

**Таблица.** Анализ вариантов расположения доминирующих полюсов

Расположение доминирующих полюсов	Полюса относительно области устойчивости		
	Внутри $s_1 = -2+1j$ $s_2 = -2-1j$	На границе $s_1 = -2+2,39j$ $s_2 = -2-2,39j$	Вне $s_1 = -2+3j$ $s_2 = -2-3j$
Передаточная функция	$W(s) = \frac{s^2 + 10 \cdot s + 29}{s^2 + 4 \cdot s + 5}$	$W(s) = \frac{s^2 + 10 \cdot s + 29}{s^2 + 4 \cdot s + 9,71}$	$W(s) = \frac{s^2 + 10 \cdot s + 29}{s^2 + 4 \cdot s + 13}$
Прямые показатели качества	$\sigma = 2,18\%$ $t_p = 1,4$ с	$\sigma = 10,05\%$ $t_p = 1,4$ с	$\sigma = 19,26\%$ $t_p = 1,4$ с
Расчетные показатели качества	$\sigma = 2,18\%$ $t_p = 1,5$ с	$\sigma = 10,05\%$ $t_p = 1,5$ с	$\sigma = 19,28\%$ $t_p = 1,5$ с

способ нахождения области расположения доминирующих полюсов системы автоматического управления с заданными показателями качества

переходного процесса. Разработана методика построения границы области расположения доминирующих полюсов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биссекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1996. – 992 с.
2. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем. – М.: Наука, 1972. – 448 с.
3. Скворцов Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – № 4. – С. 10–13.
4. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Решение задачи размещения полюсов системы методом D-разбиения // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 23–27.

Поступила 15.04.2008 г.

#### Ключевые слова:

Система автоматического управления, корневые оценки качества, нули и полюса системы, корневой метод.

УДК 681.5

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В СРЕДЕ MATLAB

М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский, С.В. Замятин

Томский политехнический университет  
E-mail: smike@aics.ru

Разработан комплекс программ для анализа и синтеза систем автоматического управления с гарантированными корневыми показателями качества. Алгоритмы основаны на робастном расширении метода корневого годографа с применением уравнений Теодорчика-Эванса. Приводятся числовые примеры.

#### Введение

В реальных системах автоматического управления (САУ) возможны случаи, когда некоторые их параметры не известны точно, либо меняются в процессе эксплуатации системы по заранее неизвестным законам, причем их значения в принципе не могут быть доступны измерению. Если при этом известны диапазоны возможных значений постоянных параметров или пределы изменения нестабильных параметров, то в таких случаях говорят о параметрической интервальной неопределенности. Системы, имеющие интервально-неопределенные параметры, получили название интервальных систем.

Наряду с проверкой робастной устойчивости, отвечающей на вопрос: устойчива интервальная система или нет, для проектировщика желательно также и робастное качество интервальной системы, соответствующее расположению её полюсов в некоторой заданной области комплексной плоскости.

В литературе данная проблема рассматривается как анализ робастной относительной устойчивости. Понятие относительной устойчивости связано с разнообразными вариантами расположения корней интервального характеристического полинома соответственно возможным сочетаниям варьируемых параметров в рамках фиксированных интервалов.

До настоящего времени исследования в этой области велись преимущественно алгебраическими и частотными методами в двух направлениях: формулирование необходимых и достаточных условий и вывод сравнительно неконсервативных достаточных условий относительной робастной устойчивости. При этом основная часть публикаций оперирует с результатами В.Л. Харитоновой.

Для проектировщика важен инструмент, позволяющий производить анализ и синтез интервальных систем автоматического управления. В каждой конкретной области, как правило, существуют спе-

