

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бубенчиков А.М., Шербаков Н.Р. Математическое моделирование динамики нового вида зацепления в передаточных механизмах // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – № 5. – С. 241–243.
2. Пат. 2338105 РФ. МПК⁸ F16H 55/08. Зацепление колес с криволинейными зубьями (варианты) и планетарная передача на его основе / В.В. Становской, С.М. Казакивичюс, Т.А. Ремнёва,

В.М. Кузнецов. Заявлено 09.07.2007; опубликовано 10.11.2008, Бюл. № 31.

Поступила 24.02.2009.

Печатается в авторской редакции без учета мнений рецензентов

УДК 514.85

**КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ
ЗУБЧАТОЙ РЕЕЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ С ЗАЦЕПЛЕНИЕМ НОВОГО ВИДА**

Н.Р. Щербаков

Томский государственный университет
E-mail: nrs@math.tsu.ru

Построена математическая модель работы реечной передачи, преобразующей вращательное движение в поступательное и использующей эксцентриково-циклоидальное зацепление. Механизм состоит из червячного элемента, выполняющего роль генератора, и выходной детали (рейки), построенной на базе циклоиды. Предложенный новый вид зацепления обладает повышенными силовыми характеристиками и позволяет получать не высокие скорости перемещения рейки. Создана компьютерная программа, иллюстрирующая кинематически согласованное движение идеальных геометрических фигур – торцевых сечений работающего механизма и позволяющая находить необходимые для конструирования числовые характеристики, а так же находить оптимальные режимы функционирования рассматриваемых систем.

Ключевые слова:

Математическое моделирование, реечное зацепление, оптимизация.

Введение

Рассматриваемый передаточный механизм относится к зубчатым кинематическим парам, а более конкретно, к реечным передачам, преобразующим вращательное движение в поступательное и наоборот. Известные реечные передачи – цилиндрические, [1. С.381] червячные и др. имеют либо недостаточную нагрузочную способность, либо низкий КПД. Предлагаемый механизм имеет повышенную нагрузочную способность зацепления при тех же габаритах, а также возможность получения не высоких скоростей перемещения рейки независимо от габаритов вращающегося колеса (а зависящих только от углового шага рейки). Устройство может быть использовано вместо обычных реечных механизмов в линейных приводах станков, в устройствах рулевого управления автомобилей, а также в грузоподъемной технике (реечные домкраты и т. п.).

Геометрическая модель механизма

На рис. 1 изображён фрагмент реечной передачи в районе зацепления её составных элементов.

Передача состоит из колеса – винтового эксцентрика и зубчатой рейки. Идеальная поверхность винтового эксцентрика получается как геометрическое место точек окружности, центр которой перемещается по винтовой линии вокруг оси вращения колеса. Следовательно, в каждом сечении винтового эксцентрика, перпендикулярном его оси вращения, мы имеем окружность радиуса ρ , центр которой смещён относительно оси на эксцентриситет ε . В таком же сечении рейки получается эквидистанта трохоиды [2] (укороченной циклоиды), удалённая по нормальям к трохоиде на величину ρ . Таким образом, поверхность рейки получается смещением такой эквидистанты вдоль оси эксцентрика с одновременным смещением её в на-

