

УДК 519.233.5+519.246.85

ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

С.С. Торбунов

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, г. Барнаул

E-mail: sle@agtu.secna.ru

Построение регрессионных математических моделей нелинейных и стохастических процессов во многих исследованиях является единственным методом, позволяющим получить адекватное решение поставленной задачи. Физический эксперимент в сочетании с аналитическими методами и принципом внешнего дополнения, заключающемся в эмпирическом упрощении условий задачи с целью получить конечное решение, приводит к эффективным результатам в различных отраслях науки. В настоящей статье приведены три примера его использования для исследования устойчивости двухфазной высокотемпературной струи в ограниченном пространстве, в порошковой металлургии и исследования движения твердого тела в сопротивляющейся среде.

Важность эксперимента в современной науке и технике не вызывает сомнения. Чтобы представить себе масштабы повседневной экспериментальной работы, достаточно к натурным исследованиям, проводимым в области фундаментальных наук и при проектировании новой техники, добавить испытания по образцам опытной и серийной продукции на тысячах заводов страны.

«Под экспериментом подразумевается общий процесс научного исследования и получения новых данных» [1. С. 3].

Технический прогресс приводит не только к увеличению сложности объектов испытаний — аппаратуры и оборудования, выпускаемых промышленностью; одновременно повышаются требования к глубине проникновения в сущность функционирования составных частей и взаимодействия между ними, а также к точности измерения регистрируемых величин и т. п.

Математическая модель становится неотъемлемым элементом испытаний, без построения которой невозможно осуществить планирование эксперимента, его проведение и обработку результатов. Модели, линейные по параметрам, стали в настоящее время традиционными. Гораздо реже используют модели, нелинейные по параметрам. Такие модели применяются при исследовании динамических объектов, кинетики и механизма явлений. При изучении динамических процессов зачастую на первое место ставится задача качественного исследования, а именно: выявление полного вектора определяющих параметров, установление интервалов изменения их значений для устойчивого режима или поддержания определенного режима протекания физического процесса, оптимизация процесса. Большой интерес в инженерных задачах представляют физические процессы, рассматриваемые в математической физике и механике сплошной среды, которые, как правило, являются стохастическими, что также необходимо учитывать при проведении эксперимента.

Условие детерминированности параметров позволяет упростить построение математических моделей стохастических систем в виде дифферен-

циальных уравнений динамических систем с переменными параметрами, а введение доказательных внешних дополнений, основу которых составляют уравнения и функции регрессий, не нарушая адекватности модельной системы, приводит к конечному решению; при этом аналитическая структура математической модели позволяет для качественного исследования динамической системы использовать теорию чувствительности и теорию устойчивости динамических систем по части переменных.

Конечно, даже при наличии сформулированных общих черт эксперимент не стал бы предметом отдельной науки, если бы задачи, решаемые различными исследователями, не имели ничего общего и полностью определялись спецификой той области знаний, где они работают. Однако это не так. Оказывается, можно выделить типовые задачи исследования, с которыми приходится сталкиваться каждому экспериментатору. К основным, наиболее распространенным типовым задачам исследования обычно относят:

- 1) получение некоторых предварительных сведений о процессе (обработка литературных данных, опросы специалистов и анализ результатов опросов, отсеивающий эксперимент);
- 2) получение формальных зависимостей;
- 3) проверку гипотез, т. е. некоторых содержательных предположений о свойствах объекта;
- 4) оптимизацию свойств изучаемого объекта (определение оптимальных соотношений, слежение за оптимумом и т. д.).

В построении математических моделей динамических систем физический эксперимент необходим в следующем:

- 1) построение статистической модели,
- 2) выявление кинематических зависимостей между параметрами физического процесса,
- 3) доказательство адекватности математической модели.

Основные принципы планирования эксперимента: отказ от полного перебора возможных входных состояний, принцип постепенного усложне-

ния математической модели (принцип последовательного планирования), принцип рандомизации (принцип приведения к случайности), принцип оптимальности планирования эксперимента.

