УДК 62-50:519.2

ФИЛЬТРАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ АНОМАЛЬНЫХ ПОМЕХ

Н.С. Дёмин, О.В. Рожкова*, С.В. Рожкова*

Томский государственный университет,
*Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Рассматривается задача оптимальной в среднеквадратическом смысле фильтрации вектора состояния стохастической динамической системы по наблюдениям, которые зависят как от текущего, так и от прошлых значений вектора состояния, когда в канале наблюдения, кроме регулярных, действуют аномальные помехи с неизвестным математическим ожиданием.

***Ключевые слова**:*
Динамическая система, фильтрация, аномальная помеха, память.

Введение

Теория калмановской фильтрации [1] является основой конструирования современных систем управления, навигации, передачи и переработки информации, обработки траекторных изменений [2–8]. Потребности практики со временем потребовали развития данного направления на случай неточного задания математической модели либо нарушения нормального режима функционирования системы [9, 10]. В рамках развития этой проблемы в данной работе рассматривается задача оценивания вектора состояния системы калмановского типа для случая, когда: 1) канал наблюдения обладает памятью относительно значений вектора состояния, что имеет место, например, при наличии инерционных измерителей либо при наличии задержек в каналах передачи информации [11–14]; 2) в канале наблюдения, кроме регулярных, действуют аномальные помехи, причем в общем случае не по всем компонентам вектора наблюдений; 3) аномальная помеха является нестационарной, математическое ожидание которой является неизвестной функцией времени.

Далее: $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $tr[\cdot]$ – след матрицы, «T» и «+» – транспонирование и псевдообращение матрицы, если стоят как правые верхние индексы; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака; 0 – нулевой вектор соответствующего размера; O и I_k – нулевая матрица соответствующего размера и единичная ($k\times k$) – матрица; A>0 (≥0) – положительно (неотрицательно) определенная матрица.

1. Постановка задачи

Система описывается уравнениями (точка сверху далее всюду означает производную по t)

$$\dot{x}(t)=F(t)x(t)+\omega(t),\ t\geq 0, \qquad (1)$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор состояния, $\omega(t)$ – n-мерный вектор возмущений, который является белым гауссовским процессом с $M\{\omega(t)\}=0$ и $M\{\omega(t)\omega^T(t)\}=Q(t)\delta(t-s)$. Выходом канала наблюдения за состоянием системы является l – мерный процесс $z(t)$ вида

$$z(t)=H_0(t)x(t)+\sum_{k=1}^{n}H_k(t)x(\tau_k)+\upsilon(t)+Cf(t), \qquad (2)$$

где $0<\tau_N<\tau_{N-1}<...<\tau_1<t$. В (2) $\upsilon(t)$ – l-мерный белый гауссовский процесс является регулярной помехой, а $f(t)$ – r-мерный $r\leq l$ белый гауссовский процесс, который является аномальной помехой, причем $M\{\upsilon(t)\}=0$,

$$M\{\upsilon(t)\,\upsilon^T(s)\}=R(t)\delta(t-s),\ M\{f(t)\}=f_0(t),$$

$$M\{[f(t)-f_0(t)][f(s)-f_0(s)]^T\}=\Theta(t)\,\delta(t-s).$$

Матрица C размера ($l\times r$), задающая структуру действия компонент аномальной помехи $f(t)$ на компоненты вектора наблюдения $z(t)$, является булевой следующего вида: если $i_1,i_2,...,i_r$ – номера компонент вектора $z(t)$, по которым действуют аномальные компоненты $f(t)$, то в столбце с номерами j единица стоит на i_j-м месте ($1\leq j\leq r$; $1\leq i_j\leq l$). Предполагается: 1) $x(0)=x_0$ – имеет нормальное распределение с параметрами μ_0 и Γ_0; 2) x_0, $\omega(t)$, $\upsilon(t)$, $f(t)$ – независимы; 3) матрицы $Q(t)$, $R(t)$, $\Theta(t)$ – невырождены; 4) $f_0(t)$ – неизвестно.

Ставится задача: по реализации $z_0^t=\{z(s):0\leq s\leq t\}$ наблюдаемого процесса найти оптимальную в среднеквадратическом смысле несмещенную оценку $\mu(t)$ для $x(t)$.

