**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной.- М.: Наука, 1974. – 480 с.
4. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – 128 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1977. – 496 с.


*Поступила 01.12.2008 г.*

УДК 519.17

# ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ГИПЕРГРАФА НА ПЛОСКОСТИ

В.В. Быкова

Институт математики Сибирского федерального университета, г. Красноярск
E-mail: bykvalen@mail.ru

*Доказана теорема, определяющая достаточные условия существования планарной реализации гиперграфа. Предложена эффективная процедура построения такой реализации. Показано, что в классе планарных гиперграфов реализуемость на плоскости – симметричное и монотонное свойство.*

***Ключевые слова:***
*Реализации гиперграфов, планарность, полиномиальная вычислимость.*

### Гиперграф и ассоциированные с ним графы

Гиперграф – это такое обобщение обыкновенного графа, когда ребрами могут быть не только двухэлементные, но и любые подмножества конечного множества вершин, включая пустые и одноэлементные. Интерес к подобным математическим объектам связан с тем, что они естественным образом возникают в конструкторском проектировании радиоэлектронной и вычислительной аппаратуры, лингвистической трансляции, исследовании слабоструктурированных систем, анализе и синтезе распределенных реляционных баз данных, формировании трафика компьютерных сетей и др. [1, 2]. Для разных приложений желательны те или иные структурные свойства гиперграфа. Так, в производстве интегральных схем важна топологичность гиперграфа – реализуемость на плоскости. Математически обосновано, что в общем случае задача распознавания возможности реализации гиперграфа на плоскости является NP-полной [3]. В данной статье выделяется класс планарных гиперграфов и доказывается, что для него данная задача полиномиально разрешима.

Введем необходимый минимум понятий теории гиперграфов, сохраняя терминологию и обозначения, принятые А.А. Зыковым в работе [4]. Пусть $X$ – некоторое конечное множество, а $U$ – конечное семейство подмножеств множества $X$. Пара $H=(X,U)$ называется гиперграфом с множеством вершин $X$ и множеством ребер $U$, при этом $H=(\varnothing,\varnothing)$ считается пустым гиперграфом. Если вершина $x\in X$ принадлежит ребру $u\in U$, то говорят, что они инцидентны. Сопоставим каждой вершине $x\in X$ гиперграфа $H$ множество $U(x)$ всех инцидентных ей ребер, а каждому ребру $u\in U$ – множество $X(u)$ всех инцидентных ему вершин. Две вершины $x_1,x_2\in X$ являются смежными в $H$, если существует ребро $u\in U$, которое содержит обе эти вершины, т. е. $x_1,x_2\in X(u)$. Аналогичным образом, два ребра $u_1,u_2\in U$ смежные в $H$, если $X(u_1)\cap X(u_2)\neq\varnothing$. Число $|U(x)|$ определяет степень вершины $x$, а число $|X(u)|$ – степень ребра $u$. Если $|U(x)|=0$, то вершина $x$ называется изолированной. Ребро степени 0 считается пустым. Элемент гиперграфа степени 1 именуется висячим.

Если $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $n\geq1$, $U=\{u_1,u_2,...,u_m\}$, $m\geq1$, то гиперграф $H=(X,U)$ однозначно описывается матрицей инциденций $A(H)=\{a_{ij}\}$: $a_{ij}=1$ при $x_i$I $X(u_j)$; $a_{ij}=0$ при $x_i\in X(u_j)$; $i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$. Гиперграф $H^*=(X^*,U^*)$ с матрицей инциденций $A(H^*)=A^{T}(H)$ – двойственный (симметричный) гиперграф для $H=(X,U)$. Для изучения структурных особенностей гиперграфов используются вспомогательные обыкновенные графы: $L(H)$ – реберный граф или граф смежности ребер гиперграфа; $L^{(2)}(H)$ – граф смежности вершин гиперграфа; $K(H)$ – кенигово представление или граф инциденций. Двойственный гиперграф $H^*$ по определению сохраняет отношение смежности и инцидентности между элементами гиперграфа $H$. Оттого он наследует все свойства гиперграфа $H$, основанные на этих отношениях. Справедливо отношение равенства между графами смежности для $H$ и $H^*$ [5]: $L(H)=L^{(2)}(H^*)$, $L^{(2)}(H)=L(H)$. Кенигово представление гиперграфа $H=(X,U)$ – двудольный граф $K(H)$, отражающий отношение инцидентности элементов гиперграфа, с множеством вершин $X \cup U$ и долями $X$, $U$. Этот граф несет полную информацию о гиперграфе $H$ и однозначно его определяет. Кроме того, $K(H)=K(H^*)$. Поэтому некоторые свойства гиперграфа устанавливаются через одноименные свойства графа $K(H)$ [4, 6].

