УДК 681.332

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю.Н. Шалаев

Институт «Кибернетический центр» ТПУ
E-mail: shal@ad.cctpu.edu.ru

Дифференциальное уравнение динамической системы на основе метода пространства состояний записывается в нормальной форме в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Методом изображающих векторов полученная система уравнений записывается в векторно-матричной форме. Дальнейшие преобразования, необходимые для нахождения выходного сигнала системы по заданным краевым условиям, ведутся численными методами. Это позволяет успешно использовать вычислительную технику, а окончательный результат на основании формулы обращения записывать в аналоговой форме.

Для решения задачи перевода системы управления из начального состояния в конечное при заданном управляющем воздействии необходимо найти траекторию движения, т. е. решить краевую задачу. Подобные задачи возникают при синтезе оптимального управления. В известных методах моделирования подобных задач, в частности для метода случайного поиска, резко возрастают вычислительные затраты при увеличении числа начальных условий. Для решения поставленной задачи использован метод изображающих векторов, который изложен в работах [1–4] и сочетает в себе как цифровые, так и аналитические приемы решения краевой задачи, т. е. позволяет свести краевую задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Метод изображающих векторов – это операторный метод, который всякой временной функции на конечном промежутке времени ставит в соответствие n-мерный вектор, а линейному оператору – матрицу ($n\times n$). Суть метода изображающих векторов состоит в том, что каждой функции $f(t)$ ставится в однозначное соответствие вектор $F=\{f_1,f_2,...,f_p\}$ элементы которого, коэффициенты ряда Фурье, Для функции $f(t)$, определенной на промежутке времени $[0, t_0]$, имеет место разложение

$$f(\tau)=\sum_{k=0}^{n} f_k T_k(\tau),$$

где f_k – коэффициенты Фурье; $T_k(\tau)$ – ортонормированные смещенные полиномы Чебышева I-го рода; $\tau=t/t_0$ – безразмерная независимая переменная.

Приведем некоторые свойства метода изображающих векторов. Операции интегрирования функции $f(\tau)$ соответствует в области изображающих векторов умножению ее изображающего вектора на матрицу интегрирования:

$$Y=IY+y(0)e_1/T_0(\tau), \qquad (1)$$

где $y(0)$ – начальные условия, e_1 – единичный вектор размерности P, $T_0(\tau)$ – полином Чебышева, Y – вектор выходного сигнала, элементы которого определяются по соотношению (3), I – матрица интегрирования. Для размерности (6×6) матрица имеет следующий вид

$$I=t_0\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{16} & -\frac{\sqrt{2}}{30} & -\frac{\sqrt{2}}{72} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{20} & 0 \end{bmatrix}.$$

Для многократного интегрирования при нулевых начальных условиях матрица интегрирования возводится в соответствующую степень $Y=I^kY$.

Произведению двух функций $h(\tau)=z(\tau)f(\tau)$ в области изображающих векторов соответствует соотношение вида

$$H=Z(J)F, \qquad (2)$$

где J – матрица Якоби [1] (приведена в примере).

Таким образом, изображение произведения двух функций равно произведению изображений матрицы известной функции $z(\tau)$ на изображающий вектор другой. Изображающей матрицей условно названа матричная функция $Z(J)$, которая получается из заданной функции $z(\tau)$ заменой скалярного аргумента τ на матрицу J. Ввиду равнозначности двух функций их произведение коммутативно, то есть также равно произведению матрицы второй функции на изображающий вектор первой. Тогда выражение (2) запишется как

$$H=Q^T diag[z(\tau_1),z(\tau_2),...,z(\tau_p)]QF, \qquad (3)$$

где $z(\tau_k)$ – значения функции $z(\tau)$ в нулях P-го полинома Чебышева. Для учета интервала разложения матрица Якоби J умножается скалярно на величину t_0. Восстанавливается исходная функция времени $f(\tau)$ по изображающему вектору в соответствии с формулой обращения

$$f(\tau)=(F,T(\tau)), \qquad (4)$$

где правая часть имеет смысл скалярного произведения изображающего вектора на переменный вектор полиномов Чебышева $T(\tau)$, который имеет следующий вид

$$T(\tau)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1-2\tau \\ 1-8\tau+8\tau^2 \\ 1-18\tau+48\tau^2-32\tau^3 \\ 1-32\tau+160\tau^2-256\tau^3+128\tau^4 \\ 1-50\tau+400\tau^2-1120\tau^3+1280\tau^4-512\tau^3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим динамическую систему, которая описывается дифференциальным уравнением вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(t)\frac{d^i}{dt^i}y(t)=u(t),\quad a_0(t)=1, \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{vk}y^{(n-1)}(t_i)=\beta_v,\ (v=\overline{1,n},\ t_i\in[0,t_0]), \tag{6}$$

где t_i – заданная система точек; $y(t)$ – выходной сигнал системы; $u(t)$ – входной сигнал системы управления.