2. Структура фильтра

Класс фильтров, на котором будет решаться поставленная задача, выберем на основе решения соответствующей задачи в байесовском случае [15], считая при этом, что $t\geq\tau_1$, то есть аномальная помеха начинает действовать, когда в наблюдениях накопилась память максимальной кратности N.

Утверждение: Пусть $f_0(t)=0$. Тогда оптимальный в среднеквадратическом смысле байесовский фильтр определяется уравнениями

$$\dot{\mu}(t)=F(t)\mu(t)+\tilde{H}_0^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\,\tilde{z}(t), \qquad (3)$$

$$\dot{\mu}(\tau_k,t)=\tilde{H}_k^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\,\tilde{z}(t),\quad k=\overline{1;N}, \qquad (4)$$

$$\dot{\Gamma}(t)=F(t)\Gamma(t)+\Gamma(t)F^T(t)+Q(t)-$$
$$-\tilde{H}_0^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\tilde{H}_0(t), \qquad (5)$$

$$\dot{\varGamma}_{kk}(\tau_k,t) = -\tilde{H}_k^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\tilde{H}_k(t), \quad k=\overline{1;N}, \qquad (6)$$

$$\dot{\varGamma}_{0k}(\tau_k,t) = F(t)\Gamma_{0k}(\tau_k,t) - \tilde{H}_0^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\tilde{H}_k(t), \quad k=\overline{1;N}, \qquad (7)$$

$$\dot{\varGamma}_{kl}(\tau_l,\tau_k,t) = -\tilde{H}_k^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\tilde{H}_l(t), \quad k=\overline{1;N-1}, \quad l=\overline{2;N}, \quad l>k, \qquad (8)$$

где

$$\tilde{z}(t) = z(t) - [H_0(t)\mu(t) + \sum_{j=1}^{N} H_j(t)\mu(\tau_j,t)], \qquad (9)$$

$$\tilde{H}_0(t) = H_0(t)\Gamma(t) + \sum_{j=1}^{N} H_j(t)\varGamma_{0j}^T(\tau_j,t), \qquad (10)$$

$$\tilde{H}_k(t) = H_k(t)\Gamma_{kk}(\tau_k,t) + \sum_{j\neq k}^{N} H_j(t)\varGamma_{kj}^T(\tau_j,\tau_k,t), \qquad (11)$$

$$\tilde{R}(t) = R(t) + C\Theta(t)C^T. \qquad (12)$$

Поскольку в данной работе рассматривается случай фиксированной памяти (τ_k=const, $k=\overline{1;N}$), то данное утверждение следует как частный случай теоремы 1 из [15], где дано решение задачи в случае скользящей памяти ($\tau_k=t-t_k^*$, t_k^*=const, $k=\overline{1;N}$) с учетом условия 2 постановки задачи. Отметим, что задание процессов $x(t)$ и $z(t)$ через белые гауссовские процессы в данной работе и через винеровские процессы в [15] согласованы.

Введем в рассмотрение белые процессы $\tilde{\omega}(t)$, $\tilde{x}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$, $\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$ ($\tilde{\tau}_N=[\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_N]$) размеров $(N+1)n$ вида

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{bmatrix}\omega(t)\\ \cdots \\ 0\end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \begin{bmatrix}x(t)\\ \cdots \\ x(\tau_k)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \begin{bmatrix}\mu(t)\\ \cdots \\ \mu(\tau_k,t)\end{bmatrix}, \quad k=\overline{1;N}, \qquad (13)$$

где $\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\tilde{x}_{N+1}(\tilde{\tau},t)-\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$, и блочные матрицы

$$\tilde{F}(t) = \begin{bmatrix}F(t) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \; K(t) = \begin{bmatrix}\tilde{H}_0^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\\ \tilde{H}_k^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}K_0(t)\\ K_k(t)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}(t) = \left[\begin{array}{c|c}Q(t) & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right], \; H(t) = [H_0(t) \mid H_k(t)], k=\overline{1;N}. \qquad (14)$$

размеров соответственно $[(N+1)n]\times[(N+1)n]$, $[(N+1)n]\times l$, $l\times[(N+1)n]$, $[(N+1)n]\times[(N+1)n]$, $l\times n(N+1)$. Расписав (9) с учетом (2, 13, 14), получаем что

$$\tilde{z}(t) = H(t)\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) + \tilde{\upsilon}(t), \qquad (15)$$