Наиболее результативным является регрессионный эксперимент. Основное назначение регрессионного анализа – получение по экспериментальным данным регрессионных моделей объектов исследования, т. е. моделей вида $y=f(x,z)+e$, где x – вектор контролируемых и управляемых факторов (параметров), z – вектор только контролирующих факторов, e – аддитивная помеха. Построение регрессионной модели позволяет исследовать параметрическую устойчивость динамической системы, что решает задачу исследования устойчивости в условиях неприменимости теории устойчивости Ляпунова.

Действительно, после введения в исследование параметров $\lambda=\lambda_1, \dots, \lambda_n$ система дифференциальных уравнений первого порядка с переменными $y=y_1, \dots, y_l$ имеет вид:

$$\dot{y}_i = F_i(y, \lambda^{(0)}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

решение которой $y_i=y_i(\lambda^{(0)}, t)$.

Возмущение параметров $\Delta\lambda_k=\beta_k, k=1, 2, \dots, n$, приводит к возмущенным решениям, после разложения правой части которых в ряд Тейлора и, ограничившись членами первого порядка вариаций β_k , получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^l \frac{\partial y_i}{\partial \lambda_k} \beta_k \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \left(\sum_{k=1}^l \frac{\partial y_j}{\partial \lambda_k} \beta_k \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_k} \beta_k.$$

Введем чувствительность i -ой переменной по k -му параметру:

$$\partial y_i / \partial \lambda_k = s_{ik}$$

– и, учитывая независимость вариаций β_k , приходим к уравнениям чувствительности

$$\dot{s}_{ik} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_j} s_{jk} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_k}, \quad (*)$$

которые можно назвать вариационными уравнениями.

Устойчивость к возмущению параметров существует, если чувствительность $|s_{ik}| < \varepsilon$, где ε – малая заданная величина.

В общем случае s_{ik} следует из системы дифференциальных уравнений первого порядка. Однако, можно исключить влияние времени на чувствительность, полагая, согласно теории орбитальной устойчивости Пуанкаре, $\dot{s}_{ik}=0$. Оправданием этого служит также то, что момент времени, при котором условие $s_{ik}=\infty$ вызывает неустойчивость, абсолютно произволен, поскольку неизвестно, как учитывать время при исследовании чувствительности параметров. Поэтому для регрессионной модели

$$y_i = F_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

получаем следующее выражение для чувствительности:

$$s_{ik} = \Delta_k^{(i)} / \Delta,$$

где Δ – детерминант системы (*), а $\Delta_k^{(i)}$ – детерминант, полученный из Δ заменой соответствующих столбцов векторами $(-\partial F_i / \partial \lambda_k)$.

Понятно, что $s_{ik}=\infty$ (т. е. неустойчивость) следует из условия $\Delta=0$. Это условие определяет λ_{kp} , т. е. критическое значение параметра, вызывающее неустойчивость.

Одной из центральных теорем для всей теории параметрической устойчивости динамических систем является следующая **теорема**: «Устойчивость по Ляпунову и параметрическая устойчивость динамических систем в фазовом пространстве по чувствительности физических координат к изменению параметров эквивалентны» [2].

Достижением этой теории устойчивости динамических систем является ее применимость к исследованию устойчивости неконсервативных неавтономных динамических систем в фазовом пространстве, причем понятие чувствительности к возмущениям параметров может быть использовано в качестве способа оценки устойчивости, а устойчивость по чувствительностям всех физических координат к изменению параметров их полной совокупности является устойчивостью динамической системы с переменными параметрами в целом.

Таким образом, теория параметрической устойчивости является необходимым инструментом регрессионного анализа при качественном исследовании динамических систем с переменными параметрами в физическом эксперименте.

Построение регрессионной модели позволяет также решить задачу параметрической оптимизации динамических систем с детерминированными переменными параметрами [2].