Существует еще один обыкновенный граф, который представляет гиперграф, – это его реализация. Реализацией ребра $u \in U$ гиперграфа $H=(X,U)$ называется любой связный граф $G(u)$, заданный на множестве вершин $X(u)$. Реализация гиперграфа $H$ – граф $G(H)=(X,E)$, полученный объединением некоторых реализаций $G(u)$ всех его ребер. По определению граф $G(H)$ удовлетворяет следующим условиям: множество его вершин совпадает с множеством вершин гиперграфа $H$; всякое его ребро $e \in E$ содержится в некотором ребре $u \in U$ гиперграфа $H$; порожденный подграф $G(u)$ связен для каждого $u \in U$. Ясно, что для гиперграфа может существовать несколько различных реализаций. Например, граф $L^{(2)}(H)$ – реализация гиперграфа $H=(X,U)$, где каждое ребро $u \in U$ представлено полным графом порядка $|X(u)|$. Планарные реализации – реализации, допускающие плоскую укладку. Подобные реализации востребованы при производстве интегральных схем, т.к. допускают их однослойность.

### Плоский гиперграф и планарные реализации

Гиперграф $H$ называется плоским или планарным, если $K(H)$ – планарный граф. Связность гиперграфа $H$ также определяется через аналогичное свойство графа $K(H)$. Поскольку $K(H^*)=K(H)$, то справедливо высказывание: гиперграф $H$ является плоским (связным) тогда и только тогда, когда двойственный гиперграф $H^*$ – плоский (связный). Свойство $\alpha$ полагается симметричным, если из того, что гиперграф $H$ обладает свойством $\alpha$, следует, что двойственный гиперграф $H^*$ также обладает этим свойством. Таким образом, планарность и связность – симметричные свойства гиперграфов. При рассмотрении вопросов, касающихся планарности, как правило, ограничиваются связными графами и гиперграфами. Это не нарушает общности рассуждений, т. к. граф (гиперграф) планарен тогда и только тогда, когда планарна каждая его компонента связности. Примечательно, что в связных гиперграфах нет изолированных вершин и пустых ребер.

Свойство $\alpha$ принято считать монотонным, если из того, что гиперграф $H$ обладает свойством $\alpha$, следует, что всякий его полнореберный или полновершинный подграф также обладает этим свойством. Напомним, что гиперграф $H'=(X',U')$ – часть (или подграф) гиперграфа $H=(X,U)$ (обозначается $H' \subseteq H$), если $X' \subseteq X$ и $U' \subseteq U$ и сохранено отношение инцидентности элементов гиперграфа $H$. Часть $H'$1$H$ называется полнореберным подграфом гиперграфа $H$, если $U'=U$. Иными словами, полнореберный подграф образуется (при $X' \subset X$) слабым удалением из исходного гиперграфа $H$ всех вершин, принадлежащих множеству $X \backslash X'$. При этом под слабым удалением вершины $x$I$X$ подразумевается удаление вершины $x$ из множества $X$ и всех ребер, в которые входит эта вершина. Часть $H' \subseteq H$ называется полновершинным подграфом гиперграфа $H$, если $X'=X$. Другими словами, гиперграф $H'$ образуется (при $U' \subset U$) слабым удалением из $H$ всех ребер, принадлежащих $U \backslash U'$. Слабое удаление ребра $u \in U$ из гиперграфа $H=(X,U)$ – это удаление ребра $u$ только из $U$, при этом все инцидентные данному ребру вершины остаются в $X$.