где $\tilde{\upsilon}(t)=\upsilon(t)+Cf(t)$. Из (3, 4, 13, 14) следует уравнение

$$\dot{\tilde{\mu}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \tilde{F}(t)\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) + K(t)\tilde{z}(t). \qquad (16)$$

Использовав последовательно (16), (13–15) получим

$$\dot{\tilde{\mu}}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \bar{F}(t)\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) + \tilde{\omega}(t) - K(t)\tilde{\upsilon}(t), \qquad (17)$$

где $\bar{F}(t)=\tilde{F}(t)-K(t)H(t)$. Пусть $\Phi(t,\sigma)$ – переходная матрица, соответствующая матрице $\bar{F}(t)$. Тогда решение (17) запишется в виде

$$\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \varPhi(t,\tau_1+0)\,\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,\tau_1+0) + \int_{\tau_1+0}^{t} \varPhi(t,\sigma)[\tilde{\omega}(\sigma) - K(\sigma)\tilde{\upsilon}(\sigma)]\,d\sigma. \qquad (18)$$

Пусть $f_0(t)\neq 0$. Тогда из (18) следует, что

$$M\{\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\} = -\int_{\tau_1+0}^{t} \varPhi(t,\sigma)\,K(\sigma)\,C\,f_0(\sigma)\,d\sigma, \qquad (19)$$

то есть оценка смещенная. Поскольку $M\{\tilde{\upsilon}(t)\}=Cf_0(t)$ при $f_0(t)\neq 0$, то, чтобы ликвидировать смещение, нужно в (16) вместо $\tilde{z}(t)$ использовать $\tilde{\tilde{z}}(t)=\tilde{z}(t)-Cf_0(t)$, что приводит к уравнению

$$\dot{\tilde{\mu}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \tilde{F}(t)\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) + K(t)\tilde{\tilde{z}}(t). \qquad (20)$$

где теперь $K(t)$ – матрица передачи фильтра, которая должна быть найдена из условия оптимальности. В результате вместо (17) получаем уравнение

$$\dot{\tilde{\mu}}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \bar{F}(t)\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) + \tilde{\omega}(t) - K(t)[\tilde{\upsilon}(t) - Cf_0(t)]. \qquad (21)$$

Аналогично (18) получаем решение (21) в виде

$$\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \varPhi(t,\tau_1+0)\,\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,\tau_1+0) + \int_{\tau_1+0}^{t} \varPhi(t,\sigma)[\tilde{\omega}(\sigma) - K(\sigma)[\tilde{\upsilon}(t) - C\,f_0(\sigma)]]\,d\sigma. \qquad (22)$$

Так как $M\{\tilde{\upsilon}(\sigma)\}=Cf_0(\sigma)$, то $M\{\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\}=0$, то есть оценка, определяемая классом фильтров (20), является несмещенной.

Поскольку по постановке задачи $f_0(t)$ неизвестно, то предполагается при формировании $\tilde{\tilde{z}}(t)$ вместо $f_0(t)$ использовать оценку $\hat{f}(t)$ как линейное преобразование процесса $\tilde{z}(t)$, то есть

$$\hat{f}(t) = Y(t)\tilde{z}(t), \qquad (23)$$

где $Y(t)$ – $(r\times l)$-матрица, выбор которой будет определяться условием несмещенности оценок. Использование $\hat{f}(t)$ вместо $f_0(t)$ дает $\tilde{\tilde{z}}(t)=\tilde{Y}(t)\tilde{z}(t)$, и из (20) следует уравнение

$$\dot{\tilde{\mu}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = \tilde{F}(t)\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) + K(t)\tilde{Y}(t)\,\tilde{z}(t), \qquad (24)$$

где

$$\tilde{Y}(t) = I_l - CY(t). \qquad (25)$$

Использование (1, 13, 15, 24) приводит к тому, что смещение фильтра (20) будет определяться уравнением

$$\dot{\tilde{\mu}}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) = F_0(t)\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t) + \tilde{\omega}(t) - K(t)\tilde{Y}(t)\tilde{\upsilon}(t), \qquad (26)$$

