АППРОКСИМАЦИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ЦЕПОЧКОЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Майков С.А.
Томский политехнический университет
E-mail: sim3201@yandex.ru

Введение

Наземная отработка динамики процессов стыковки, раскрытия и сборки крупногабаритных космических конструкций, предназначенных для работы в условиях невесомости, становится всё более ответственным, трудоёмким и дорогостоящим этапом создания и освоения космической техники.

Для ее успешной реализации необходима разработка и создание стендов обезвешивания, позволяющих имитировать процессы развертывания составляющих космического аппарата, в частности солнечных батарей и больших антенн в космическом пространстве за счет компенсации всех сил, действующие на объект: силы трения, гравитационные силы, силы инерции. Это возможно лишь при активных вариантах стендов, представляющих собой замкнутые электромеханические системы, имитирующие независимость движения элементов конструкции от гравитационного воздействия Земли.

Создание активных стендов для проверки механизмов разворачивания крупных космических конструкций в вертикальной плоскости обычно предполагает использование длинных тросовых подвесов. Известно, что одной из проблем при разработке таких стендов является исключение резонансных режимов, связанных с тем, что вся конструкция подвеса и особенно тросовая система обладает существенной нежесткостью. При этом, на этапе разработки стенда необходимо так моделировать систему обезвешивания, чтобы, с одной стороны, не потерять важные особенности ее частотных характеристик, с другой, не внести в модель неоправданные усложнения.

Таким образом, одной из задач, которую необходимо решать при создании систем обезвешивания, является получение адекватных и удобных для практического применения математических моделей тросовых подвесов, позволяющих анализировать динамические характеристики работы стенда, проводить структурно-параметрический синтеза систем управления приводами.

Многие элементы тросовых систем обезвешивания являются объектами с распределёнными параметрами. При этом математический аппарат, строго описывающий объекты с распределенными параметрами, существенно сложнее, чем аппарат объектов с сосредоточенными параметрами. Поэтому на практике всегда, где это возможно, прибегают к аппроксимации, т. е. заменяют объекты с распределенными параметрами на объекты с сосредоточенными параметрами, например, разбивая пространство на небольшие элементы (подпространства).

Это означает, например, что одномерный упругий элемент с распределенными параметрами заменяется на многомассовую систему с абсолютно жёсткими массами и невесомыми упругими элементами конечной жёсткости. Такая аппроксимация позволяет свести дифференциальные уравнения движения в частных производных к системе обычных дифференциальных уравнений, а в задачах статики – свести дифференциальные уравнения равновесия к алгебраическим уравнениям.

В исследованиях по аппроксимации число сосредоточенных масс колеблется в широких пределах: от одной-двух до 10-20. Слишком большое число их приводит к неоправданному усложнению расчётной модели и значительному повышению порядка дифференциального уравнения системы в целом. При этом обычно выделяются два этапа в задаче проектирования систем. На первом этапе осуществляется аппроксимация механического элемента сосредоточенной системой. На втором этапе производится понижение порядка сосредоточенной модели.

Для успешного моделирования электромеханических систем, содержащих объекты с распределенными параметрами, необходимо иметь инструмент, позволяющий эффективно переходить к моделям с сосредоточенными параметрами при различной степени дискретизации объекта. Проведем сравнение двух методов расчета передаточных функций, описанных в литературных источниках [1] и [2].

Аппроксимация одномерного упругого объекта цепочкой сосредоточенных осцилляторов

Рассмотрим вертикальный канал системы активного обезвешивания, состоящий из каретки массой m_0, рабочей нагрузки массой m_n и троса, обладающего массой и упругостью. Проведем дискретизацию модели троса, представив его в виде последовательного соединения абсолютно жестких масс и пружин, как это представлено на рис. 1.

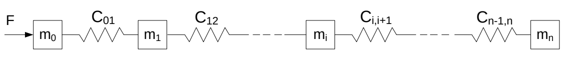

Рис. 1. Цепочка осцилляторов

На примере трёхмассовой системы (Рис. 2) рассмотрим возможности двух методов получения передаточных функций между входным воздействием F со стороны каретки и перемещением u_2 рабочей нагрузки.