В теории графов доказано, что любой подграф обыкновенного планарного графа всегда планарен [6]. Следовательно, планарность – монотонное свойство графа (гиперграфа). Кроме того, это полиномиально проверяемое свойство, поскольку известны алгоритмы, позволяющие получить плоскую укладку или установить, что исследуемый граф (в данном случае $K(H)$) непланарен. Определе-


***Рис. 1.*** *Непланарный гиперграф $H_1$ и его кенигово представление $K(H_1)$, совпадающее с $K_{33}$*

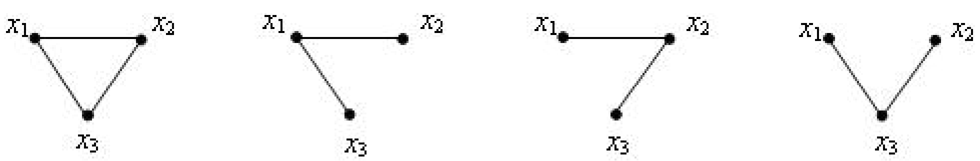


***Рис. 2.*** *Различные планарные реализации гиперграфа $H_1$*

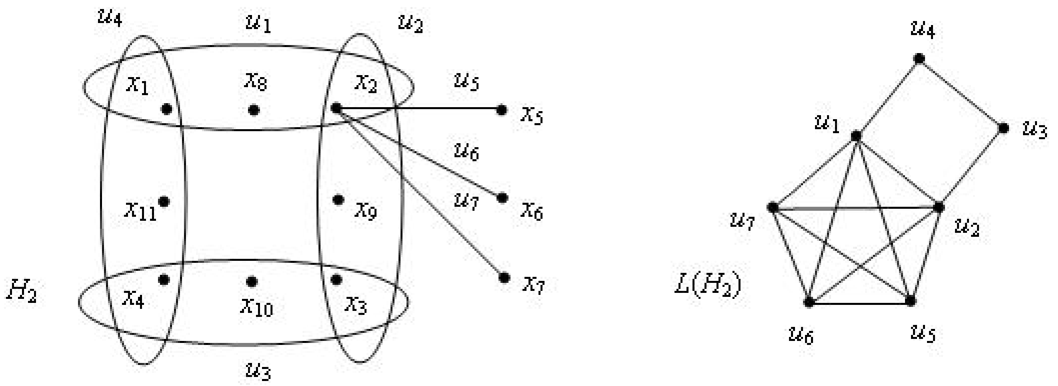


***Рис. 3.*** *Гиперграф $H_2$, реберный граф $L(H_2)$ которого нехордовый и непланарный*

ние планарности гиперграфа $H$ через планарность обыкновенного графа $K(H)$, с одной стороны, позволяет для проверки данного свойства использовать все имеющиеся в арсенале теории графов методы и средства (критерии планарности, алгоритм плоской укладки и др.), а с другой – ничего нового не вносит в теорию гиперграфов. Гораздо больший интерес представляют планарные реализации гиперграфов. Однако здесь имеется ряд проблем. Во-первых, не всякий гиперграф имеет планарную реализацию. Например, если гиперграф совпадает с полным двудольным графом Куратовского $K_{33}$, то данный гиперграф допускает лишь единственную реализацию, совпадающую с ним самим, которая не является планарной. Между тем, как показывает пример гиперграфа $H_1$ на рис. 1, для непланарного гиперграфа могут существовать планарные реализации (рис. 2). Во-вторых, как было уже указано, задача распознавания реализуемости произвольного гиперграфа на плоскости является NP-полной.

### Известные достаточные условия существования планарных реализаций

В следующих утверждениях отражены известные к настоящему времени достаточные условия реализуемости гиперграфа на плоскости в терминах его структуры и ассоциированных с ним обыкновенных графов.