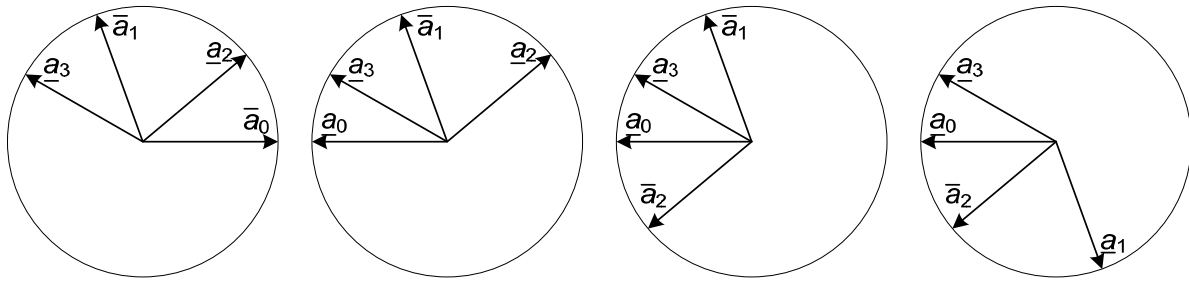


Рис. 1. Векторы граничных вершин

специализированные комплексы программ (КП), позволяющие проводить на персональных компьютерах исследования реальных систем управления и автоматических устройств с использованием их моделей. Наибольшее распространение в настоящее время получил пакет MatLab, позволяющий выполнять как численные, так и аналитические операции, и являющийся интерактивной системой для инженерных и научных расчетов. В пакете MatLab существуют библиотеки стандартных подпрограмм для анализа и синтеза робастных систем, основанные на различных принципах и критериях. При этом следует заметить, что встроенные подпрограммы не используют корневые методы, хотя, согласно [1], именно корневой подход при исследовании интервальных систем имеет существенные преимущества. Поэтому представляет интерес разработанный на основе теории корневого годографа КП для анализа и синтеза интервальных систем. Такой КП получил название Корневой Анализ и Синтез Интервальных Систем (RASIS).

**Теоретические основы анализа робастных систем**

Пусть характеристический полином интервальной замкнутой системы имеет вид

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \quad (1)$$

где  $a_i \in [a_{i,\min}, a_{i,\max}]$  образуют многогранник  $P_m$ , представляющий собой прямоугольный гиперпараллелепипед с  $2^m$  вершинами ( $m \leq n+1$ ). Известно [2], что корневые показатели качества системы с интервальным полиномом  $D(s)$  определяются образами вершин  $P_m$ . Согласно [3], решить поставленную задачу анализа локализации корней ИХП в усеченном справа секторе можно проверкой принадлежности этому сектору образов всех  $2^m$  вершин многогранника  $P_m$ . Такая процедура, безусловно, является весьма трудоемкой. Однако следует заметить, что образы только некоторых вершин могут принадлежать границам корневых областей (назовем эти вершины граничными). Поэтому для уменьшения вычислительных затрат при вершинном анализе локализации корней ИХП в заданной области представляет интерес задача определения таких граничных вершин.

Введем в рассмотрение единичные векторы  $\vec{E}_i$  выходящие из начала координат под углами  $i \cdot \Theta_0$ , где  $i=0,1,2,\dots,n$ , а  $\Theta_0$  – значение заданной максимальной

колебательности. Согласно фазовым соотношениям, угол вектора каждого коэффициента легко определяется без вычисления корней соответствующего вершинного полинома. Очевидно, что по взаимному расположению  $\vec{E}_i$  можно судить о характере анализируемого узла  $Uq$  (образа соответствующей вершины). Он будет принадлежать границе корневой области, если векторы  $\vec{E}_i$  всех интервальных коэффициентов будут располагаться в угле, меньшем  $180^\circ$ . Наиболее просто и наглядно проверить выполнение этого условия можно геометрическим способом, строя  $\vec{E}_i$  на круговой диаграмме. На рис. 1 на примере ИХП с четырьмя интервальными коэффициентами показано возможное расположение  $\vec{E}_i$  для случая граничной вершины.

Заметим, что изменение предела коэффициента с минимального на максимальный или наоборот позволяет поворачивать соответствующий вектор на  $180^\circ$ . Это дает возможность, выбрав один из векторов крайним, расположить остальные векторы желаемым образом. Следовательно, таким способом можно легко сформировать пределы коэффициентов граничной вершины  $P_m$ .

