УДК 519.872

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ММР|М|1|ИПВ В УСЛОВИИ ПРЕДЕЛЬНО РЕДКИХ ИЗМЕНЕНИЙ СОСТОЯНИЙ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

А.А. Назаров, А.Е. Горбатенко

Томский государственный университет
E-mail: anngo86@mail.ru

В качестве математической модели сети связи рассмотрена система массового обслуживания ММР|М|1|ИПВ. Для нахождения распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов предложен метод асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока.

Ключевые слова:
Асимптотический анализ, ММР-поток, условие предельно редких изменений, состояния входящего потока.
Key words:
The asymptotic analysis, Markov Modulate Poisson Process, the condition of limit rare changes of arrival process state.

Введение

В связи с быстрым развитием информационных технологий эффективность работы многих компаний зависит от доступности и актуальности информации. Сети связи обеспечивают возможность оперативно получать, обрабатывать и передавать необходимую информацию. Стохастический характер функционирования таких сетей и сложность структуры передаваемой информации приводит к невозможности построения детерминированных математических моделей. Поэтому актуальной является задача построения адекватных стохастических моделей сетей связи случайного доступа и методов их исследования.

Исследованию математических моделей сетей связи посвящено достаточное количество работ, выполненных как отечественными, так и зарубежными учеными. Некоторые из них были рассмотрены в работах [1–5].

Математическая модель сети случайного доступа

Математическую модель сети случайного доступа определим в виде однолинейной системы массового обслуживания ММР|М|1|ИПВ (рис. 1), на вход которой поступает ММР-поток заявок из внешнего источника. Если общий ресурс сети (обслуживающий прибор) свободен, то заявка успешно обслуживается и покидает систему. Если прибор занят, то поступившая заявка уходит в источник повторных вызовов (ИПВ), после случайной задержки в котором заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

В качестве входящего потока рассмотрим ММР-поток (Markov Modulate Poisson Process), который относят к классу специальных потоков. В отличие от классических моделей случайных потоков (пуассоновского и рекуррентного) математические модели специальных потоков (к которым относят MMP, MAP, BMAP, COX и SM потоки) [6–8] более адекватно представляют телекоммуникационные потоки реальных данных.

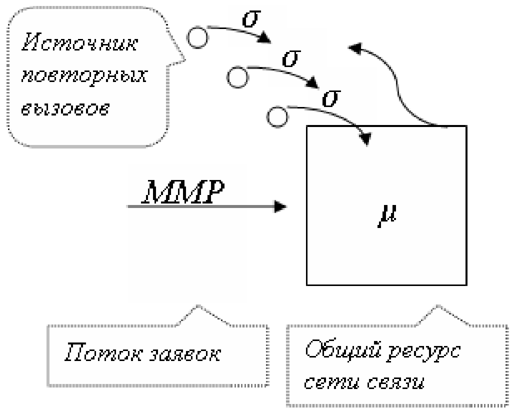

Рис. 1. *Математическая модель сети случайного доступа. μ, σ – параметры продолжительности обслуживания заявки и ее задержки ИВП*

Чтобы определить ММР-поток, введем сначала определение случайного потока однородных событий.

Последовательность $t_0<t_1<t_2<...$ моментов наступления рассматриваемых событий называется случайным потоком однородных событий или точечным случайным процессом [9].

Случайный поток однородных событий будем представлять в виде случайного процесса $m(t)$ – числа событий потока, наступивших за время t или на интервале времени $[0,t)$.

Пусть задана эргодическая цепь Маркова $n(t)$, определяемая матрицей инфинитезимальных характеристик $Q^{(1)}$ с элементами $q^{(1)}_{n_1n_2}$, а также набор неотрицательных чисел $\lambda_n\geq0$.

Случайный поток однородных событий будем называть марковским модулированным пуассоновским потоком (ММР-потоком) [10], управляемым цепью Маркова $n(t)$, если выполнены следующие условия:

$$P\{m(t+\Delta t)=m+1\,|\,m(t)=m,n(t)=n_1\}=$$
$$=\lambda_{n_1}\Delta t+o(\Delta t),$$
$$P\{m(t+\Delta t)>m+1\,|\,m(t)=m,n(t)=n_1\}=o(\Delta t).$$

Состояниями ММР-потока будем называть состояния его управляющей цепи Маркова $n(t)$.

Продолжительность обслуживания заявки является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром μ. Если во время обслуживания заявки поступает другая заявка, то поступившая заявка отправляется в ИПВ, не искажая обслуживающуюся заявку. Продолжительность задержки заявки в ИПВ случайная и имеет экспоненциальное распределение с параметром σ, одинаковым для всех заявок [11].