**Утверждение 1** [3, 6]**.** Если гиперграф $H=(X,U)$ удовлетворяет ослабленному условию Хелли и его реберный граф $L(H)$ хордовый, то существует реализация $H$ планарным графом.

Заметим, что гиперграф $H=(X,U)$ удовлетворяет ослабленному условию Хелли, когда для любого подсемейства его попарно смежных ребер $U'\subseteq U$ имеются две вершины $x_1,x_2\in X$ такие, что $X(u)\cap\{x_1,x_2\}\neq\varnothing$ для любого $u\in U'$. Хордовость $L(H)$ свидетельствует об отсутствии в $L(H)$ простых циклов длины $k\geq 4$.

**Утверждение 2** [3, 6]**.** Если для гиперграфа $H=(X,U)$ реберный граф $L(H)$ планарен, то для $H$ существует планарная реализация.

Условия утверждений 1, 2 независимы между собой и не являются необходимыми. Например, гиперграф $H_2$ с рис. 3 не подчиняется требованиям утверждений 1, 2 (его реберный граф $L(H_2)$ нехордовый и непланарный), но при этом имеет планарную реализацию (рис. 4). Сам гиперграф $H_2$ планарен.

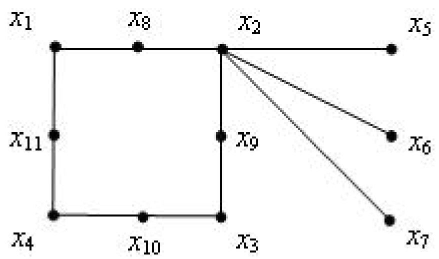


***Рис. 4.*** *Планарная реализация гиперграфа $H_2$*

Достаточным условиям, определенным утверждением 1, явно присуща неполиномиальную сложность. Полиномиальных алгоритмов проверки для них пока неизвестно. Между тем установить справедливость требований утверждения 2 можно с полиномиальной сложностью. Для этого достаточно построить реберный граф $L(H)$ и применить к нему алгоритм плоской укладки, который за время $O(m^c)$, где $m=|U|$ и $c$ – некоторая положительная константа, построит плоскую укладку или установит, что $L(H)$ непланарен [6].

Важно отметить, что условия утверждений 1, 2 ориентированы лишь на распознавательную задачу и не указывают способа построения требуемой реализации, если она существует. Кроме них для проверки реализуемости гиперграфа на плоскости используют также критерии древовидности. Гиперграфы, которые реализуются деревьями, называют древовидными. Задача распознавания свойства древовидности гиперграфа полиномиально разрешима.

**Утверждение 3** [5, 7]. Связный гиперграф $H=(X,U)$ допускает реализацию деревом тогда и только тогда, когда двойственный к нему гиперграф $H^*=(X^*,U^*)$ является $M$-ациклическим.

В работе [5] доказано, что гиперграф $H^*=(X^*,U^*)$ $M$-ацикличен тогда и только тогда, когда гиперграф $H=(X,U)$ обладает свойством Хелли, а его реберный граф $L(H)$ хордовый. Считается, что семейство $U'=\{u_1,u_2,\ldots,u_l\}\subseteq U$ попарно смежных ребер гиперграфа $H$ удовлетворяет условию Хелли при $X(u_1)\cap X(u_2)\cap\ldots\cap X(u_l)\neq\varnothing$. Если любое семейство $U'\subseteq U$ попарно смежных ребер гиперграфа $H$ отвечает данному условию, то гиперграф в целом обладает свойством Хелли. Известно, что свойство Хелли немонотонное, несимметричное и трудноповеряемое. Между тем для гиперграфов с хордовыми реберными графами наличие или отсутствие данного свойства можно установить за полиномиальное время [7]. Очевидно, что если гиперграф обладает свойством Хелли, то он также удовлетворяет ослабленному условию Хелли. Значит, при выполнении положений утверждения 3 постоянно будут справедливы требования утверждения 1. Это вполне естественный факт, поскольку дерево всегда планарно. Далее выводятся полиномиально проверяемые достаточные условия существования планарных реализаций, независимые от требований утверждений 1, 2 и охватывающие более широкий класс гиперграфов, нежели класс древовидных гиперграфов.