На основании анализа возможного расположения  $\vec{E}_i$  можно сделать следующее утверждение: если для каждого из  $m$  коэффициентов ИХП построить на круговой диаграмме в соответствии с фазовыми соотношениями два противоположных вектора, то любые  $m$  последовательно расположенных векторов будут лежать в угле, меньшем  $\pi$ , и, следовательно, определять координаты граничной вершины  $P_m$  (рис. 2). Таким образом, задавая направление вращения и выбирая в качестве начального каждый из  $2m$  векторов, можно получить набор из  $2m$  возможных граничных вершин  $P_m$ .

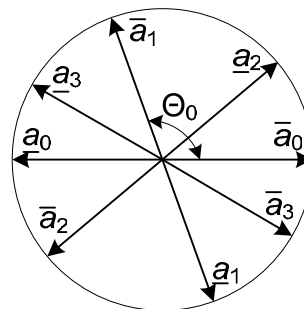


Рис. 2. Диаграмма расположения всех векторов

Для определения полного набора проверочных вершинных полиномов следует учитывать следующее свойство границ областей локализации корней ИХП. Реберные ветви могут входить в состав границ корневых областей как полностью, так и частично, пересекаясь в определенных точках. Причина последнего случая состоит в том, что реберные ветви грани, образованной коэффициентами  $a_i$  и  $a_j$ , пересекаются на луче, выходящем из начала координат под углом  $\varphi = \pi = \pi/|i-j|$ . Поэтому углы, граничные в одном секторе, при переходе через такие особые лучи могут становиться внутренними в другом секторе. Следовательно, необходим учет данного факта при формировании набора граничных вершин  $P_m$ . Для этого предлагается определить особые лучи, лежащие в заданном угле  $\gamma$ . Углы особых лучей находятся по формуле  $\varphi = \pi = \pi/(n-k)$ ,  $k=0,1,2,\dots,n-2$ . Полное множество граничных вершин  $P_m$  является объединением множеств вершин, полученных при различных значениях  $\Theta_0$ , лежащих между особыми лучами. При этом количество искомым граничных вершин  $P_m$  определяется формулой  $2(n+1+\sum_{i=0}^k i)$ .

**Теоретические основы параметрического синтеза регуляторов робастных систем**

Рассмотрим возможность параметрического синтеза различных типов линейных регуляторов — пропорциональных, пропорционально-интегральных и пропорционально-интегрально-дифференциальных (П, ПИ и ПИД), гарантирующих в робастной системе корневые показатели качества. В соответствии с реберной теоремой области локализации корней интервального полинома ограничены реберными ветвями корневого годографа. Для решения задачи синтеза П-регулятора может быть использована методика, основанная на уравнении Теодорчика-Эванса [3]. По этой методике можно определить пересечения реберной ветви корневого годографа с заданной границей при изменении варьируемого параметра в известных интервалах и тем самым найти допустимый диапазон возможных значений коэффициента П-регулятора.

Однако на основе теоремы Теодорчика-Эванса удается находить пересечение ветви корневого годографа с заданной границей только по одному варьируемому параметру, что не позволяет синтезировать ПИ- и ПИД-регуляторы, имеющие, соответственно, 2 и 3 настраиваемых параметра. В связи с этим необходимо разработать такие методики синтеза указанных выше регуляторов, с помощью которых возможно решение поставленных задач.

Пусть ПИ-регулятор задан передаточной функцией:

$$W_p(s) = \frac{K_I \cdot s + K_H}{s},$$

где  $K_I, K_H$  — настройки регулятора, а передаточная функция объекта управления имеет вид:

$$W_{OY}(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где  $A(s) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot s^i$ ,  $B(s) = \sum_{j=0}^n b_j \cdot s^j$ ,  $b_j \leq b_j \leq \bar{b}_j$ .

Тогда интервальный характеристический полином системы может быть записан в виде:  $(K_H + K_I \cdot s) \cdot A(s) + s \cdot B(s) = 0$ . Приведем его к виду

$$\sum_{i=0}^k c_i \cdot s^i = 0, \tag{3}$$

где коэффициенты  $c_k$  могут являться функциями интервальных параметров объекта управления и настроек регулятора. Интервальные коэффициенты  $c_i$  образуют параметрический многогранник, вершины которого определяются их крайними значениями.