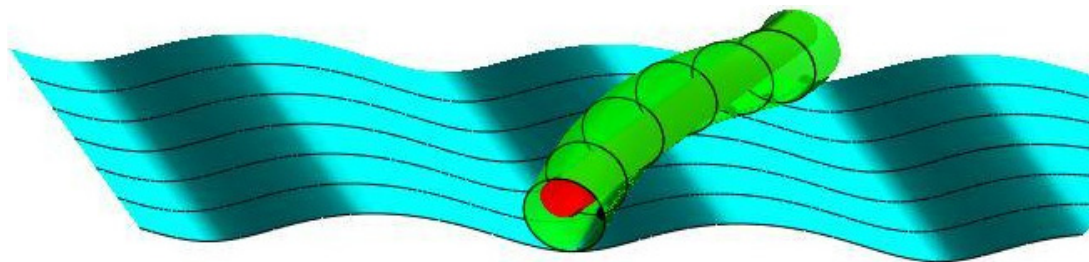


Рис. 1. Фрагмент реечной передачи в районе зацепления

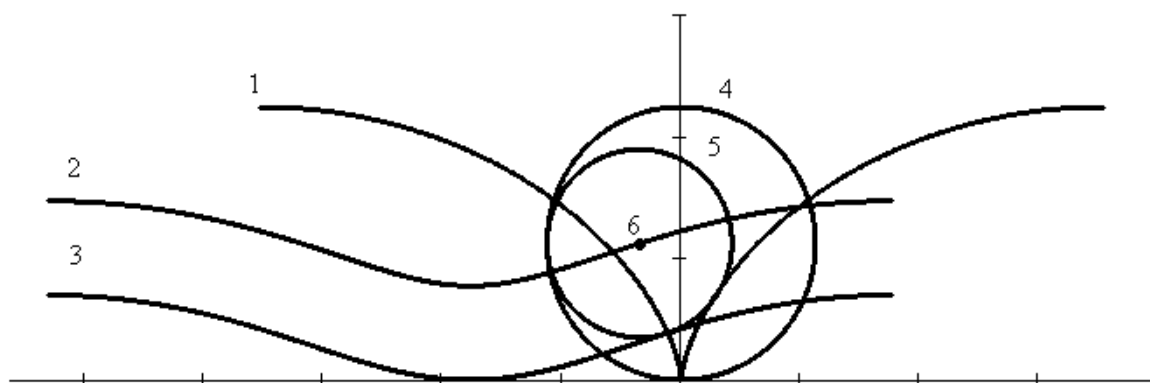


Рис. 2. Кривые, участвующие в построении поверхностей деталей

правлении, перпендикулярном этой оси. Для обеспечения непрерывного контакта червяка и рейки необходимо, чтобы при повороте окружности, образующей поверхность винтового эксцентрика, на угол β , эквидистанта сместилась на расстояние βr , где $r = \rho + \varepsilon$ – радиус окружности, образующей исходную циклоиду. Длина арки циклоиды («шаг» по длине) равна $2\pi r$.

На рис. 2 изображены кривые, участвующие в построении поверхностей деталей реечной передачи: 1 – циклоида, образованная при качении круга 4 радиуса r по оси OY ; 2 – трохоида, вычерчиваемая точкой 6, удалённой от центра круга 4 на ε ; 3 – эквидистанта трохоиды, удалённая от неё по нормальям на расстояние ρ ; 5 – плоское сечение винтового эксцентрика с центром в точке 6. Кривые 2, 3, 5 изображены в сечении, отвечающим значению $\beta = 90^\circ$.

Параметрические уравнения трохоиды 2 имеют вид [2]:

$$\begin{cases} x(\tau) = -\varepsilon \cos \tau + r, \\ y(\tau) = -\varepsilon \sin \tau + r\tau. \end{cases}$$

Параметрические уравнения эквидистанты трохоиды 3 имеют вид:

$$\begin{cases} X(\tau) = x(\tau) + \rho n_1(\tau), \\ Y(\tau) = y(\tau) + \rho n_2(\tau), \end{cases}$$

где $n_1(\tau)$, $n_2(\tau)$ – координаты единичного вектора нормали в точке трохоиды. Если ось OZ параллельна оси винтового эксцентрика, то поверхность рейки может быть задана в виде:

$$\begin{cases} X_r(\tau, \beta) = X(\tau), \\ Y_r(\tau, \beta) = Y(\tau) - \beta r, \\ Z_r(\tau, \beta) = \frac{l\beta}{2\pi}, \end{cases} \quad (1)$$

где l – задаваемая ширина рейки, $\beta = 0, \dots, 2\pi$, $\tau = 0, \dots, 2\pi m$ (m – задаваемое число циклов – арок циклоиды). Проекция в плоскость XOY центров сечений винтового эксцентрика в начальный момент времени имеют координаты:

$$\begin{aligned} x_c(\beta) &= -\varepsilon \cos \beta + r, \\ y_c(\beta) &= -\varepsilon \sin \beta, \end{aligned}$$

а поверхность эксцентрика имеет параметрические уравнения:

$$\begin{cases} X_c(\alpha, \beta) = x_c(\beta) + \rho \cos \alpha, \\ Y_c(\alpha, \beta) = y_c(\beta) + \rho \sin \alpha, \\ Z_c(\alpha, \beta) = \frac{l\beta}{2\pi}. \end{cases} \quad (2)$$

Математическое моделирование работы механизма

Математическая модель работы механизма позволяет проиллюстрировать кинематически согласованное движение геометрических фигур, составляющих контактирующие детали передачи. Другими словами, должна быть получена возможность изображать в каждый момент времени (т. е. для каждого угла поворота винтового эксцентрика) взаимное расположение этих деталей в зацеплении. Для этого нужно иметь уравнения семейств поверхностей (1) и (2), причём параметром этих семейств является угол поворота колеса – винтового эксцентрика. Уравнения таких семейств легко получаются, если повороту эксцентрика вокруг своей оси на угол Δ будет соответствовать сдвиг рейки на величину $(-r\Delta)$.

