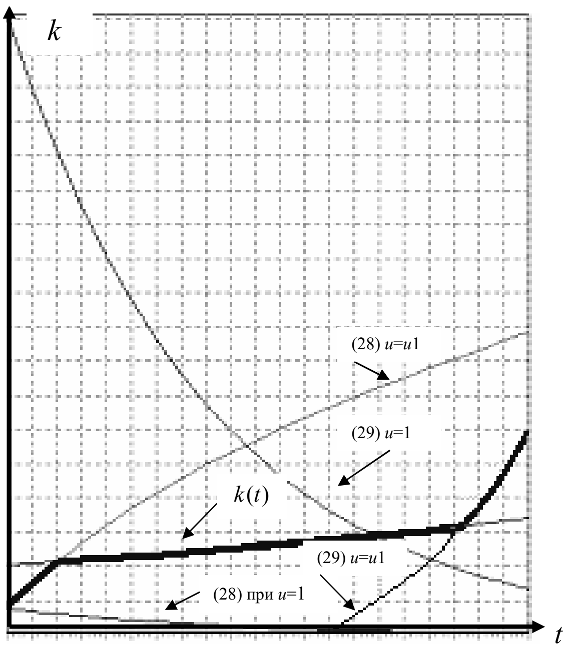


***Рисунок.*** *Оптимальная траектория с переключениями*

Заметим, что если для данной задачи построить функцию Гамильтона, тогда она будет зависеть от управления $u$ линейно и её максимальные значения достигаются только в граничных значениях $u$. Но в реальных экономических задачах, как отмечено в [1], минимальный уровень потребления строго положителен: $u \le u_* \le u \le 1$. Поэтому Гамильтониан принимает максимальные значения в точках $u=u_*$, $u=1$ и через эти значения можно определить точки переключения.

Для определения точки пересечения магистрали с границами допустимой области $D$ имеем следующие соотношения:

$$\frac{a_0\alpha}{\lambda+\delta\mu} e^{\rho t} = e^{-\beta\lambda\frac{t}{\mu}} \left( k_0^{\beta} - \frac{a_0(1-u_i)}{\lambda+\mu\frac{\rho}{\beta}} \right) + \frac{a_0(1-u_i)}{\lambda+\mu\frac{\rho}{\beta}} e^{\rho t}, \qquad (30)$$

$$\frac{a_0\alpha}{\lambda+\delta\mu} e^{\rho t} =$$

$$= e^{-\beta\lambda\frac{t-T}{\mu}} \left( k_1^{\beta} - \frac{a_0(1-u_i)e^{\rho T}}{\lambda+\mu\frac{\rho}{\beta}} \right) + \frac{a_0(1-u_i)}{\lambda+\mu\frac{\rho}{\beta}} e^{\rho t}, \qquad (31)$$

где $\lambda=\varepsilon+n$, $a_0=b(1-a)$, $i=1,2$.

В формулах (30), (31) если $i=1$, то берется нижний предел $u=u_1=u_*$, если $i=2$, то $u=u_2=2$. Тогда левые и правые точки переключения вычисляются следующими формулами:

$$t_1 = -\frac{\mu}{\beta\lambda+\mu\rho} \ln \frac{\dfrac{a_0\alpha}{\lambda+\delta\mu} - \dfrac{(1-u_i)a_0}{\lambda+\mu\frac{\rho}{\beta}}}{k_0^{\beta} - \dfrac{a_0(1-u_i)}{\lambda+\mu\frac{\rho}{\beta}}},$$

$$t_2 = \frac{\beta\lambda \mathrm{T}}{\beta\lambda+\mu\rho} - \frac{\mu}{\beta\lambda+\mu\rho} \ln \frac{\dfrac{a_0\alpha}{\lambda+\delta\mu} - \dfrac{(1-u_i)a_0}{\lambda+\mu\frac{\rho}{\beta}}}{k_1^{\beta} - \dfrac{a_0(1-u_i)}{\lambda+\mu\frac{\rho}{\beta}} e^{\rho \mathrm{T}}}.$$