Из теории корневого годографа известно, что если корень лежит на вещественной оси, то угол выхода корневого годографа из этого корня составляют 0 или 180°. Очевидно, что для того, чтобы вещественный корень интервального полинома двигался влево при изменении любых интервальных коэффициентов, необходимо, чтобы углы выхода по всем этим коэффициентам составляли 180°. Набор интервальных коэффициентов, который обеспечивает данное требование, определяется на основе следующего утверждения:

**Утверждение.** Если интервальные коэффициенты полинома заданы чередующимися пределами  $\bar{c}_0 c_1 \bar{c}_2 c_3 \dots$ , начиная с максимального для  $c_0$ , то данный набор коэффициентов определяет вещественный корень, углы выхода корневых годографов из которого по всем интервальным коэффициентам составляют 180°.

**Доказательство.** Из основных фазовых соотношений теории корневого годографа известно, что угол выхода из корня при увеличении  $c_i$  можно найти по формуле:  $\Theta_i^g = 180^\circ - \sum_{g=1}^i \Theta_g + i\Theta_0$ , где  $\Theta_g$  и  $\Theta_0$  — углы между вещественной осью и векторами, направленными из корня соответственно к  $g$ -му полюсу и к  $i$  нулям функции. Пусть полином (3) имеет правый вещественный корень  $S^*$ . Тогда для любой пары комплексно-сопряженных корней и для любого вещественного корня, лежащих левее  $S^*$ , на основе свойств корневого годографа можно заключить, что  $\Theta_{p1} + \Theta_{p2} = 360^\circ$ ,  $\Theta_{p3} = 0^\circ$  (рис. 3).

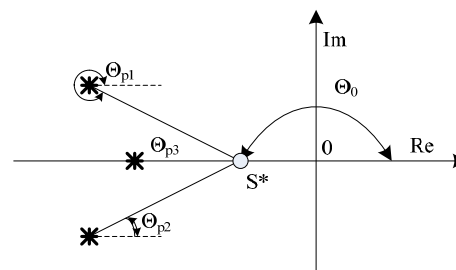


Рис. 3. Пример расположения корней

Следовательно, угол выхода из корня  $S^*$  при увеличении  $c_i$  можно найти по формуле:  $\Theta_i^q = 180^\circ + i\Theta_0$ , а при уменьшении  $\Theta_i^q = i\Theta_0$ . Таким образом, если интервальный полином будет иметь чередующиеся пределы коэффициентов  $\bar{c}_0 \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \dots$ , то углы выхода из образа соответствующей этому набору вершины параметрического многогранника  $P_m$  будут равны  $180^\circ$ .

На основании данного утверждения можно сделать вывод, что минимальная степень устойчивости интервальной системы может быть задана вертикальной прямой, проходящей через вещественный корень, соответствующий чередующимся пределам коэффициентов интервального полинома (рис. 4).

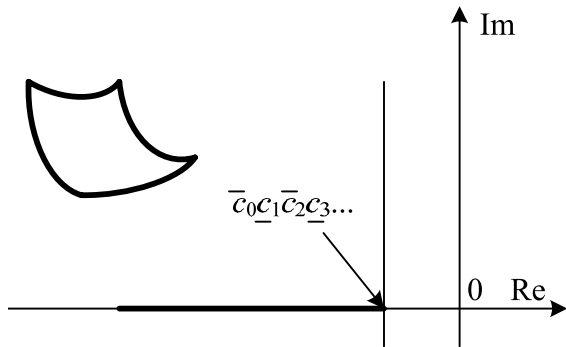


Рис. 4. Задание минимальной степени устойчивости при синтезе регулятора

Пусть минимальная степень устойчивости задается корнем  $s^* = \alpha^*$ . Введем информацию об этом корне в полином (3), задавая в нем чередующиеся значения  $b_j$  и значение  $s^* = \alpha^*$ . Выразив далее  $K_H$  через  $K_D$ , получим выражение:

$$K_H = f(K_D, \alpha^*, b_j^v), \tag{4}$$

где  $b_j^v$  – граничные значения коэффициентов полинома  $B(s)$ , обеспечивающие чередование пределов  $c_i$ . Для дальнейшего синтеза ПИ-регулятора получим интервальный характеристический полином с одним варьируемым коэффициентом  $(K_H(K_D, \alpha^*, b_j^v) + K_D s) \cdot A(s) + s \cdot B(s) = 0$ . После определения допустимого интервала  $K_H$  (на основе решения уравнения Т-Э), из него выбирается некоторое значение  $K_H$  и по выражению (4) рассчитывается значение второго настраиваемого параметра  $K_D$ .