Исходное дифференциальное уравнение (5) на основании метода пространства состояний [5] запишем в нормальной форме в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y(t)=y_1(t),$$
$$\frac{dy_1(t)}{dt}=y_2(t),$$
$$\frac{dy_2(t)}{dt}=y_3(t),$$
$$\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dt}=-a_n(t)y_1(t)-\cdots-a_1(t)y_{n-1}(t)-a_0(t)y_n(t)+u(t). \tag{7}$$

В соответствии с правилами перехода к изображающим векторам с учетом соотношений (1–3) от системы дифференциальных уравнений (7) переходим к соответствующей векторно-матричной системе уравнений

$$Y_1=Y_{10}+(t_0I)Y_2,$$
$$Y_2=Y_{20}+(t_0I)Y_3,$$
$$\ldots$$
$$Y_n=Y_{n0}+(t_0I)\begin{bmatrix}-a_n(t_0J)Y_1-\cdots- \\ -a_1(t_0J)Y_{n-1}-a_0(t_0J)Y_n+U\end{bmatrix}, \tag{8}$$

где изображающие векторы $Y_k(k=\overline{1,n})$ – искомой функции и ее производных; U – сигнала управления; Y_{k0} – начальных условий.

Краевые условия (6), согласно (4, 8) запишутся в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_{vk}Y_k,T\left(\frac{t_i}{t_0}\right)\right)=\beta_v. \tag{9}$$

Для решения краевой задачи (5, 6) необходимо найти в системе уравнений (8) неизвестные векторы начальных условий Y_{k0} по краевым условиям (9). В результате преобразований с учетом соотношения (1) получим изображающие векторы начальных условий:

$$Y_{j0}=\frac{1}{\alpha_{jj}}\begin{bmatrix}\beta_j-\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\alpha_{jk}Y_k,T(\tau_i))- \\ -\alpha_{jj}((t_0I)Y_{j+1},T(\tau_i))+U\end{bmatrix}\frac{e_1}{T_0(\tau)},\ j=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Таким образом, решая совместно уравнения (9) и (10) найдем изображающие векторы искомой функции выходного сигнала и n–1 его производных. Восстанавливаются сигналы в виде функции времени по формуле обращения (4). Для решения краевой задачи динамической системы, описанной дифференциальным уравнением вида

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}\frac{d^i}{dt^i}y(t)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}\frac{d^j}{dt^j}u(t),\ a_0=1, \tag{11}$$

необходимы дополнительные преобразования. По методу пространства состояний [5] запишем соотношение (11) в нормальной форме в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y(t)=y_1(t)+k_0u(t),$$
$$y_1'(t)=y_2(t)+k_1u(t),$$
$$y_2'(t)=y_3(t)+k_2u(t),$$
$$\ldots$$
$$y_n'(t)=-a_ny_1(t)+\cdots+a_2y_{n-1}(t)+a_1y_n+k_nu(t). \tag{12}$$

Коэффициенты $k_i(i=\overline{1,n})$ определяются по рекуррентному соотношению [5] по коэффициентам исходного дифференциального уравнения:

$$k_0=b_0,$$
$$k_i=b_i+\sum_{v=0}^{i-1}a_{i-v}k_v,\ (i=\overline{1,n}). \tag{13}$$

Если порядок числителя меньше знаменателя ($m<n$), то k_0 равняется нулю.

