СИСТЕМА ЭЙНШТЕЙНА-ЭРЕНФЕСТА ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА–КОЛМОГОРОВА–ПЕТРОВСКОГО–ПИСКУНОВА

Е.А. Левченко
Научный руководитель: профессор, д. ф.-м. наук А.Ю. Трифонов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г.Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: levchenkoea@tpu.ru

EINSTEIN-EHRENFEST SYSTEM FOR MULTICOMPONENT FISHER-KOLMOGOROV-PETROVSKII-PISKUNOV EQUATION

E.A. Levchenko
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: levchenkoea@tpu.ru

For the multicomponent 1D Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation we deduce the Einstein-Ehrenfest system in the class of trajectory concentrated functions. Connection between solutions of the system and moments of the initial distributions is discussed.

Однокомпонентное уравнение Фишера–Колмогорова–Пискунова–Петровского (ФКПП) [1] применяется для описания образования структур [2, 3] в колониях микроорганизмов, явления бегущих волн и стационарных состояний [4]. Естественным обобщением нелокального однокомпонентного уравнения ФКПП является многогокомпонентное уравнение ФКПП.

Рассмотрим многогокомпонентное одномерное уравнение ФКПП с нелокальной нелинейностью вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \mathbf{u}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}[V_x(x,t)\mathbf{u}(x,t)] + A(x,t)\mathbf{u}(x,t) - \varkappa B(x,t)\mathbf{u}(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\langle \mathbf{b}(x,y,t),\mathbf{u}(y,t)\rangle dy, \qquad (1)$$

где D – малый параметр; $A(x,t) = \|a_{jk}(x,t)\|_{n\times n}$, $B(x,t) = \|b_{jk}(x,t)\|_{n\times n}$, $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_n)^\intercal$, $\mathbf{b}(x,y,t) = = (b_1(x,y,t),\ldots,b_n(x,y,t))^\intercal$, $a_{jk}(x,t)$, $b_{jk}(x,t)$, $b_j(x,y,t)$ и $V(x,t)$ – заданные бесконечно гладкие функции, растущие при $|x|,|y|\to\infty$ не быстрее, чем полином, а $V_x(x,t) = \partial V(x,t)/\partial x$.

Предположим, что для нелинейного уравнения ФКПП (1) существуют точные (или отличающиеся от них на величину $O(D^\infty)$) решения в классе многокомпонентных траекторно сосредоточенных функций ϑ_t^D с начальным условием

$$\mathbf{u}(x,t)|_{t=0} = \boldsymbol{\gamma}(x), \quad \boldsymbol{\gamma}(x) = (\gamma_1(x),\ldots,\gamma_n(x))^\intercal \in \vartheta_0^D. \qquad (2)$$

Здесь многокомпонентная функция $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ называется траекторно-сосредоточенной функцией класса ϑ_t^D, если ее можно представить в виде $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \vartheta(t,D)\Phi(\mathbf{x},t)$, где $\vartheta(t,D)$ – двухкомпонентная вектор-функция, зависящая от переменной *t*, а функция $\Phi(\mathbf{x},t)$ является траекторно-сосредоточенной ($\Phi(\mathbf{x},t)\in\Pi_t^D$) [5]. Для функций класса ϑ_t^D справедливо

$$\frac{\|(\hat{D}\partial_x)^k \Delta x^l v\|}{\|v\|} = O(D^{(k+l)/2}), \tag{3}$$

где через $\|\ldots\|$ обозначена норма в пространстве L_2.

Аналогично однокомпонентному уравнению ФКПП обозначим

$$\mathbf{m}_u(t) = (m_{u_1}(t),\ldots,m_{u_n}(t))^{\intercal}, \quad \mathbf{x}_u(t) = (x_{u_1}(t),\ldots,x_{u_n}(t))^{\intercal}, \quad \boldsymbol{\alpha}_u^{(j)}(t) = (\alpha_{u_1}^{(j)}(t),\ldots,\alpha_{u_n}^{(j)}(t))^{\intercal}. \tag{4}$$