В качестве примеров использования физического эксперимента в построении регрессионных моделей динамических систем с детерминированными переменными параметрами приведем следующие задачи.

Устойчивость двухфазной плазменной струи в ограниченном пространстве. В [2] исследовано возникновение неустойчивости и самовозбуждения колебаний, которое представляют широчайший интерес для многих разделов науки и техники. Для того, чтобы правильно моделировать техническую систему и адекватно записать её дифференциальные уравнения, необходимо иметь ясное качественное представление о механизмах и причинах возможной неустойчивости и возбуждения колебаний, позволяющее найти нужное для устранения самовозбуждения изменение конструкции или технологического режима. Такая задача возникает при исследовании движения горячей газовой (плазменной) струи в ограниченном пространстве (например, трубе) в процессе напыления легирующих элементов на подложку (например, с использованием самораспространяющегося высокотемпературного

синтеза – СВС-процесса). Причиной возникновения колебаний могут быть отрицательные трения или направленные воздействия, то есть имеют место автоколебания. Для определения условий устойчивости газовой струи необходимо знать параметры процесса, которые для данной технической системы могут быть определены только проведением специального эксперимента, а поэтому предпочтительнее такое исследование проводить по результатам построения регрессионной модели состояния газовой струи для определённого сечения в зависимости от параметров динамической системы.

При исследовании устойчивости технологического процесса, характеризуемого переносом массы и энергии (а именно это происходит при получении новых материалов наплавкой легирующих металлов в СВС-процессе) тепло- и массообмен связаны друг с другом. Состояние потока массы в некотором сечении газовой (плазменной) струи с частицами легирующего металла определяется критерием Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \lambda_1,$$

где ν – скорость струи, ν – кинематическая вязкость, d – средний диаметр частиц металла, и числом Прандтля, характеризующим физические свойства окружающей среды,

$$Pr = \frac{v^*}{a^*} = \lambda_2,$$

где a^* – коэффициент температуропроводности, ν^* – кинематическая вязкость окружающей среды. Иногда удобнее ввести критерий Нуссельта

$$Nu = \frac{a_k d}{\lambda^*},$$

где a_k – коэффициент конвективного теплообмена (теплоотдачи), λ^* – коэффициент теплопроводности окружающей среды.

Фазовой координатой движения массы является критерий Эйлера

$$\frac{p}{\rho v^2} = y_1,$$

а теплового состояния – средняя температура струи в данном сечении $t=y_2$.

По результатам экспериментальных замеров пусть построены в данном сечении струи регрессионные уравнения

$$y_1 = F_1(y_1, y_2; \lambda_1, \lambda_2),$$

$$y_2 = F_2(y_1, y_2; \lambda_1, \lambda_2).$$

При исследовании параметрической устойчивости плоской динамической системы для двух параметров согласно (4) при $\Delta=0$ получим:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_2} - \frac{\partial F_2}{\partial y_2} = 0.$$

Эти уравнения позволяют определить критические значения параметров динамической системы,

при которых плазменная струя становится неустойчивой.

Следует также заметить, что фазовыми координатами могут быть другие характеристики, определяющие адекватную модельную систему.

Преимущество данного метода исследования устойчивости неконсервативных динамических систем заключается, при условии построения адекватной модели (конечно же, только при этом условии остальное имеет смысл), в определении интервалов значений параметров (по чувствительности), обеспечивающих устойчивый процесс. По заданным условиям на поверхности наплавляемого тела (подложки) данная задача может рассматриваться как обратная, для определения начальных условий технологического процесса (и даже оптимальных).