Нахождение линии контакта

Как видно из схемы построения поверхностей (1) и (2) (см. рис. 2), профиль винтового эксцентрика в любом торцовом сечении представлен эксцентрично смещённой окружностью 5, а профиль рейки – смещённой эквидистантой 3. Окружность 5 в любом торцовом сечении имеет точку касания с соответствующей эквидистантой. Рассмотрим n торцевых сечений, получающихся при повороте окружности 5 на углы

$$\beta_k = \frac{2\pi(k-1)}{n}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Координаты точки контакта окружности 5 с эквидистантой 3 находятся как сумма радиус-вектора центра 6 окружности 5 с вектором, направленным по нормали к этой окружности в точке контакта и имеющим длину ρ . Для нахождения этой нормали нет необходимости прибегать к дифференцированию – достаточно применить свойство циклоиды: нормаль в произвольной её точке проходит через полюс (нижняя точка катящегося круга, образующего циклоиду [2. С. 241]. В данной конструкции полюс неподвижен и находится в начале координат, а искомая нормаль идёт по направлению радиус вектора точки 6. Учитывая это, нетрудно найти значение параметра на соответствующей эквидистанте, при котором получается точка контакта:

$$\tau_k(\Delta) = \Delta + \beta_k. \quad (4)$$

Линия контакта строится с помощью встроенной в пакет MathCad функции интерполяции массива точек контакта, соответствующих близким торцевым сечениям. Полученная при этом вектор-функция $K\beta(\beta)$ точек линии контакта даёт возможность дифференцирования с помощью символьного процессора пакета MathCad с целью нахождения кривизны в каждой точке этой линии в любой момент времени. Эта кривизна оказывается не постоянной, т. е. линия контакта не является винтовой.

При всех достоинствах предлагаемое реечное зацепление достаточно сложно в изготовлении, требует наличия многокоординатных станков с ЧПУ. Эта же идея зацепления может быть реализована в другом варианте, более простом в изготовлении. Обратимся к схеме образования винтового профиля эксцентрика, изображенного на рис. 1. Если этот профиль получать не непрерывным поворотом и смещением эксцентричной окружности относительно оси вращения, а разделить эти два движения, то получим ступенчатый профиль, образованный отдельными, повернутыми друг относительно друга одинаковыми венцами 3, 3', 3'', 3''' (см. рис. 3).

Каждый венец 3 образован цилиндром с эксцентрично смещенной окружностью в сечении. Соседние венцы 3, 3'... повернуты друг относительно друга на угол, равный угловому шагу колеса 1, деленному на число венцов n , а венец с номером $k=1, \dots, n$ повернут по отношению к первому на угол β_k , определённый формулой (3).

На рис. 3 угловой шаг составляет 360° , число венцов равно 6. Следовательно, соседние венцы 3 будут повернуты друг относительно друга на 60 градусов. Изготавливать такой ступенчатый профиль колеса можно либо из отдельных венцов, жестко скрепляемых вместе, либо выполняя колесо со ступенчатой линией контакта.