Постановка задачи

Задача исследования системы сводится к нахождению распределения вероятностей состояний канала и числа заявок в ИПВ.

Обозначим $i(t)$ – число заявок в источнике повторных вызовов и $k(t)$ – состояние обслуживающего прибора [11], которое определяется следующим равенством:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ прибор свободен}\\ 1, \text{ прибор занят}\end{cases}.$$

Процесс $\{k(t),n(t),i(t)\}$ является трехмерной цепью Маркова с распределением вероятностей

$$P(k,i,n,t)=P\{k(t)=k,i(t)=i,n(t)=n\}.$$

Применив формулу полной вероятности, получим:

$$\begin{cases}P(0,n,i,t+\Delta t)=\\ =P(0,n,i,t)(1-\lambda_n\Delta t)(1-i\sigma\Delta t)(1+q_{nn}^{(1)}\Delta t)+\\ +P(1,n,i,t)\mu\Delta t+\sum\limits_{\nu\neq n}P(0,\nu,i,t)q_{\nu n}^{(1)}\Delta t+o(\Delta t),\\ P(1,n,i,t+\Delta t)=\\ =P(1,n,i,t)(1-\lambda_n\Delta t)(1-\mu\Delta t)(1+q_{nn}^{(1)}\Delta t)+\\ +P(0,n,i+1,t)(i+1)\sigma\Delta t+\\ +\{P(1,n,i-1,t)+P(0,n,i,t)\}\lambda_n\Delta t+\\ +\sum\limits_{\nu\neq n}P(1,\nu,i,t)q_{\nu n}^{(1)}\Delta t+o(\Delta t).\end{cases}\quad(1)$$

Выполнив несложные преобразования, получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(0,n,i,t)}{\partial t}=\\ =-(\lambda_n+i\sigma)P(0,n,i,t)+\\ +\mu P(1,n,i,t)+\sum\limits_{\nu}P(0,\nu,i,t)q_{\nu n}^{(1)},\\ \dfrac{\partial P(1,n,i,t)}{\partial t}=-(\mu+\lambda_n)P(1,n,i,t)+\\ +\lambda_n\{P(1,n,i-1,t)+P(0,n,i,t)\}+\\ +(i+1)\sigma P(0,n,i+1,t)+\sum\limits_{\nu}P(1,\nu,i,t)q_{\nu n}^{(1)}.\end{cases}\quad(2)$$

Для стационарного распределения вероятностей $P(k,i,n)$ из (2) можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}-(\lambda_n+i\sigma)P(0,n,i)+\mu P(1,n,i)+\\ +\sum\limits_{\nu}P(0,\nu,i)q_{\nu n}^{(1)}=0,\\ -(\mu+\lambda_n)P(1,n,i)+\lambda_n\{P(1,n,i-1)+P(0,n,i)\}+\\ +(i+1)\sigma P(0,n,i+1)+\sum\limits_{\nu}P(1,\nu,i)q_{\nu n}^{(1)}=0.\end{cases}\quad(3)$$

Обозначим

$$H(k,n,u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(k,n,i),\quad(4)$$

где $j=\sqrt{-1}$.

Функции $H(k,n,u)$ будем называть функциями, аналогичными характеристическим.

Домножив обе части уравнений системы (3) на e^{jui} и просуммировав по всем i, получим:

$$\begin{cases}-j\sigma\dfrac{\partial H(0,n,u)}{\partial u}=-\lambda_n H(0,n,u)+\\ +\mu H(1,n,u)+\sum\limits_{\nu}H(0,\nu,u)q_{\nu n}^{(1)},\\ j\sigma e^{-ju}\dfrac{\partial H(0,n,u)}{\partial u}=(\lambda_n(e^{ju}-1)-\mu)H(1,n,u)+\\ +\lambda_n H(0,n,u)+\sum\limits_{\nu}H(1,\nu,u)q_{\nu n}^{(1)}.\end{cases}\quad(5)$$

Значения инфинитезимальных характеристик $-q_{nn}^{(1)}$ определяют времена пребывания ММР-потока в n-х состояниях.

Исследование системы дифференциальных уравнений (5) выполним методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего ММР-потока [11].

Метод асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего ММР-потока

Пусть δ – некоторый малый положительный параметр.

Условием предельно редких изменений состояний входящего ММР-потока будем называть равенства

$$q_{n_1n_2}^{(1)}=\delta q_{n_1n_2},\quad(6)$$

определяющие достаточно малые значения инфинитезимальных характеристик, что влечёт достаточно редкие изменения состояний потока [11, 12].