Регрессионный анализ в порошковой металлургии. Из-за сложности и даже невозможности выявления аналитическими методами влияния всех факторов на теплокинетические процессы и качественные характеристики продукта в металлургии единственным методом научного исследования является регрессионный анализ, который включает планирование, проведение и математическую обработку результатов эксперимента. Теории научного планирования эксперимента и регрессионного анализа достаточно хорошо разработаны, но остаются задачи, требующие решения. В порошковой металлургии к таким задачам относятся выявление наиболее значимых факторов и их взаимодействий и определение компонентного и массового составов шихты для получения материала с требуемыми свойствами. Достижение высоких физико-механических и эксплуатационных свойств современных сплавов возможно лишь при использовании методов получения твёрдых сплавов как гетерогенных материалов, состоящих из зёрен высокотвёрдых тугоплавких соединений (карбидов, реже нитридов или боридов переходных металлов), сцементированных пластичным металлом – связкой. В качестве тугоплавкой фазы твёрдых сплавов наиболее широко используются карбиды вольфрама, титана, хрома, тантала, а в качестве металла – связки – кобальт, никель, железо и их сплавы.

Наиболее эффективным методом получения твёрдых сплавов в последнее время признан разработанный академиком А.Г. Мержановым [3] и его сотрудниками СВС, который характеризуется такой уникальной особенностью, как существование в течение короткого времени реакции высокотемпературной твердожидкой среды, допускающей различные типы воздействий (электрические, химические, термодинамические и т. д.). Кроме этих воздействий, возможно использование в СВС-системах различных легирующих и инертных добавок, позволяющих изменять режим синтеза для получения заданных структуры и свойств конечного продукта. СВС из-за высоких температур, необходимых для синтеза, наиболее эффективен в хими-

ческих системах, образующих тугоплавкие материалы.

Одной из основных задач СВС материала с заданными свойствами является определение компонентного массового состава шихты для обеспечения этих свойств.

Для инструментальной стали основными свойствами являются твердость (Y_1), жаропрочность (Y_2) и вязкость (Y_3). Эти свойства зависят от того, какие легирующие компоненты представлены определенными металлами и в каком количестве. И вот здесь представляется возможность определения компонентного состава шихты по результатам физического эксперимента, используя регрессионный анализ. К примеру, к термитной смеси добавлен карбид титана (X_1), а легирующими компонентами являются вольфрам (X_2) и хром (X_3). Пусть по результатам факторного эксперимента получены регрессионные уравнения:

$$Y_i = f_i(X_1, X_2, X_3), \quad Y_1 = f_1(X_1, X_2, X_3), \quad Y_2 = f_2(X_1, X_2, X_3).$$

Задавая требуемые свойства $Y_i = Y_i^* = \text{const}$ ($i=1,2,3$), получим замкнутую систему алгебраических уравнений

$$Y_i^* = f_i(X_1, X_2, X_3), \quad i=1,2,3,$$

решение которой $X_i = X_i^*$ ($i=1,2,3$) определяет массовый компонентный состав шихты для получения интерметаллического сплава с заданными свойствами.

Проведенные в Алтайском государственном техническом университете им. И.И. Ползунова опыты частично подтвердили правильность теоретических расчетов. Так, максимальная температура горения термитной смеси (≈ 1300 °С) и возникновение СВС-процесса (горение TiC) соответствовали указанным теоретическим значениям. СВС-процесс не возникал при $X_1=28$ мас. % термитной смеси. С увеличением количества TiC от 5 до 28 мас. % термитной смеси скорость фронта горения уменьшалась от 0,15 до 0,07 м/с, его максимальная температура в определенном сечении (≈ 50 мм от верхнего конца трубки, шихта насыпалась в вертикальную трубку из кварцевого стекла диаметром 22 мм и длиной 100 мм при небольшом уплотнении) снизилась от 1290 до 1170 °С при повышении твердости получаемого слитка интерметаллида от 15 до 60 HRC. Опыты проводили со стандартными порошками

Для исследования взаимосвязей различных воздействий на теплофизические процессы синтеза возможно применение регистраторов динамических оптических полей – пирометров, выполненных на дискретных и многоэлементных фотоприемниках, работающих в режиме прямого детектирования или в режиме накопления заряда. Главной особенностью таких устройств является бесконтактность и малая инерционность измерений, в отличие от контактных температурных датчиков, что способствует проведению тепловизионного контроля быстротекающих высокоэнергетических процессов с повышенной точностью.