### Построение планарных реализаций плоского гиперграфа

Определим для связного гиперграфа $H=(X,U)$ следующую процедуру очистки: слабое удаление из $X$ висячих вершин; слабое удаление из $U$ висячих ребер. Многократное применение к гиперграфу $H$ этих операций приводит к гиперграфу $clear(H)$, который является частью $H$. Так, для гиперграфа $H_1$ с рис. 1 имеет место равенство $clear(H_1)=H_1$, а результатом очистки гиперграфа $H_2$ (рис. 3) служит граф $clear(H_2)$, изображенный на рис. 5. Очевидно, что $clear(H)=(\varnothing,\varnothing)$, если $H$ не содержит циклов. Здесь под циклом гиперграфа $H$ понимается чередующаяся последовательность его вершин и ребер, порождающая простой цикл графа $K(H)$.

**Лемма 1.** Для всякого связного гиперграфа $H=(X,U)$ гиперграф $H'=clear(H)$ является либо пустым, либо таким, что $K(H')$ есть вершинно-1-связный и реберно-2-связный граф.

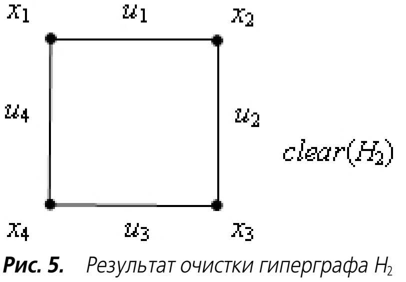


***Рис. 5.*** *Результат очистки гиперграфа $H_2$*

Справедливость леммы 1 непосредственно вытекает из определений планарности гиперграфа и операции очистки. Заметим, что в вершинно-1-связных и реберно-2-связных графах любые две различные вершины принадлежат циклу (не обязательно простому), т. е. в них нет мостов, но могут быть точки сочленения. А такие графы представимы в виде объединения блоков.

Если лемма 1 характеризует структурные особенности кенигова представления гиперграфа $clear(H)$, то дальнейшие леммы утверждают, что гиперграф $clear(H)$ наследует свойство планарности исходного гиперграфа $H$.

**Лемма 2.** Гиперграф $H'=clear(H)$ планарен тогда и только тогда, когда $H$ планарен.

**Доказательство.** Пусть исходный гиперграф $H$ планарен. Тогда его кенигово представление $K(H)$ – планарный граф. Граф $K(H')$ – подграф графа $K(H)$, поэтому он также планарен. Следовательно, очищенный гиперграф $H'=clear(H)$ планарен. Предположим обратное. Пусть гиперграф $H'=clear(H)$ и ассоциированный с ним граф $K(H')$ планарны. По лемме 1 либо граф $K(H')$ пуст, либо он есть объединение блоков. Очевидно, что кенигово представление $K(H)$ исходного гиперграфа $H$ можно восстановить из графа $K(H')$ путем добавления блоков, представляющих собой деревья порядка 2, которые в свою очередь – планарные части $K(H)$. Таким образом, граф $K(H)$ и гиперграф $H$ планарны.

**Лемма 3.** Если $H'=(X',U')$ – очищенный планарный гиперграф, то для него всегда существует планарная реализация.

**Доказательство.** По определениям планарности гиперграфа, кенигова представления и лемме 1 граф $K(H')$ является плоским, вершинно-1-связным, реберно-2-связным и двудольным, с множеством вершин $X'\cup U'$ и долями $X'$, $U'$. Поместим его на плоскости, используя известный алгоритм плоской укладки двусвязных графов [6]. К полученной укладке многократно применим операцию стягивания ребра, инцидентного какой-либо вершине $u$I $U'$ графа $K(H')$. Операция стягивания всякого ребра $\{x, u\}$ предполагает следующие действия:

- ребро $\{x, u\}$ удаляется, а вершины $x$, $u$ отождествляются, т. е. заменяются одной вершиной, которую обозначают $xu$;
- вершина $xu$ объявляется смежной с каждой вершиной $y$ ($y\neq x$, $y\neq u$), если ранее $y$ была смежна с $x$ или $u$. Отношение смежности других вершин не изменяется.