Границы допустимой области определяются соотношениями (28), (26) при значениях $u=u_*$, $u=1$. Положим $k_0<k_\mu^*(0)$, $k_1>k_\mu^*(T)$. Тогда магистраль (15) проходит так, как показано в рисунке. Как видно из рисунка, оптимальная траектория состоит из трех участков с моментами переключения $t_1$ и $t_2$. Начиная с момента $t_1$ до момента $t_2$ развитие идет по магистрали, а вне интервала ($t_1$, $t_2$) потребление находится на нижнем уровне $u^*$, т. е. в этих промежутках времени в экономике происходит процесс накопления. Как мы отметили выше, что малый параметр вводится искусственно в систему, для того чтобы в результате мы получили упрощённый алгоритм, который позволит нам предложить экономичные вычислительные процедуры. Поэтому нам необходимо вывести соответствующие асимптотические формулы, которые дают возможности построить оптимальную траекторию с определённой точностью, сохраняя при этом качественные особенности изучаемых процессов.

Переходя к «быстрому» $\tau=t/\mu$ времени произведём замену переменной в (27):

$$\frac{dz}{d\tau} = -\beta\lambda z + \beta a_0(1-u), \quad z(0) = k_0^{\beta}. \qquad (32)$$

Решение уравнения (32) при известном $u$ имеет вид:

$$z(\tau)=e^{-\beta\lambda\tau}\left(k_0^{\beta}-\frac{a_0(1-u)}{\lambda}\right)+\frac{a_0(1-u)}{\lambda}. \qquad (33)$$

Для $\sigma=\dfrac{t-T}{\mu}$ из (27) будем иметь:

$$\frac{dz}{d\sigma}=-\beta\lambda z+\beta a_0(1-u)e^{\rho T} \quad z(0)=k_1^{\beta}. \qquad (34)$$

Решение (34) записывается в виде:

$$z(\sigma)=e^{-\beta\lambda\sigma}\left(k_1^{\beta}-\frac{a_0(1-u)}{\lambda}e^{\rho T}\right)+\frac{a_0(1-u)e^{\rho T}}{\lambda}. \qquad (35)$$

Тогда имеем следующие асимптотические формулы, определяющие точки пересечения магистрали с границами допустимой области $D$:

$$\tau_0=\frac{1}{\lambda\beta}\ln\frac{\lambda k_0^{\beta}-a_0(1-u_i)}{a_0(u_i-\beta)},$$

$$\sigma_T=\frac{1}{\lambda\beta}\ln\frac{\lambda k_1^{\beta}-a_0(1-u_i)e^{\rho T}}{a_0(\alpha-(1-u_1)e^{\rho T})}.$$

При этом сама магистраль определяется из (15), т. е. берётся предельное значение $k_\mu$ при $\mu\to 0$:

$$k_0^{*}=\left(\frac{a_0\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

где $a_0=b(1-a)$, $\lambda=\varepsilon+n$.

Следует заметить, что первые слагаемые в формулах (33), (35) являются соответственно левыми и правыми «пограничными функциями» [4], которые аппроксимируют переход от начального состояния на магистраль и переход с магистрали в конечное состояние.

### Заключение

Как показывает результаты сравнительного анализа, ведения малого параметра и исследования задачи оптимального управления методом малого параметра позволяет:

- получить упрощенный алгоритм решения задачи, который сокращает объем вычислительных работ в 5...6 раз;
- определить скорость изменения наличного капитала на одного рабочего и получить оценку влияния малого параметра на изменения моментов выхода на магистраль.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. – М.: Высшая школа, 1990. – 430 с.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
4. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ. – Т. 20. – М.: ВИНИТИ, 1982. – С. 3–77.
5. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 606 с.

*Поступила 13.03.2006 г.*