где

$$F_0(t) = \tilde{F}(t) - K(t)\tilde{Y}(t)H(t). \qquad (27)$$

Пусть $\bar{\Phi}(t,\sigma)$ – переходная матрица, соответствующая матрице $F_0(t)$, тогда решение (26) имеет вид

$$\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\bar{\Phi}(t,\tau_1+0)\,\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,\tau_1+0)+$$

$$+\int\limits_{\tau_1+0}^{t}\bar{\Phi}(t,\sigma)[\tilde{\omega}(\sigma)-K(\sigma)[\tilde{\upsilon}(t)-Cf_0(\sigma)]]\,d\sigma. \quad (28)$$

Так как $M\{\tilde{\upsilon}(t)\}=Cf_0(t)$, то

$$M\{\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\}=$$

$$=-\int\limits_{\tau_1+0}^{t}\bar{\Phi}(t,\sigma)\,K(\sigma)\,\tilde{Y}(\sigma)\,C\,f_0(\sigma)\,d\sigma. \quad (29)$$

Таким образом, из (29) для произвольных $K(\sigma)$ и $f_0(t)$ следует условие несмещенности оценки $\mu(t)$

$$\tilde{Y}(t)\,C=0\,. \quad (30)$$

Итак, получена задача нахождения оценки в классе линейных фильтров вида (26), где матрица $K(t)$ должна быть определена из условия оптимальности $\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$ в среднеквадратическом смысле, а матрицу $Y(t)$ можно найти из условия несмещенности.

Согласно [16] уравнение $\tilde{Y}(t)C=0$ с учетом (25) имеет решение вида

$$Y(t)=C^+ + A - ACC^+\,. \quad (31)$$

где A – произвольная $(r\times l)$-матрица. Так как по построению C является матрицей с линейно независимыми столбцами, то $C^+C=I_r$ [16]. Тогда из (31) следует условие, которому должна удовлетворять матрица $Y(t)$, обеспечивающая несмещенность оценки $\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$:

$$Y(t)C=I_r\,. \quad (32)$$

3. Критерий оптимальности

Найдем уравнение, которому удовлетворяет матрица

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=M\{\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\,\tilde{\mu}^{0^T}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\} \quad (33)$$

вторых моментов ошибки оценки $\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$. Из (27) с учетом пункта 2 постановки задачи

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\bar{\Phi}(t,\tau_1+0)\times$$

$$\times M\{\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N,\tau_1+0)\,\tilde{\mu}^{0^T}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,\tau_1+0)\}\times$$

$$\times\bar{\Phi}^T(t,\tau_1+0)+\int_{\tau_1+0}^{t}\int\bar{\Phi}(t,\sigma)\times$$

$$\times\begin{bmatrix}M\{\tilde{\omega}(\sigma)\,\tilde{\omega}^T(\xi)\}+\\ +K(\sigma)\,\tilde{Y}(\sigma)\,M\{\tilde{\upsilon}(\sigma)\tilde{\upsilon}^T(\xi)\}\,\tilde{Y}^T(\xi)\,K^T(\xi)\end{bmatrix}\times$$

$$\times\bar{\Phi}^T(t,\xi)\,d\sigma\,d\xi\,. \quad (34)$$

Непосредственные вычисления с использованием условия несмещенности $\tilde{Y}(t)C=0$ и свойств δ-функции Дирака дают, что

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=$$

$$=\bar{\Phi}(t,\tau_1+0)\,\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,\tau_1+0)\,\bar{\Phi}^T(t,\tau_1+0)+$$

$$+\int\limits_{\tau_1+0}^{t}\bar{\Phi}(t,\sigma)\,\bar{Q}(\sigma)\,\bar{\Phi}^T(t,\sigma)\,d\sigma, \quad (35)$$

где

$$\bar{Q}(\sigma)=\tilde{Q}(\sigma)+K(\sigma)\tilde{Y}(\sigma)\tilde{R}(\sigma)\tilde{Y}^T(\sigma)\,K^T(\sigma)\,.$$

Дифференцируя (35) по t, получаем

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=$$

$$=F_0(t)\,\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\,F_0^T(t)+$$

$$+K(t)\,\tilde{Y}(t)\,\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)\,K^T(t)+\tilde{Q}(t)\,. \quad (36)$$

Поскольку $\mu(t)$ – оценка фильтрации, а $\mu(\tau_k,t)$, $\tau_k=\overline{1;N}$ – оценка интерполяции, то как в байесовском случае [15] естественно решать совместную задачу синтеза оптимальности в среднеквадратическом смысле фильтра-интерполятора, взяв в качестве критерия оптимальности, согласно [17],

$$J=tr[\tilde{\Gamma}_{N+1}[\tilde{\tau}_N,t_1]], \quad (37)$$

где t_1 – некоторый будущий момент времени $\tau_1<t<t_1$.