Обозначим через темные вершины исходные вершины графа $K(H')$, а через светлые – вершины, полученные в результате отождествления. Данную процедуру завершим в тот момент, когда в графе $K(H')$ не останется темных вершин $u$I $U'$. Пусть результат выполнения процедуры стягивания – граф $G(H')=(X',E)$. Этот граф очевидно планарен, т. к. операция стягивания ребра планарного графа никогда не нарушает его планарности.

Осталось показать, что граф $G$ является реализацией гиперграфа $H'$. Действительно, множество вершин графа $G$ совпадает с множеством вершин гиперграфа $H'$, поскольку стягиваются только ребра, инцидентные вершинам $u\in U'$, и постепенно все вершины $u\in U'$ отождествляются с вершинами из $X'$. Проверим условия, накладываемые определением реализации на ребра графа $G$. По постро-

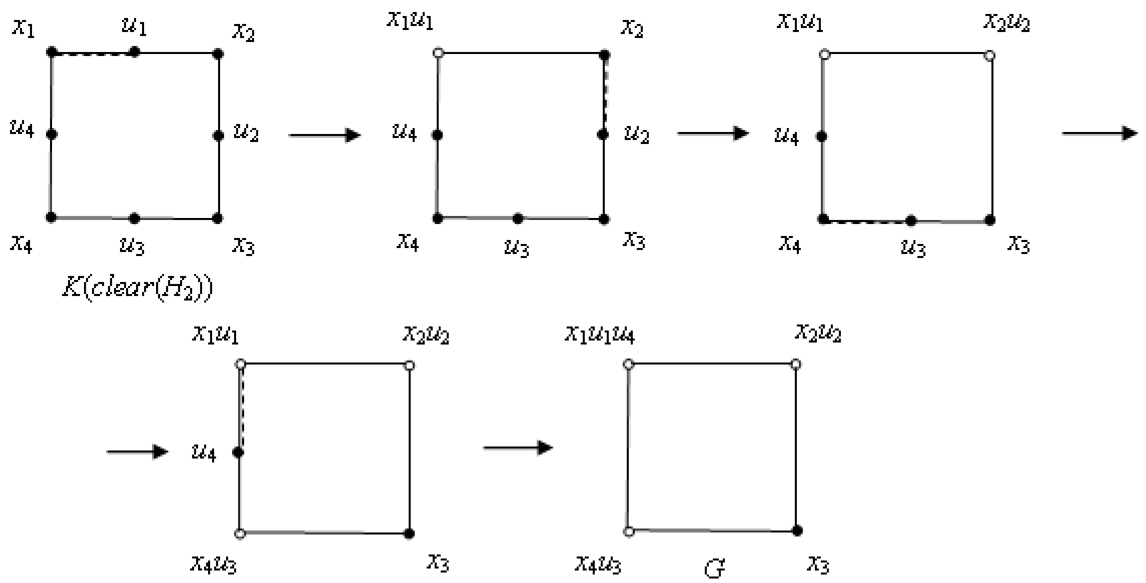


***Рис. 6.*** *Пошаговое стягивание K(clear(H₂)). Темные точки – исходные вершины графа, светлые – вершины, полученные в результате отождествления. Пунктиром выделены стягиваемые ребра*