Пусть ПИД-регулятор задан передаточной функцией:

$$W_p(s) = K_H \cdot \left(1 + \frac{K_I}{s} + K_D s\right),$$

где  $K_I, K_H, K_D$  – настройки регулятора, а передаточная функция объекта управления имеет вид:

$$W_{ov}(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где  $A(s) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot s^i$ ,  $B(s) = \sum_{j=0}^n b_j \cdot s^j$ ,  $\underline{b}_j \leq b_j \leq \bar{b}_j$ .

Тогда интервальный характеристический полином системы может быть записан в виде:  $(K_H K_I + K_I s + K_D K_I s) \cdot A(s) + s \cdot B(s) = 0$ . Приведем его к виду

$$\sum_{i=0}^k c_i \cdot s^i = 0. \tag{5}$$

При синтезе ПИД-регулятора следует сначала задать минимальную степень устойчивости системы с помощью вертикальной прямой, проходящей через вещественный корень, соответствующий чередующимся пределам коэффициентов интервального полинома, и выразить  $K_I$  и  $K_D$  через  $K_H$ . Далее необходимо также задать максимальную степень устойчивости (вертикальной прямой, проходящей через вещественный корень, соответствующий противоположным чередующимся пределам коэффициентов) и снова выразить  $K_I$  и  $K_D$  через  $K_H$  (рис. 5).

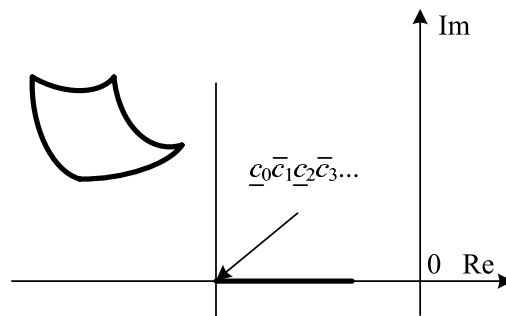


Рис. 5. Задание максимальной степени устойчивости при синтезе регулятора

В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} K_I = f(K_H, K_D, \bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3 \dots) \\ K_D = f(K_H, K_D, c_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3 \dots) \end{cases} \tag{6}$$

Следовательно,  $f(K_H, K_D, \bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3 \dots) = f(K_H, K_D, c_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3 \dots)$ . Из этого равенства можно получить:

$$K_I = f(K_D). \tag{7}$$

Подставив (7) и одно из уравнений (6) в (5), получим характеристическое уравнение с одним настраиваемым параметром  $K_H$ . Сформировав и решив уравнение Теодорчика-Эванса, можно найти интервал возможных значений  $K_H$ . Выбрав некоторое значение  $K_H$  из этого интервала и подставив его в (7), получим значение  $K_D$ . И, решив (6) относительно найденных значений  $K_D$  и  $K_I$  в (6), определим значение  $K_H$ .

Следует заметить, что синтез ПИД регулятора по описанной выше методике позволяет обеспечить в интервальной системе доминантное расположение корней ИХП. При этом доминирующим является вещественный корень, принадлежащий соответствующему отрезку, а область свободных корней определяется границей, лежащей левее этого отрезка. Такое расположение корней позволяет гарантировать в системе аperiодический переходный процесс при любых значениях интервальных параметров объекта управления.

### Комплекс программ RASIS

КП RASIS создан в программном пакете Matlab в виде m-файла. На рис.6 приведена структура КП RASIS, содержащая подпрограммы для анализа и синтеза интервальной системы.

После запуска КП в командном окне Matlab можно увидеть список возможных операций анализа и синтеза и выбрать среди них необходимую. После интерактивного ввода всех входных параметров КП выполнит выбранное действие и отобразит результат в командном окне и/или в дополнительных графических окнах.