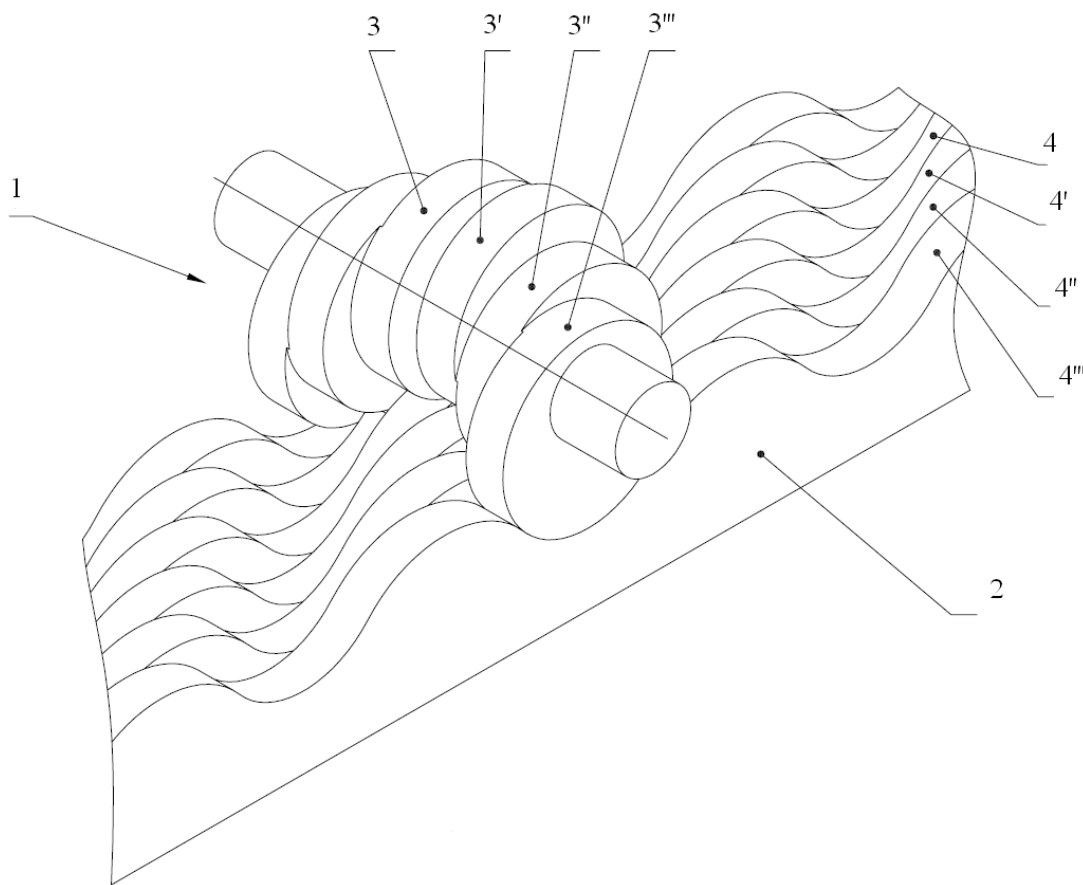


Рис. 3. Зацепление с составными венцами

пенчатый профилем в виде единой детали, наподобие коленчатого вала. Аналогично строится и составной зубчатый профиль рейки 2, только отдельные венцы 4, 4', 4'', 4''', ... сдвинуты друг относительно друга вдоль рейки на расстояние, равное шагу рейки, деленному на число венцов. В общем случае про венцы составного колеса и составной рейки можно сказать, что они смещены друг относительно друга по фазе, и смещение равно шагу соответствующего венца, деленному на число венцов. Каждая пара венцов 3 и 4 колеса 1 и рейки 2 контактируют по прямой линии, и общая линия контакта профилей представляет собой кусочно-непрерывную ломаную кривую. Следует отметить, что, увеличивая число венцов в зацеплении, мы будем приближаться к первому варианту зацепления с косыми винтовыми зубьями. В свою очередь, зацепление с косыми зубьями можно рассматривать как зацепление ступенчатых профилей, где число венцов бесконечно велико, а смещение по фазе между соседними венцами бесконечно мало. Учитывая это, дальнейшие расчёты достаточно провести для варианта зацепления с n составными венцами.

Радиусы кривизны и расчёт усилий в точках контакта

Для нахождения контактных напряжений в точках соприкосновения составных венцов колеса 1 и рейки 2 необходимо знать радиус кривизны той линии G_k на рейке, которая получается торцевым сечением, соответствующим углу поворота β_k , в точке касания этой линии с окружностью этого же торцевого сечения венца колеса 1. Эта линия является результатом смещения исходной линии G_1 на величину $(-r(\beta_k + \Delta))$, где Δ – угол поворота генератора. Радиусы кривизны вычисляются по обычной формуле

$$R(k, \Delta) = \frac{(X'(\tau_k(\Delta))^2 + Y'(\tau_k(\Delta))^2)^{\frac{3}{2}}}{X'(\tau_k(\Delta))Y''(\tau_k(\Delta)) - X''(\tau_k(\Delta))Y'(\tau_k(\Delta))},$$

где $X(\tau_k(\Delta))$, $Y(\tau_k(\Delta))$ – координаты точки контакта на линии D_k .