По результатам экспериментов и характеру расположения точек построены зависимости твердости сплава (в HRC) и скорости распространения фронта горения (в м/с) от количественного содержания карбида титана в шихте (в мас. % термита) (рисунок). Эти зависимости аппроксимируются следующими кубическими параболоми:

$$Y = 10 - 4,1X + 1,25X^2 - 0,046X^3, \\ V = 0,15 + 0,0093X + 0,0008X^2 - 0,0000267X^3.$$

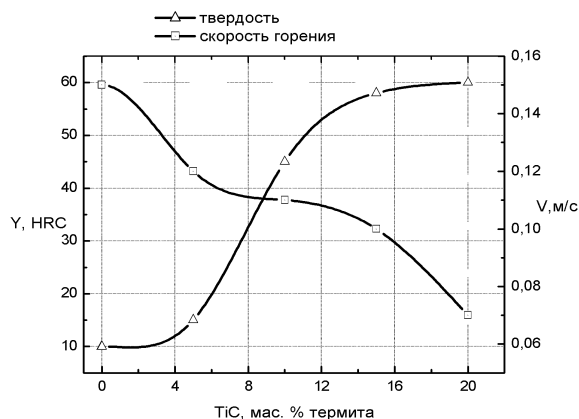


Рисунок. Зависимость твердости сплава стали Y и скорости фронта горения V от массы карбида титана

С увеличением содержания карбида титана в шихте твердость сплава увеличивается, а скорость фронта горения уменьшается по нелинейному закону, причем изменение характера зависимостей происходит практически при одном и том же значении массы карбида титана в шихте (8...10 мас. % термита).

В качестве примера построения дифференциально-регрессионной модели движения твердого тела в сопротивляющейся среде рассмотрим движение плуга при рабочем процессе плуга – пахоте – на основе моделирования взаимодействия рабочего органа плуга (корпуса) и почвы. Теоретическое построение математических моделей сельскохозяйственных агрегатов, их рабочих процессов и систем управления является весьма сложной задачей, практически осуществимой в отдельных случаях моделирования, и то при идеализации условий работы этих объектов и самих объектов.

Исходя из того, что дифференциальные уравнения и функции регрессий наиболее полно моделируют стохастическую техническую систему, предлагается рассматривать движение плуга по дифференциальным уравнениям движения механической системы в пространстве, в которых силовые характеристики представлены уравнениями множественной регрессии на физических переменных и переменных рабочего процесса (или физических координат и переменных параметрах). Разумеется, уравнения регрессии должны быть функциональными.

При исследовании устойчивости движения плуга как динамической системы с переменными параметрами прежде всего следует определить характер движения плуга как твердого тела. Если рассматривать

его движение как поступательное, то получаем прямолинейную траекторию движения центра масс (с учетом сцепки с трактором). Очевидно, для исследования технологической устойчивости движения плуга по глубине вспашки необходимо рассмотреть плоско-параллельное движение в продольно-вертикальной плоскости. Так как одним из агротехнических требований к пахоте является прямолинейность борозды, то необходимо рассмотреть движения в горизонтальной плоскости. Боковые отклонения корпуса плуга также влияют на глубину вспашки и прямолинейность борозды, поэтому необходимо учесть эти движения в поперечно-вертикальной плоскости.