ению две вершины $x,y \in X'$ смежны в $G$ только в том случае, когда они обе были смежны с некоторой вершиной $u \in U'$ графа $K(H')$ (или инцидентны ребру $u \in U'$ гиперграфа $H'$). Значит, всякое ребро $\{x,y\}$ графа $G$ содержится в ребре $u$ гиперграфа $H'$. Теперь выберем в $H'$ произвольное ребро $u \in U'$. Пусть $X(u)$ – множество вершин гиперграфа $H$, инцидентных ребру $u$. Применительно к графу $K(H')$ множество $X(u)$ определяет все вершины, смежные с вершиной $u$. Тогда для любой пары вершин $a,b \in X(u)$ в $K(H')$ существует цепь, соединяющая вершины $a$ и $b$. Это означает, что подграф $K(u)$ графа $K(H')$, порожденный множеством вершин $X(u) \cup u$, является связным. Отождествление вершины $u$ с одной из вершин множества $X(u)$ не может нарушить связности $K(u)$. Следовательно, граф $G=(X',E)$ – планарная реализация гиперграфа $H'$. Заметим, что многообразные стратегии выбора отождествляемых вершин могут приводить к различным планарным реализациям гиперграфа $H'=clear(H)$. Кроме того, в $G$ возможно появление кратных ребер, но эта кратность легко устраняется.

Из лемм 1–3 непосредственно вытекает справедливость следующей теоремы.

**Теорема.** Всякий планарный гиперграф реализуем на плоскости.

Данная теорема определяет достаточные условия существования планарной реализации гиперграфа $H=(X,U)$, которым свойственна полиномиальная сложность проверки. Лемма 3 указывает полиномиальный алгоритм построения такой реализации. В самом деле, если граф $K(H')$ задан матрицей инциденций $A(K)$, то эта матрица имеет до $n+m$ строк и $nm$ столбцов, где $n=|X|$, $m=|U|$. Стягивание ребра $\{x, u\}$ в $K(H')$ ведет к удалению в $A(K)$ соответствующего столбца, на что необходимо $O(n+m)$ условных единиц времени. Трудоемкость формирования строки в $A(K)$ для вершины $xu$ составляет $O(nm)$. В худшем случае (при стягивании всех возможных ребер графа $K(H')$) процедура стягивания требует $O[nm((n+m)+nm)]=O(n^2m^2)$ времени. Трудоемкость построения гиперграфа $H'=clear(H)$ и восстановления планарной реализации для $H$ по планарной реализации для $H'$ составляет также не более чем $O(n^2m^2)$. Значит, проверить условия теоремы и построить планарную реализацию, если она существует, можно за полиномиальное время.

В качестве примера рассмотрим гиперграф $clear(H_2)$ с рис. 5, который очевидным образом планарен. Процедура пошагового стягивания ребер его кенигова представления $K(clear(H_2))$ представлена на рис. 6. Граф $G$ – результат выполнения процедуры стягивания – планарен и дает плоскую укладку гиперграфа $clear(H_2)$. Поскольку для $clear(H_2)$ существует только единственная планарная реализация, то любой порядок стягивания ребер здесь будет приводить к одному и тому же результату.

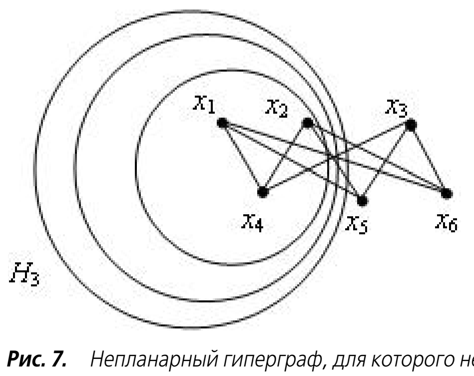


***Рис. 7.*** *Непланарный гиперграф, для которого не существует планарная реализация*

Условия приведенной выше теоремы не являются необходимыми. Например, непланарный гиперграф $H_1$ с рис. 1 допускает реализацию на пло-