4. Синтез фильтра

Таким образом, получили задачу: в классе фильтров (24) найти $((N+1)n\times l)$ – матрицу $K(t)$, доставляющую на траекториях $[(N+1)n]\times[(N+1)n]$-мерного матричного дифференциального уравнения (36) минимум функционалу (37) при выполнении условия несмещенности (32). Формально получили задачу оптимального управления с матричным состоянием $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$, матричным уравнением $K(t)$, фиксированным временем управления, фиксированным левым концом траектории, свободным правым концом траектории и оптимальным критерием качества. Для решения подобных задач используется матричный вариант принципа максимума Понтрягина, на основе которого в [17] был осуществлен синтез фильтра Калмана.

Теорема. Оптимальный в среднеквадратическом смысле несмещенный фильтр в классе линейных фильтров вида (24) определяется уравнениями:

$$\dot{\mu}(t)=F(t)\mu(t)+\tilde{K}_0(t)\tilde{z}(t), \quad (38)$$

$$\dot{\mu}(\tau_k,t)=\tilde{K}_k(t)\tilde{z}(t),\quad k=\overline{1;N}, \quad (39)$$

$$\dot{\Gamma}(t)=F(t)\Gamma(t)+\Gamma(t)F^T(t)+Q(t)-\tilde{K}_0(t)\tilde{H}_0(t), \quad (40)$$

$$\dot{\Gamma}_{kk}(\tau_k,t)=-\tilde{K}_k(t)\,\tilde{H}_k(t),\quad k=\overline{1;N}, \quad (41)$$

$$\dot{\Gamma}_{0k}(\tau_k,t)=F(t)\Gamma_{0k}(\tau_k,t)-\tilde{K}_0(t)\tilde{H}_k(t),\ k=\overline{1;N}, \quad (42)$$

$$\dot{\Gamma}_{kl}(\tau_l,\tau_k,t)=-\tilde{K}_k(t)\tilde{H}_l(t),$$

$$k=\overline{1;N-1},\ l=\overline{2;N},\ l>k, \quad (43)$$

где

$$\tilde{K}_0(t)=K_0(t)[I_l-CY(t)],$$

$$\tilde{K}_k(t)=K_k(t)[I_l-CY(t)]\,, \quad (44)$$

$$K_0(t)=\tilde{H}_0^T\tilde{R}^{-1}(t)\,,\quad K_k(t)=\tilde{H}_k^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\,, \quad (45)$$

$$Y(t)=[C^T\tilde{R}^{-1}(t)C]^{-1}C^T\tilde{R}^{-1}(t), \quad (46)$$

а $\tilde{z}(t)$, $\tilde{H}_k(t)$, $\tilde{H}_0(t)$, $\tilde{R}(t)$ определяются (9–12).

Доказательство.

В соответствии с матричным вариантом принципа максимума Понтрягина [17,18] функция Гамильтона $\mathbf{H}(t)=H[\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t),K(t),\Lambda(t)]$ согласно (36) определяется выражением

$$\mathbf{H}(t)=tr[F_0(t)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\Lambda^T(t)]+$$
$$+tr[\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)F_0^T(t)\Lambda^T(t)]+$$
$$+tr[K(t)\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)K^T(t)\Lambda^T(t)]+$$
$$+tr[\tilde{Q}(t)\Lambda^T(t)], \qquad (47)$$

где $\Lambda(t)$ – $((N+1)n\times(N+1)n)$ матрица сопряженных переменных, уравнение для которой и граничное условие имеют вид

$$\Lambda(t)=-\frac{\partial\,\mathbf{H}(t)}{\partial\,\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)},\quad \Lambda(t_1)=\frac{\partial\,J}{\partial\,\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_1)}. \qquad (48)$$