С учетом (6) система (5) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases}-j\sigma\dfrac{\partial H(0,n,u,\delta)}{\partial u}=-\lambda_n H(0,n,u,\delta)+\\ +\mu H(1,n,u,\delta)+\delta\sum\limits_{\nu}H(0,\nu,u,\delta)q_{\nu n},\\ j\sigma e^{-ju}\dfrac{\partial H(0,n,u,\delta)}{\partial u}=(\lambda_n(e^{ju}-1)-\mu)H(1,n,u,\delta)+\\ +\lambda_n H(0,n,u,\delta)+\delta\sum\limits_{\nu}H(1,\nu,u,\delta)q_{\nu n}.\end{cases}\quad(7)$$

В соответствии с теоремой Пуанкаре [13] об аналитической зависимости решения от малого параметра можно утверждать, что существует предел

$$\lim_{\delta \to 0} H(k,n,u,\delta) = F(k,n,u), \;\; k = 0,1.$$

В системе (7) выполним предельный переход при δ>0; для функций $F(k,n,u)$ получим следующие равенства:

$$\begin{cases} -j\sigma \dfrac{\partial F(0,n,u)}{\partial u} = -\lambda_n F(0,n,u) + \mu F(1,n,u), \\ j\sigma e^{-ju} \dfrac{\partial F(0,n,u)}{\partial u} = \\ = (\lambda_n (e^{ju} - 1) - \mu) F(1,n,u) + \lambda_n F(0,n,u). \end{cases} \qquad (8)$$

Домножив первое уравнение системы (8) на e^{-ju} и сложив его со вторым, получим:

$$-\lambda_n e^{-ju} F(0,n,u) + \mu e^{-ju} F(1,n,u) +$$
$$+ (\lambda_n (e^{ju} - 1) - \mu) F(1,n,u) + \lambda_n F(0,n,u) = 0,$$

приведя подобные, получим:

$$-\lambda_n F(0,n,u) + (\lambda_n e^{ju} - \mu) F(1,n,u) = 0.$$

Из полученного равенства с помощью несложных преобразований выразим функцию $F(1,n,u)$ через функцию $F(0,n,u)$:

$$F(1,n,u) = \frac{\lambda_n}{\mu - \lambda_n e^{ju}} F(0,n,u). \qquad (9)$$

Подставив (9) в первое уравнение системы (8), получим совокупность (не систему) дифференциальных уравнений:

$$-j\sigma \frac{\partial F(0,n,u)}{\partial u} = \left(-\lambda_n + \frac{\mu \lambda_n}{\mu - e^{ju} \lambda_n} \right) F(0,n,u),$$

решения которых имеют следующий вид:

$$F(0,n,u) = \frac{C_n}{(\mu - \lambda_n e^{ju})^{\frac{\lambda_n}{\sigma}}}, \qquad (10)$$

$$F(1,n,u) = \frac{\lambda_n \cdot C_n}{(\mu - \lambda_n e^{ju})^{\frac{\lambda_n}{\sigma}+1}}. \qquad (11)$$

Константы C_n можно найти из начальных условий:

$$F(0,n,u) + F(1,n,u) = R(n),$$

где $R(n)$ – стационарные вероятности значений цепи Маркова $n(t)$, определяемые однородной системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu} R(\nu) q_{\nu n} = 0$$

и условием нормировки

$$\sum_{n} R(n) = 1.$$

Константы C_n определяются из выражения:

$$C_n = R(n) \frac{(\mu - \lambda_n)^{\frac{\lambda_n}{\sigma}+1}}{\mu}, \qquad (12)$$

С учетом (12) из (10) и (11) получим:

$$F(0,n,u) = R(n) \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu} \right) \left(\frac{\mu - \lambda_n}{\mu - \lambda_n e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda_n}{\sigma}}, \qquad (13)$$

$$F(1,n,u) = R(n) \frac{\lambda_n}{\mu} \left(\frac{\mu - \lambda_n}{\mu - \lambda_n e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda_n}{\sigma}+1}. \qquad (14)$$

Для достаточно малых δ выполняется приближенное (асимптотическое) равенство:

$$H(k,n,u) = H(k,n,u,\delta) \approx F(k,n,u). \qquad (15)$$

Просуммировав (15) по всем n и k получим функцию

$$H(u) = \sum_n \sum_k H(k,n,u) \approx \sum_n \sum_k F(k,n,u). \qquad (16)$$

С помощью обратного преобразования Фурье и асимптотических равенств (15) и (16) найдем вид распределения вероятностей числа заявок в ИПВ:

$$P(i) = \sum_n \sum_k P(k,n,i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} H(u) du \approx$$
$$\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} \sum_n \sum_k F(k,n,u)\, du.$$

С учетом формул (13) и (14) асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в ИПВ имеет следующий вид:

$$P(i) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_n (1 - \rho_n) R(n) \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} \left(\frac{1 - \rho_n}{1 - \rho_n e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda_n}{\sigma}} (1 + \rho_n (1 - e^{ju})) du, \qquad (17)$$

где $\rho_n = \dfrac{\lambda_n}{\mu}$.