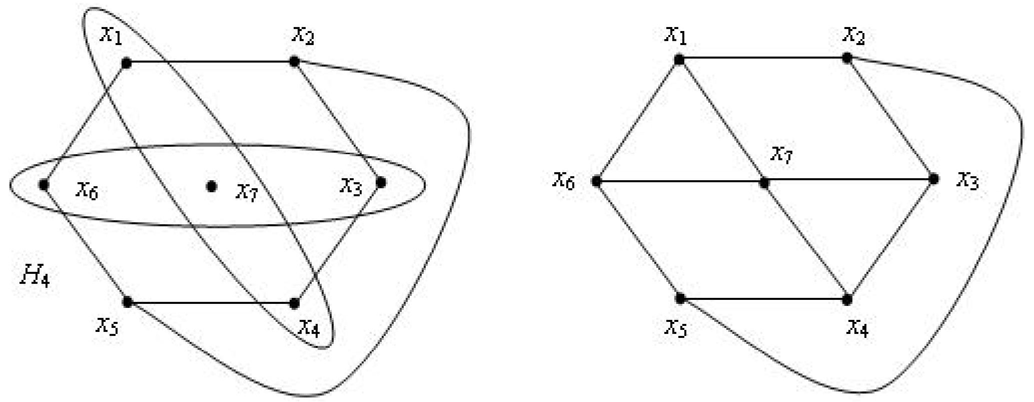


***Рис. 8.*** *Непланарный гиперграф $H_4$ и его планарная реализация*

скости. Кроме того, условия этой теоремы независимы от требований утверждений 1, 2. Это демонстрирует гиперграф $H_2$, изображенный на рис. 3. Для него требования утверждений 1, 2 не выполняются, но он планарен и поэтому имеет планарные реализации. Одна из таких реализаций приведена на рис. 4. Примечательно, что существуют гиперграфы, которые не являются плоскими и не допускают реализацию планарным графом. Такой гиперграф $H_3$ изображен на рис. 7.

В общем случае из существования реализации гиперграфа планарным графом не следует существование таких реализаций для его подграфов. Так, гиперграф $H_4$ с рис. 8 реализуется на плоскости. Если из $H_4$ слабо удалить вершину $x_7$, то он превращается в граф Куратовского $K_{33}$, который допускает только единственную реализацию, совпадающую с ним самим и являющуюся непланарным графом. Ситуация меняется, если мы имеем планарный гиперграф.

**Следствие 1.** Планарный гиперграф не только сам, но все его полновершинные и полнореберные подграфы допускают реализацию на плоскости.

Справедливость следствия 1 вытекает из определения планарности гиперграфа $H$ (через планарность кенигова представления $K(H)$), доказанной выше теоремы и того факта, что всякий подграф планарного графа всегда планарен. С учетом равенства $K(H^*)=K(H)$ верно также высказывание.

**Следствие 2.** Для двойственного гиперграфа $H^*$ всякого планарного гиперграфа $H$ существует планарная реализация.

Таким образом, для планарных гиперграфов свойство реализуемости на плоскости монотонное и симметричное.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батищев Д.И., Старостин Н.В., Филимонов А.В. Многоуровневая декомпозиция гиперграфовых структур // Информационные технологии. Приложение. – 2008. – № 5. – С. 1–31.
2. Азаренок А.С., Сарванов В.И. Экстремальные реализации гиперграфов // Доклады АН БССР. – 1986. – Т. 30. – № 10. – С. 887–889.
3. Азаренок А.С., Сарванов В.И. О сложности планарной реализации гиперграфа // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 4. – С. 10–12.
4. Зыков А.А. Гиперграфы // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 29, вып. 6. – С. 89–154.
5. Быкова В.В., Куприянова Т.В. Сравнительный анализ М-ациклических и комплектных гиперграфов // Проблемы оптимизации и экономические приложения: Тез. докл. Междунар. конф. – Омск: Омск. гос. ун-т, 1997. – С. 31.
6. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
7. Быкова В.В. Полиномиальные достаточные условия бихроматичности гиперграфа // Вестник КрасГУ. Серия физ.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 98–106.

*Поступила 18.12.2008 г.*