Приведем ниже назначение подпрограмм КП RASIS.

Функция *defineSectorApexes* определяет возможные граничные вершины для полинома с заданной степенью интервального характеристического полинома (ИХП) для заданной колебательности.

Функция *defineTruncatedSectorApexes* определяет возможные граничные вершины для полинома с заданными в степень ИХП, колебательностью и степенью устойчивости.

Функция *isTInTruncatedSector* проверяет, все указанные вершины лежат в усеченном секторе, ограниченном заданными колебательностью и степенью устойчивости.

Функция *defineMaxAlphaMinBeta* определяет максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости заданного ИХП.

При построении переходных процессов системы используется встроенная в MATLAB функция *step*. Параметрами выбираются вершины ИХП с максимальной колебательностью и минимальной степени устойчивости.

Функция *edgeTheoremBuild* строит все ребра многогранника  $P_m$  с указанным количеством точек на каждом ребре.

Функция *findCrossWithBAndN* находит точки пересечения ветви корневого годографа, изменяю-

щегося по варьируемой составляющей ИХП, с границами, заданными степенью устойчивости и колебательностью.

Функция *synthesBN* находит минимальное и максимальное значения варьируемого коэффициента, при котором корневой годограф ИХП входит в заданную область, ограниченную максимальной колебательностью и степенью устойчивости.

Функции синтеза П-, ПИ-, ПИД- регуляторов реализуется на основе вышеописанных подпрограмм.

### Пример

Задан ИХП вида  $a_2s^2+a_1s+a_0+K_T=0$ , где  $a_2=[0,1;0,15]$ ,  $a_1=[1;1,5]$ ,  $a_0=[0,1;0,2]$ ,  $K_T$  – настраиваемый коэффициент. Необходимо определить интервал  $K_T$ , при котором все корни ИХП находятся в усеченном секторе, ограниченном углом  $\varphi=\pm 45^\circ$  и минимальной степенью устойчивости  $\alpha=2$ .

Запустив КП RASIS, выберем пункт «Определение максимальных интервалов варьируемого коэффициента, обеспечивающих секторную устойчивость ИХП», введем необходимые входные данные. После проведения вычислений, КП выдаст следующее решение:  $K_T=[2,5;3,1]$ . Проверим правильность полученного решения, построив многопараметрический интервальный корневой годограф. После выбора соответствующего пункта в КП RASIS, получим результат, представленный на рис. 7.

После построения годографа КП выдает следующие численные значения: минимальная степень устойчивости:  $-2$  в вершине:  $[0,1;1,5;2,6]$ , максимальная колебательность:  $0,79$  радиан ( $45^\circ$ ) в вершине:  $[0,1;1;3,33]$ . Из рис. 7 видно, что все корни ИХП располагаются в желаемой области при любых значениях интервальных коэффициентов.

### Заключение

Для анализа и синтеза интервальных систем разработан комплекс программ RASIS, содержащий