Следующим этапом является определение параметров плуга и технологических параметров, варьирование которых изменяет движение плуга. В общем случае такими параметрами являются: F – сила тяги двигателя, h – ширина плуга, a и b – глубина вспашки и ширина захвата корпуса плуга, ε и l – угол наклона затылочной фаски лемеха ко дну борозды и ее длина, β – угол наклона лезвия лемеха ко дну борозды, v – скорость плуга, J_x, J_y, J_z – моменты инерции плуга относительно осей координат, проходящих через центр тяжести плуга, T – твердость почвы (обобщенный показатель физико-механических свойств почвы), f – коэффициент трения корпуса плуга о дно и боковые поверхности борозды. Сюда же могут быть включены обобщенные характеристики лемешно-отвальных поверхностей, формы стойки и полевой доски, углы установки стойки корпуса плуга, характеристики установки и формы колес плуга. При этом сила тяги двигателя в общем случае не горизонтальна.

И последнее – построение уравнений движения. Обязательным элементом этих уравнений должен быть учет влияния вращательных моментов на движение плуга. Несводимость сопротивлений почвы, преодолеваемых плужным корпусом, к одной равнодействующей силе является следствием несимметричности и переменной кривизны лемешно-отвальной поверхности, непостоянства давления пласта почвы, а также – величины и направления сил трения в различных точках этой поверхности и затупления лезвия лемеха.

Как известно, в общем случае движение твердого тела характеризуется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, & m\ddot{y} &= F_y, & m\ddot{z} &= F_z, \\ J_x \dot{\omega}_x &= M_x, & J_y \dot{\omega}_y &= M_y, & J_z \dot{\omega}_z &= M_z, \end{aligned} \quad (10)$$

где оси x и z определяют продольно-вертикальную плоскость; ось x направлена по горизонтали в сто-

рону движения плуга; m – масса плуга; F_x, F_y, F_z – проекции всех сил, включая реакции почвы, на оси координат; J_x, J_y, J_z – моменты инерции плуга относительно осей координат, проходящих через центр тяжести плуга параллельно осям x, y, z ; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – ускорения центра тяжести плуга вдоль осей координат; M_x, M_y, M_z – моменты всех сил относительно осей координат, проходящих через центр тяжести плуга, точки означают производные по времени.

В процессе эксплуатации почвообрабатывающих орудий на лемехи со стороны почвы действует пространственная система сил. Величина внешних сил и характер их распределения по поверхности лемеха зависят в общем случае от физико-механических и технологических свойств обрабатываемой почвы, от конструктивных размеров лемеха, от углов установки лемеха к дну и стенке борозды, от скорости движения агрегата и глубины обработки и от ряда других показателей.

Экспериментальные исследования проводились на пахотных почвах учебно-опытного хозяйства Новосибирского СХИ и в лаборатории СИ-БИМЭ РАСХН (г. Краснообск Новосибирской области) на почвенном канале.

В результате экспериментальной работы установлены регрессионные зависимости влияния длины и ширины лемеха, скорости движения орудия, глубины обработки почвы, ширины и угла наклона затылочной фаски лезвия на величины пространственных силовых характеристик внешних сил и исследована технологическая устойчивость движения плуга. Под технологической устойчивостью движения плуга понимается сохранение прямолинейного поступательного движения, по возможности горизонтального (то есть на склонах по агротехническим требованиям пахоту необходимо производить поперек наклона поля) при постоянной глубине вспашки. Однако в действительности глубина хода рабочих органов машины нарушается из-за непостоянства свойств почвы по длине борозды и неровностей рельефа поля.

В [2] для заданных технологических условий пахоты получены зависимости, определяющие область значений конструктивных параметров, которые обеспечивают технологическую устойчивость движения плуга, то есть качественную пахоту, что доказывает правомерность исследования движения плуга, как динамической системы с детерминированными переменными параметрами, по регрессионной модели.

Аналогично может быть исследовано движение любого твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. – М.: Мир, 1982. – 368 с.
2. Торбунов С.С. Математическое моделирование и параметрическая устойчивость динамических систем с детерминированными параметрами. – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – 231 с.

3. Мержанов А.Г. Твердо-пламенное горение. – Черногловка: ИСМАН, 2000. – 224 с.

Поступила 14.11.2006 г.