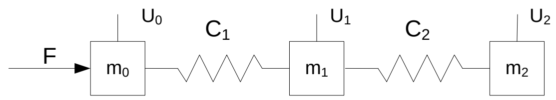

Рис. 2. Трёхмассовая цепочка сосредоточенных осцилляторов (где U_i смещение относительно массы m_i)

В [1] описан метод расчета, при котором дискретизированная модель тросовой подвески записывается как система трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно выделенных масс m_0, m_1, m_2. Применив преобразование Лапласа можно перейти перейдя к операторной матричной матричной записи, откуда сравнительно несложно определить передаточные функции линеаризованной модели по любой выходной переменной. Метод выглядит недостаточно формализованным, особенно на этапе формирования начальных уравнений.

Более наглядным представляется использование для расчета передаточной функции аппарата графов связи [2]. Метод графов связей относится к группе топологических методов, использующих графическое представление исследуемого объекта. Он основан на моделировании энергетических процессов в системе и позволяет на единой методологической базе моделировать объекты, содержащие элементы различной физической природы.

Графовая модель трехмассовой цепочки приведена на рисунке 3.

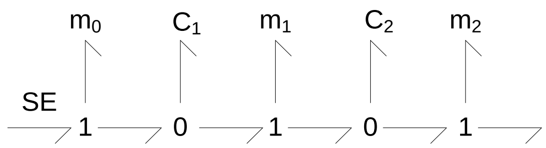

Рис. 3. Граф связей для трёхмассовой системы

Для получения передаточной функции по графу известна формализованная процедура, основанная на правиле Мейсона [2]. Она предполагает анализ структуры графа с выделением циклов и прямых путей с последующим вычислением передаточной функции по формуле

$$W = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}, \qquad (1)$$

где Δ – определитель графа; P_i – передаточная функция i-го пути между заданными входом и выходом; Δ_i – определитель сокращенного графа.

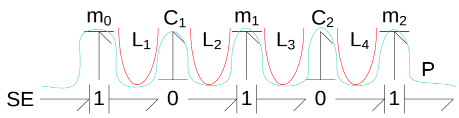

Рис. 4. Граф связей рассматриваемой системы с расставленными причинностями, независимыми циклами и прямым путём

Представленный на рисунке 4 граф содержит 4 цикла со следующими передаточными функциями:

$$L_1 = \frac{-1}{m_0 C_1 p^2}; \qquad L_2 = \frac{-1}{m_1 C_1 p^2};$$

$$L_3 = \frac{-1}{m_1 C_2 p^2}; \qquad L_4 = \frac{-1}{m_2 C_2 p^2}.$$

Определитель графа, исходя из его структуры может, быть вычислен по формуле

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_4,$$

а единственный прямой путь имеет передаточную функцию

$$P = \frac{1}{m_0 m_1 m_2 C_1 C_2 p^6}.$$

Подставив полученные выражения в (1) получим

$$W(p) =$$

$$= \frac{1}{p^2(m_0 m_1 m_2 C_1 C_2 p^4 + m_1 m_2 C_2 p^2 + m_0 m_2 C_2 p^2 +}$$

$$\frac{1}{+ m_0 m_2 C_1 p^2 + m_0 m_1 C_1 p^2 + m_0 + m_1 + m_2)}.$$

Данная передаточная функция соответствует полученной в [1].

Заключение

Использование метода графов связи в сочетании с аппроксимацией упругого троса цепочкой сосредоточенных осцилляторов позволяет реализовать наглядную и достаточно формализованную процедуру получения дискретизированных математических моделей одномерных распределенных объектов при различных уровнях дискретизации.

Литература

1. Электроприводы с распределёнными параметрами механических элементов. Рассудов Л.Н. Мядзель В.Н. 1987г. 143с.

2. Применение метода графов связей в технике / Под ред. Кэрнопа Д. и Розенберга Р. – М.: Мир, 1973