По методу изображающих векторов от системы дифференциальных уравнений (12) с учетом соотношения (13) переходим к системе векторно-матричных уравнений

$$Y_1=Y_{10}+(t_0I)Y_2+k_1U,$$
$$Y_2=Y_{20}+(t_0I)Y_3+k_2U,$$
$$\ldots$$
$$Y_n=Y_{n0}+(t_0I)[-a_nY_1-\cdots-a_1Y_{n-1}-a_0Y_n+k_nU]. \tag{14}$$

По векторно-матричному соотношению (14) и краевым условиям (9) для решения краевой задачи находим неизвестные векторы начальных условий (10). Решая полученные соотношения, находим векторы искомой функции и n–1 ее производных и по формуле обращения (4) получаем аналоговую форму записи выходного сигнала и n–1 его производных.

Для наглядности изложенного материала рассмотрим пример решения дифференциального уравнения [6]

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-2t\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=-4t \tag{15}$$

с краевыми условиями

$$y(0)-y'(0)=0,$$
$$2y(1)-y'(1)=1. \tag{16}$$

Уравнение (15) разрешаем относительно старшей производной и в результате получим

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=2y(t)+2t\frac{dy(t)}{dt}-4t. \tag{17}$$

По методу пространства состояний вводим промежуточные координаты состояния системы и с учетом соотношения (17) запишем

$$y(t)=y_1(t),$$
$$y_1'(t)=y_2(t),$$
$$y_2'(t)=2y_1(t)+2ty_2(t)-4t. \tag{18}$$

Уравнение (18) в векторно-матричной форме, согласно (8), запишется в виде

$$Y_1=Y_{10}+IY_2,$$
$$Y_2=Y_{20}+2IY_1+2IJY_2-4J. \tag{19}$$

Таблица. *Результаты решения краевой задачи, ур. (15), (16)*

t	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1
$y(t)$	1	1,11	1,39	1,78	2,33	3,15	3,71
$\hat{y}(t)$	0,98	1,09	1,37	1,76	2,35	3,17	3,72

Краевые условия (16) запишутся в следующем виде

$$(Y_1,T(0))-(Y_2,T(0))=0,$$
$$(2Y_1,T(1))-(Y_2,T(1))=1, \tag{20}$$

где $T(0)$, $T(1)$ – векторы полиномов Чебышева соответственно при τ=0, τ=1. Матрица Якоби для размерности (6×6) имеет следующий вид

$$J=t_0\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Подставив соответствующие уравнения из (19) в (20), получим

$$Y_{10}=[(Y_1,T(0))-(IY_2)^T T(0)]\sqrt{2}e_1;$$
$$Y_{20}=\{(2Y_1,T(1))-1-$$
$$-[I(2JY_2+2Y_1-4J)]^T T(1)\}\sqrt{2}e_1. \tag{21}$$

Решая совместно систему уравнений (19) и (21), получим изображающие векторы искомой функции и изображающий вектор ее производной. В результате решения системы уравнений получили изображающий вектор выходного сигнала

$$Y=\{2.91,-1.31,0.287,-0.056,0.01,0.002\}.$$

По соотношению (4) восстанавливаем искомую функцию в аналоговой форме

$$\hat{y}(t)=0,98+1,02t+0,75t^2+0,98t^3-1,14t^4+1,1t^5,$$

при этом t_0=1. Результаты решения $\hat{y}(t)$ краевой задачи (15), (16) сведены в таблицу. С целью иллюстрации эффективности предлагаемого метода решения краевой задачи в таблице приведено и точное решение $y(t)$.

Предложенный метод решения краевой задачи для динамических систем позволяет успешно переходить от временной зависимости в область векторно-матричных отношений, т. е. вести все промежуточные расчеты численно, что позволяет широко использовать современные средства вычислительной техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов В.М. Основы метода изображающих векторов. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1983. – 426 с.
2. Осипов В.М., Шалаев Ю.Н. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на АВМ методом изображающих векторов // Известия вузов СССР. Приборостроение. – 1977. – № 12. – С. 43–47.
3. Шалаев Ю.Н. Применение метода изображающих векторов к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Автоматизация управления и АСУ ТП. – Томск: Изд-во ТПУ, 1977. – С. 101–105.
4. Шалаев Ю.Н. Моделирование нестационарных динамических систем методом изображающих векторов // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 7. – С. 44–47.
5. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1972. – 620 с.
6. Демидович Б.П., Маро И.А., Шувалов Э.З. Численные методы анализа. – М.: Высшая школа. 1962. – 664 с.

Поступила 27.03.2008 г.

Ключевые слова:

Дифференциальное уравнение, динамическая система, метод пространства состояний, метод изображающих векторов, формула обращения.