моменты функции $\mathbf{u}(x,t)$ нулевого порядка, начальные нормированные моменты первого порядка и центральные нормированные моменты высших порядков, соответственно, где

$$m_{u_k}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(x,t)dx, \quad x_{u_k}(t) = \frac{1}{m_{u_k}(t)}\int_{-\infty}^{\infty} x u_k(x,t)dx, \quad \alpha_{u_k}^{(j)}(t) = \frac{1}{m_{u_k}(t)}\int_{-\infty}^{\infty} (\Delta x)^j u_k(x,t)dx, \quad k = \overline{1,\ldots,n}.$$

Обозначим $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{X}(t)\dfrac{\partial}{\partial x}$ и потребуем, чтобы траектория $x = X(t)$ определялась уравнением

$$\dot{X} = V_x(X,t). \tag{5}$$

Разложим функцию $V_x(x,t)$, вектор-функцию $\mathbf{b}(x,y,t)$ и матрицы $A(x,t)$ и $B(x,t)$ в ряд Тейлора по $\Delta x = x - X(t)$ и $\Delta y = y - X(t)$. С учетом оценки (3) получим, что эволюция средних (4) с точностью до $O(D^{(M+1)/2})$ определяется соотношениями

$$\dot{\mathbf{m}}_u = \sum_{k=0}^{M}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k)} - \rceil \sum_{n=0}^{M-k}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n B(t)}{\partial x^n}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k+n)}\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{k!l!}\frac{\langle\partial^{k+l}\mathbf{b}(t),\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(l)}\rangle}{\partial x^k \partial y^l}\right], \tag{6}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \Lambda^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{M}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k V_x(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k)}\right] + \sum_{k=0}^{M}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k)} - \rceil \sum_{n=0}^{M-k}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n B(t)}{\partial x^n}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k+n)}\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{k!l!}\frac{\langle\partial^{k+l}\vec{b}(t),\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(l)}\rangle}{\partial x^k \partial y^l}\right]X + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{M-1}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k+1)} - \rceil \sum_{n=0}^{M-k-1}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n B(t)}{\partial x^n}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k+n+1)}\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{k!l!}\frac{\langle\partial^{k+l}\mathbf{b}(t),\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(l)}\rangle}{\partial x^k \partial y^l}\right] - \dot{\Lambda}\mathbf{x}_u\right\}, \tag{7}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_u^{(j)} = \Lambda^{-1}\left\{ j\sum_{k=0}^{M-j+1}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k V_x(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k+j-1)}\right] + \sum_{k=0}^{M-j}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k+j)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \rceil \sum_{n=0}^{M-k-j}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n B(t)}{\partial x^n}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k+n+j)}\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{k!l!}\frac{\langle\partial^{k+l}\mathbf{b}(t),\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(l)}\rangle}{\partial x^k \partial y^l}\right]\right\} + Dj(j-1)\boldsymbol{\alpha}_u^{(j-2)} - j\dot{X}\boldsymbol{\alpha}_u^{(j-1)} - \Lambda^{-1}\dot{\Lambda}\boldsymbol{\alpha}_u^{(j)}, \tag{8}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}(m_{u_1}(t),\ldots,m_{u_n}(t))$.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных X, $\mathbf{m}$, $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\alpha}^{(j)}$, $j = \overline{1,M}$:

$$\dot{X} = V_x(X,t), \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \sum_{k=0}^{M}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(k)} - \rceil \sum_{n=0}^{M-k}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n B(t)}{\partial x^n}\Lambda\vec{\alpha}^{(k+n)}\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{k!l!}\frac{\langle\partial^{k+l}\mathbf{b}(t),\Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(l)}\rangle}{\partial x^k \partial y^l}\right], \tag{10}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \Lambda^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{M}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k V_x(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right] + \sum_{k=0}^{M}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(k)} - \rceil \sum_{n=0}^{M-k}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n B(t)}{\partial x^n}\Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(k+n)}\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{k!l!}\frac{\langle\partial^{k+l}\mathbf{b}(t),\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(l)}\rangle}{\partial x^k \partial y^l}\right]X + \right.$$