На рис. 2 представлен график распределения вероятностей числа заявок в ИПВ, найденное по формуле (17), при следующих значениях матрицы инфинитезимальных характеристик Q, величин λ_n, параметров μ и σ:

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 1,5;\ \lambda_3 = 2;\ \ \mu = 3;\ \sigma = 0,03.$$

Полученное асимптотическое распределение является многомодальным, что имеет принципиальное значение при численных реализациях.

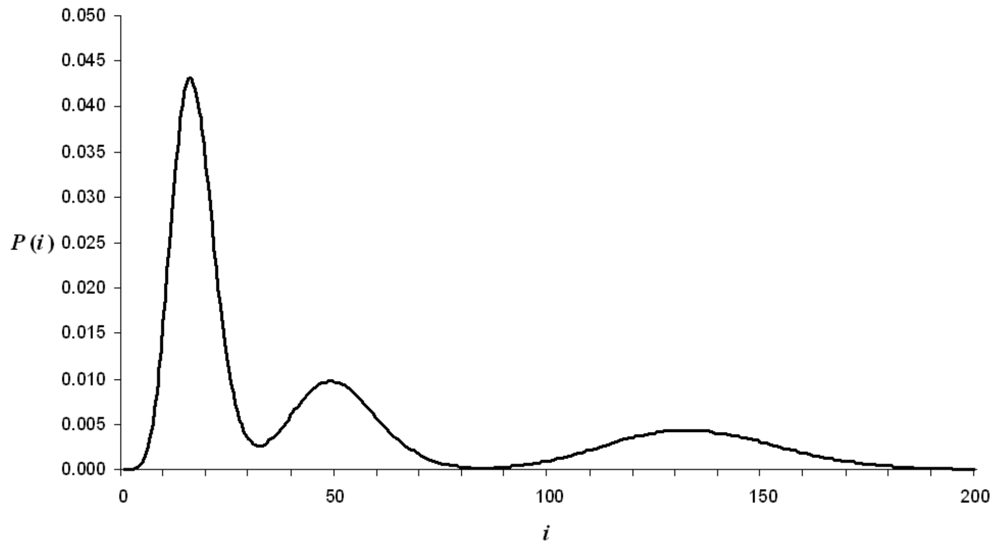

Рис. 2. *График распределения вероятностей числа заявок в ИПВ*

Выводы

Рассмотрена математическая модель сети случайного доступа, представленная в виде системы массового обслуживания MMP|M|1|ИПВ. С помощью метода асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего MMP-потока найдено распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов, которое является многомодальным. Это имеет принципиальное значение при численных реализациях, т. к. условием останова является достижение определенного достаточно малого значения вероятности, которое может достигаться в окрестности первого локального минимума.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» Федерального агентства по образованию по проекту «Разработка методов исследования немарковских СМО их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочаров П.П., Шлумпер Л.О. Система массового обслуживания MAP/G/1/r с фоновыми заявками // Информационные процессы. – 2005. – Т. 5. – № 5. – С. 367–369.
2. Бочаров П.П. Система MAP/Г/1/r в условиях большого коэффициента вариации времени обслуживания // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 11. – С. 89–98.
3. Dudin A.N., Klimenok V.I., Kim C.S., Lee M.H. The SM/PH/N queuing system with broadcasting service // Proc. of the 13th Intern. Conf. on analytical and stochastic modeling techniques and applications. – Bonn, Germany, 2006. – P. 8–13.
4. Artalejo J.R., Joshua V.C., Krashnamoorthy A. An M|G|1 retrial queue with orbital research by the server // Stochastic Analysis and Applications. – 2005. – V. 23. – P. 975–997.
5. Назаров А.А., Цой С.А. Общий подход к исследованию Марковских моделей сетей передачи данных, управляемых статическими протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 2. – С. 90–105.
6. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1955. – V. 51. – № 3. – P. 433–441.
7. Neuts M.F. A versatile Markovian arrival process // Journal of Appl. Prob. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
8. Лопухова С.В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Томский гос. ун-т. – Томск, 2008. – 167 с.
9. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.
10. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2007. – 336 с.
11. Назаров А.А., Моисеева А.А. Метод асимптотический анализ в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
12. Горбатенко А.Е. Исследование системы MMP|M|∞ в условиях предельно редких изменений состояния входящего потока // Научное творчество молодежи: Матер. XI Всеросс. научно-практ. конф. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – Ч. 1. – С. 14–17.
13. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Поступила 20.10.2009 г.