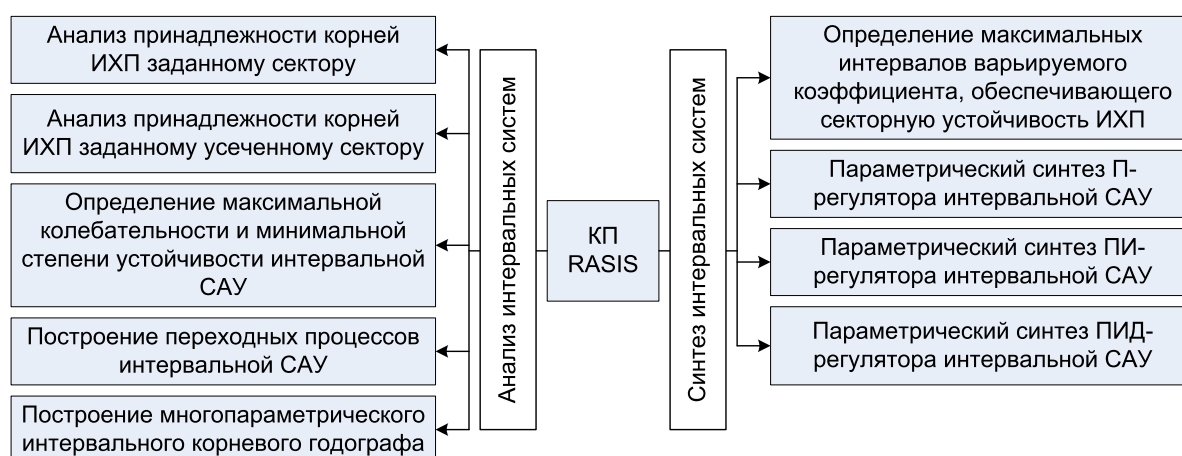


Рис. 6. Структура КП RASIS

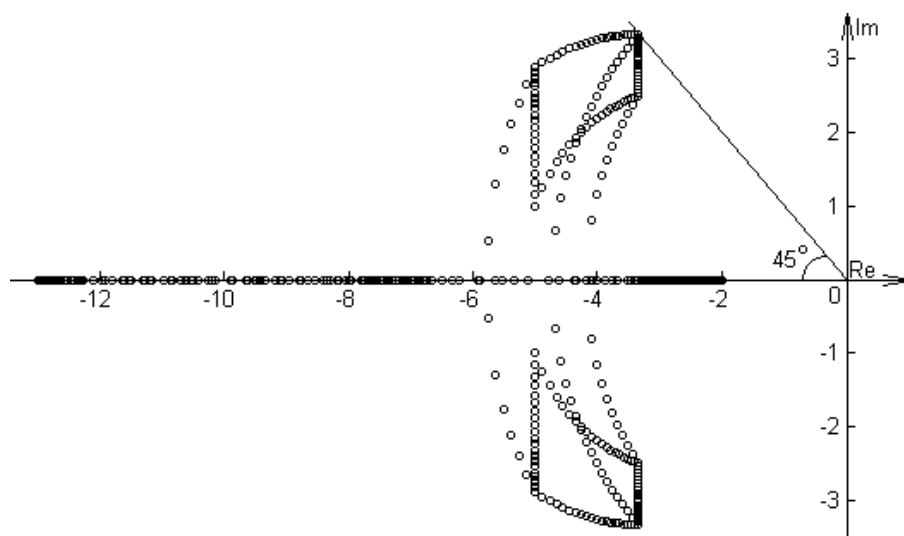


Рис. 7. Многопараметрический интервальный корневой годограф

разработанные авторами методики, позволяющие гарантировать заданную робастную устойчивость при любых изменениях объекта управления в заданных интервалах. Описанные методики основа-

ны на робастном расширении теории корневого годографа. Алгоритмы реализованы в программном пакете MatLab и представляют простой и удобный интерфейс для решения поставленных задач.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Римский Г.В. Корневой метод решения задач устойчивости интервальных систем // Вестн АН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 1994. – № 4. – С. 80–85.
2. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 3–23.
3. Суходоев М.С., Гайворонский С.А. Интервально-параметрический синтез робастной системы с гарантированными корневыми показателями качества // Современная техника и техно-

логии: Труды XIII Междунар. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. – Томск, 26–30 марта 2007. – Томск: ТПУ, 2007. – С. 447–449.

Поступила 16.04.2008 г.

#### КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:

Система автоматического управления, корневой метод, интервальная система, гарантированные корневые показатели качества.

УДК 681.3

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА

С.В. Замятин, Д.А. Плотников, В.И. Гончаров

Томский политехнический университет  
E-mail: zamsv@tpu.ru

Рассматривается применение вещественного интерполяционного метода для получения аналитического описания статических характеристик нелинейных звеньев. С этой целью привлекается преобразование, которое позволяет перевести основные вычислительные процедуры в область изображений, где сложность операций снижается. В результате данного преобразования аналитическое описание статических характеристик представляется в виде усеченного ряда. Работоспособность предлагаемого подхода подтверждается числовыми примерами.

Одной из актуальных задач теории автоматического управления является повышение функциональных возможностей систем автоматического управления за счет их адаптации к изменяющимся

параметрам объектов управления. Поэтому все более широкое применение получают системы управления, имеющие такие возможности. Их построение связано, как правило, с решением задач иден-