$$+\sum_{k=0}^{M-1}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(k+1)} - \rceil \sum_{n=0}^{M-k-1}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n B(t)}{\partial x^n}\Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(k+n+1)}\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{k!l!}\frac{\langle \partial^{k+l}\mathbf{b}(t), \Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(l)}\rangle}{\partial x^k \partial y^l}\right]\Bigg\} - \Lambda^{-1}\dot{\Lambda}\mathbf{x}, \tag{11}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)} = \Lambda^{-1}\Bigg\{ j\sum_{k=0}^{M-j+1}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k V_x(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(k+j-1)}\right] + \sum_{k=0}^{M-j}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t)}{\partial x^k}\Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(k+j)} - \right.$$

$$\left. - \rceil \sum_{n=0}^{M-k-j}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n B(t)}{\partial x^n}\Lambda\boldsymbol{\alpha}_u^{(k+n+j)}\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{k!l!}\frac{\langle \partial^{k+l}\mathbf{b}(t), \Lambda\boldsymbol{\alpha}^{(l)}\rangle}{\partial x^k \partial y^l}\right]\Bigg\} + Dj(j-1)\vec{\alpha}^{(j-2)} - jV_x(X,t)\boldsymbol{\alpha}^{(j-1)} - \Lambda^{-1}\dot{\Lambda}\boldsymbol{\alpha}^{(j)}. \tag{12}$$

Начальные условия для системы ЭЭ (9) – (12) определим соотношениями

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}|_{t=0} = \mathbf{m}_\gamma = \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\gamma}(x)dx, && \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_\gamma = \Lambda_0^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}x\boldsymbol{\gamma}(x)dx, \\ &\boldsymbol{\alpha}^{(j)}|_{t=0} = \boldsymbol{\alpha}_\gamma^{(j)} = \Lambda_0^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(x-X_0)^j\boldsymbol{\gamma}(x)dx, && X|_{t=0} = X_0 = \frac{1}{n}(x_{\gamma_1} + \ldots + x_{\gamma_n}), \end{aligned} \quad j = \overline{1,M},\ \Lambda_0 = \mathrm{diag}(m_{\gamma_1}, \ldots, m_{\gamma_n}(t)). \tag{13}$$

Систему уравнений (9) – (12) будем называть *системой уравнений Эйнштейна–Эренфеста* для многокомпонентного уравнения ФКПП типа $(0, M)$.

Справедливо утверждение: Решения системы Эйнштейна–Эренфеста $\mathbf{m}^{(M)}[\gamma](t,D)$, $\mathbf{x}^{(M)}[\gamma](t,D)$ и $\boldsymbol{\alpha}^{(j,M)}[\gamma](t,D)$, $k = \overline{1,M}$, порядка M и средние (4) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}_u(t,D) = \mathbf{m}^{(M)}[\gamma](t,D) + O(D^{(M+1)/2}), \\ &\mathbf{x}_u(t,D) = \mathbf{x}^{(M)}[\gamma](t,D) + O(D^{(M+1)/2}), \\ &\boldsymbol{\alpha}_u^{(j)}(t,D) = \boldsymbol{\alpha}^{(j,M)}[\gamma](t,D) + O(D^{(M+1)/2}), \quad j = \overline{1,M}. \end{aligned} \tag{14}$$

Решение системы уравнений Эйнштейна–Эренфеста позволяет, не решая уравнения, получить информацию о наиболее значимых характеристиках решения исходного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Annual Eugenics. – 1937. – Vol. 7. – P. 255-369
2. Fuentes M.A., Kuperman M.N., Kenkre V.M. Nonlocal interaction effects on pattern formation in population dynamics // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 91. – 158104 (4pp).
3. Da Cunha J. A. R., Penna A. L. A., Vainstein M. H., Morgado R., Oliveira F. A. Self-organization analysis for a nonlocal convective Fisher equation // Phys. Lett. A. – 2009. – V. 373. – P. 661-667.
4. Berestycki H., Nadin G., Perthame B. and Ryzhik L. The non-local Fisher–KPP equation: travelling waves and steady states // Nonlinearity. – 2009. – V. 22. – P. 2813.
5. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrödinger type // Ann. of Phys. –1996. – V. 246. – № 2 . – P. 231-280.