Формула для расчёта усилий в точках контакта при угле поворота колеса Δ имеет вид:

$$F(i, \Delta) = \frac{M \sin(\gamma(i, \Delta))}{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sqrt{(X(\tau_i(\Delta)) - r)^2 + Y(\tau_i(\Delta))^2} \sin^2(\gamma(i, \Delta))}, \quad (5)$$

где M – входной момент на колесе, а $\gamma(i, \Delta)$ – угол между радиус-вектором точки контакта и общей нормалью к касающимся кривым (окружность и эквидистанта). Суммирование ведётся по половине всех номеров торцевых сечений, соответствующих «рабочим» венцам колеса 1 (испытывающим силовую нагрузку). Номера «рабочих» венцов зависят от Δ и определяются с помощью специальной подпрограммы.

Выходное усилие и расчёт потерь мощности на трение

При определении силового воздействия со стороны колеса по формуле (5) выходное усилие (тангенциальное воздействие на рейку) может быть определено следующим образом:

$$P_{\text{вых}} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (F(i, \Delta), e).$$

Здесь вектор $F(i, \Delta)$ направлен по общим нормалью к касающимся кривым, e – единичный вектор, направленный вдоль рейки.

Следуя принципу Лагранжа, при статистическом нагружении системы мы должны иметь

$$M\omega_0 = P_{\text{вых}} v_{\text{рей}}, \quad (6)$$

где M – входной момент, а ω_0 и $v_{\text{рей}}$ – пока ещё виртуальные (которые, конечно же, могут совпадать с парой реальных) угловая скорость колеса и скорость поступательного перемещения рейки. В динамических же условиях, т. е. при наличии в системе движения, соотношение (6), следуя принципу Даламбера-Лагранжа, можно обобщить следующим образом:

$$M\omega_0 = P_{\text{вых}} v_{\text{рей}},$$

где $Q_{\text{тр}}$ – потери входной мощности на трение.

Величину потерь входной мощности на трение определяем следующим образом:

$$Q_{\text{тр}} = k \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} F(i, \Delta)(\Delta v, t).$$

Здесь k – коэффициент трения, t – единичный вектор касательной в точке контакта, $\Delta v = v_1 - v_{\text{рей}}$, $v_1 = r_k \cdot \omega_0$, r_k – радиус-вектор точки контакта относительно оси вращения винтового эксцентрика, $v_{\text{рей}}$ – вектор скорости перемещения рейки.

Оптимизация параметров

Принципиальная схема нахождения оптимальных параметров линейчатой передачи сводится к следующему. Численно моделируется движение элементов системы в реальном времени, а именно, в каждый момент времени определяются новые положения поверхностей взаимодействия и новые совокупности точек контакта, новые усилия в местах контакта и локальные значения потерь входной мощности на трение. Перемещение по времени заканчивается с завершением полного цикла движения системы. Такой расчёт составляет первичный вариант для данного зацепления. Последовательными расчётами строится система базовых вариантов, позволяющая получить поверхность КПД и контактного напряжения. После чего проводится оптимизация по схеме, предложенной для редуктора с эксцентриково-циклоидальное зацеплением [3].

Таким образом, построена математическая модель нового вида зубчатого зацепления с криволинейными зубьями, обладающего высоким передаточным отношением при минимальных габарит-

ных размерах. На основании этой модели создана компьютерная программа, иллюстрирующая кинематически согласованное движение идеальных геометрических фигур – торцевых сечений работающего механизма и позволяющая находить необходимые для конструирования числовые характеристики, а так же находить оптимальные значения параметров передачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. – М.: Машиностроение, 1987. – 451 с.
2. Савёлов А.А. Плоские кривые. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 294 с.
3. Щербаков Н.Р. Оптимизация параметров нового зацепления колёс с криволинейными зубьями // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – № 5. – С. 244–246.

Построенная математическая модель использовалась при конструировании разработки, на которую подана заявка на изобретение RU 2008115365 «Реечное зацепление для линейного привода (варианты)», авторы Становской В.В., Казакивичюс С.М., Ремнева Т.А., Кузнецов В.М., Бубенчиков А.М., Щербаков Н.Р. (решение о выдаче патента от 24.12.2008).

Поступила 24.02.2009.

*Печатается в авторской редакции
без учета мнений рецензентов*