Непосредственные вычисления дают, что

$$\dot{\Lambda}(t)=-\Lambda(t)F_0(t)-F_0^T(t)\Lambda(t),\ \Lambda(t_1)=I^T_{[(N+1)n]}. \qquad (49)$$

Необходимое условие оптимальности $\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial K}=0$ с использованием (47, 27), симметричности $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$ и правил векторно-матричного дифференцирования [17] приводит к выражению

$$-\Lambda(t)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)-$$
$$-\Lambda^T(t)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)+$$
$$+\Lambda(t)K(t)\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)+$$
$$+\Lambda^T(t)K(t)\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)=0\ . \qquad (50)$$

Так как $\Lambda(t)$, удовлетворяющая краевой задаче (49), является симметричной положительно определенной матрицей [17, 18], то из (50) следует окончательный вид соотношения, которому удовлетворяет оптимальная матрица $K(t)$:

$$K(t)\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t). \qquad (51)$$

Решение уравнения (51) существует, если и только если, [16]

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)[\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)]^+\times$$
$$\times[\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)]=$$
$$=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t). \qquad (52)$$

Докажем справедливость (52). Так как $\tilde{R}(t)>0$ то $\tilde{R}(t)=L(t)L^T(t)$, где $L(t)$ – невырожденная нижняя треугольная матрица [19]. Обозначая левую часть (50) через $G(t)$, получаем

$$G(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)[D^T(t)D(t)]^+D^T(t)D(t),$$

где $D(t)=L^T(t)\tilde{Y}^T(t)$. Так как $[D^T(t)D(t)]^+D^T(t)=D^+(t)$ [16], то

$$G(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)\times$$
$$\times[L^T(t)\tilde{Y}^T(t)]^+[L^T(t)\tilde{Y}^T(t)]. \qquad (53)$$

Невырожденность матрицы $L^T(t)$ дает, что [16]

$$[L^T(t)\tilde{Y}^T(t)]^+[L^T(t)\tilde{Y}^T(t)]=[\tilde{Y}^T(t)]^+\tilde{Y}^T(t). \qquad (54)$$

Использование (54) в (53) с последующим применением теоремы о характеризации псевдообратной матрицы [16] дает $G(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)$ что доказывает справедливость (52). Тогда общее решение уравнения (41) имеет вид [16]

$$K(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)[\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)]^+-$$
$$-B(t)[\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)][\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)]^++B(t), \qquad (55)$$

где $B(t)$ – произвольная $((N+1)n\times l)$ матрица. Найдем матрицу $Y(t)$, которая удовлетворяет условию несмещенности (32) и приводит к выражению для $K(t)$, не зависящему от $B(t)$, для чего потребуем выполнения условия

$$C\,Y(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)=O. \qquad (56)$$

Умножая левую часть (56) слева на B^+, справа на $\tilde{R}^{-1}(t)C$, а затем учитывая (25), (32) и свойство матрицы с линейно независимыми столбцами $C^+C=I_r$ [16], получаем, что $I_r-Y(t)\tilde{R}(t)Y^T(t)C^T\tilde{R}(t)C=0$. Умножая левую часть последнего выражения справа на $[C^T\tilde{R}^{-1}(t)C]^{-1}$ и учитывая согласно (32), что $C^TY^T(t)=I_r$, получаем выражение $\{[C^T\tilde{R}^{-1}(t)C]^{-1}C^T-Y(t)\tilde{R}(t)\}Y^T(t)=O$, которое является уравнением для нахождения $Y(t)$. Тривиальное решение отбрасывается, как противоречащее (32), а второе решение приводит к (49). Использование (56) в (55) приводит общее решение уравнения (51) к виду

$$K(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)[\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)]^+-$$
$$-B(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)[\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)]^++B(t). \qquad (57)$$

Произвольную матрицу $B(t)$ выберем из условия

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)=B(t)\tilde{R}^{-1}(t). \qquad (58)$$

Использование (58) в (57) приводит к формуле

$$K(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{R}^{-1}(t). \qquad (59)$$

Поблочное расписывание (24), (36) с учетом (10, 11, 13, 14, 25, 27, 33, 59) приводит к (38–46). Тем самым все соотношения теоремы получены и доказательство завершается установлением того факта, что матрица передачи фильтра $\tilde{K}(t)=K(t)\tilde{Y}(t)$ не зависит от произвольной матрицы $B(t)$. Из (55) получаем

$$\tilde{K}(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)[\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)]^+\times$$
$$\times\tilde{Y}(t)-B(t)[\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)][\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)]^+\times$$
$$\times\tilde{Y}(t)+B(t)\tilde{Y}(t). \qquad (60)$$

Обозначим второе слагаемое в правой части (60) через $\Phi(t)$. Тогда, аналогично выводу (53), получаем $\Phi(t)=B(t)[\tilde{Y}(t)L(t)][\tilde{Y}(t)L(t)]^+\tilde{Y}(t)$. Поскольку $[\tilde{Y}(t)L(t)][\tilde{Y}(t)L(t)]^+=\tilde{Y}(t)\tilde{Y}^+(t)$ [16], то, используя теорему о характеризации псевдообратной матрицы [16], получаем, что $\Phi(t)=B(t)\tilde{Y}(t)$. Использование этой формулы в (60) дает

$$\tilde{K}(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{Y}^T(t)[\tilde{Y}(t)\tilde{R}(t)\tilde{Y}^T(t)]^+\tilde{Y}(t).$$

Что и требовалось доказать.

Заключение

Осуществлен синтез оптимального в среднеквадратическом смысле несмещенного фильтра для оценивания вектора состояния стохастической системы калмановского типа, когда наблюдения зависят не только от текущего, но и от произвольного числа прошлых значений вектора состояния, причем в канале наблюдения кроме регулярных действуют нестационарные аномальные помехи с неизвестным математическим ожиданием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalman R.E., Bycy R.S. New results in linear filtering and prediction theory // J. Basic Eng. – 1961. – V. 83. – P. 35–45.
2. Busy R.S., Joseph P.D. Filtering for stochastic process with application to guidance. – N.Y.: Interscience Publishers, 1968. – 195 p.
3. Богуславский А.Н. Методы навигации и управления по неполной статистической информации. – М.: Машиностроение, 1972. – 256 с.
4. Ривкин С.С. Метод оптимальной фильтрации Калмана и его применения в инерциальных навигационных системах. – Л.: Судостроение, 1974. – 155 с.
5. Крогман У. Фильтр Калмана, основная теория и возможности применения его в системах инерциальной навигации // Механика. – 1973. – № 5. – С. 17–31.
6. Малаховский Р.Ф., Соловьев Ю.А. Оптимальная обработка информации в комплексных навигационных системах самолетов и вертолетов // Зарубежная радиоэлектроника. – 1974. – № 3. – С. 18–53.
7. Сейдж Э., Мелс Д. Теория оценивания и ее применения в связи и управлении. – М.: Связь, 1976. – 496 с.
8. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и навигации. – М.: Радио и связь, 1992. – 303 с.
9. Кириченко А.А. и др. Оценивание вектора состояния динамической системы при наличии аномальных измерений // Зарубежная радиотехника. – 1981. – № 12. – С. 3–23.
10. Сотсков Б.М., Щербаков В.Ю. Теория и техника калмановской фильтрации при наличии мешающих параметров // Зарубежная радиотехника. – 1985. – № 2. – С. 3–29.
11. Basin M.V., Zuniga M.R. Optimal linear filtering over observation with multiple delays // Intern J. of Robust and Nonlinear Contr. – 2004. – V. 14. – № 8. – P. 685–696.
12. Basin M.V., Zuniga M.R., Rodriguez J.G. Optimal filtering for linear state delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2005. – V. AC-50. – № 5. – P. 684–690.
13. Wang Z., Ho D.W.C. Filtering on nonlinear time-delay stochastic systems // Automatic. – 2003. – V. 39. – № 1. – P. 101–109.
14. Демин Н.С., Рожкова О.В., Рожкова С.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
15. Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. II. Синтез фильтра // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 10. – С. 36–49.
16. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, – 1977. – 224 с.
17. Athans M., Tse E.A. A direct derivation of the Optimal linear filter using the maximum principle // IEEE Tranc. Autom. Control. – 1967. – V. AC-12. – № 6. – P. 690–898.
18. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978. – 551 с.
19. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

Поступила 13. 04. 2009 г.