имеет конечное число решений относительно $h_{a_1}^{a_2}$ на S_m. Следовательно справедлива

Теорема 2.2. В случае p=4, q=2 в 4-плоскости $\widetilde{L}_4^1$ в каждой точке $A\in S_m\subset E_n$ ($m\geq4$) имеется конечное число плоскостей L_2^1 таких, что соответствующее отображение $f:L_2^1\to P_2^1$ является отображением f_a в смысле определения 2.1 в [1].

Замечание 2.2. Соотношения (2.12) с учетом $\Pi_4\neq0$, см. (2.13), обеспечивают канонизацию ортонормального репера R m-поверхности $S_m\subset E_n$, при которой плоскость $L_2^1=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2)\perp L_2^2=(\overline{A},\overline{e}_3,\overline{e}_4)$ удовлетворяет утверждению теоремы 2.2. При такой канонизации репера R, как следует из (2.12) и [1, (1.5)] с учетом $\Pi_4\neq0$, 1-формы $\omega_{a_1}^{a_2}$ становятся главными в каждой точке $A\in S_m\subset E_n$. Поэтому эта канонизация репера R существует в силу леммы Н.М. Остиану [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышева В.К., Ивлев Е.Т. Отображение двумерных площадок касательного и нормального расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 2. – С. 6–8.
2. Ивлев Е.Т. Об одной классификации оснащенных многомерных поверхностей проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Выпуск 22. – Межвуз. темат. сб. научных трудов, Калининградский университет, Калининград, 1991. – С. 49–56.
3. Ивлев Е.Т., Тыртый-оол, Бразевич М.В. О некоторых геометрических образах многообразия пар двойственных линейных подпространств в многомерном проективном пространстве // Математический сборник. Выпуск 1. Изд-во Томского университета. Томск. – 1974. – С. 68–91.
4. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.

УДК 514.76

КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: eam@front.ru

Изучается одномерное семейство двумерных плоскостей в эквиаффинном пространстве. Всем элементам построенного канонического репера даётся полная аналитическая и геометрическая интерпретация. Кроме того, в статье найдено инвариантное оснащение данного семейства. Все рассмотрения носят локальный характер.

Основные обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–6], а все функции, встречающиеся в данной статье, предполагаются аналитическими.

Рассмотрим пятимерное эквиаффинное пространство A_5, отнесенное к эквиаффинному подвижному реперу $R=\{\overline{A},\overline{e}_i\}$, $(i=\overline{1,5})$ с деривационными формулами:

$$d\overline{A}=\omega^i\overline{e}_i,\quad d\overline{e}_i=\omega_i^j\overline{e}_j,\tag{1}$$

где ω^i, ω_i^j – формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства

$$D\omega^i=\omega^i\wedge\omega_i^j,\ D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k,\ (i,j,k=\overline{1,5}),\tag{2}$$

и соотношению $\omega_1^1+\omega_2^2+...+\omega_5^5=0$, вытекающему из условия эквиаффинности $(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3,\overline{e}_4,\overline{e}_5)=1$.

В пространстве A_5 рассматривается одномерное семейство S_1 двумерных плоскостей l_2. Присоединим к S_1 репер R так, что $l_2=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2)$. Здесь и в дальнейшем символом $l_s=(\overline{A},\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_s)$ обозначается s-плоскость (s-мерная плоскость), проходящая через точку A, параллельно линейно независимым векторам $\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_s$. Тогда дифференциальные уравнения многообразия S_1 можно записать в следующем параметрическом виде:

$$\omega^{\hat\alpha}=A_1^{\hat\alpha}\theta^1,\ \omega_\alpha^{\hat\alpha}=A_{\alpha1}^{\hat\alpha}\theta^1,\ (\alpha=1,\ 2\ ;\ \hat\alpha=\overline{3,\ 5}).\tag{3}$$

где величины $A_1^{\hat\alpha}$ и $A_{\alpha1}^{\hat\alpha}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered}dA_1^{\hat\alpha}-A_1^{\hat\alpha}\theta_1^1-A_{\alpha1}^{\hat\alpha}\omega^\alpha+A_1^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^{\hat\alpha}=B_{11}^{\hat\alpha}\theta^1,\\ dA_{\alpha1}^{\hat\alpha}-A_{\alpha1}^{\hat\alpha}\theta_1^1-A_{\beta1}^{\hat\alpha}\omega_\alpha^\beta+A_{\alpha1}^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^{\hat\alpha}=B_{\alpha11}^{\hat\alpha}\theta^1,\\ (\hat\alpha,\hat\beta=\overline{3,5}\ ;\ \alpha,\beta=1,2).\end{gathered}\tag{4}$$

Кроме того, параметрическая форма θ^1 удовлетворяет квадратичному дифференциальному уравнению

$$D\theta^1=\theta_1^1\wedge\theta^1.\tag{5}$$

Каждой точке $B(u^i)$ в A_5 поставим в соответствие гиперплоскость l_4, проходящую через $l_2=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2)$:

$$l_4:x^3x_3+x^4x_4+x^5x_5=0.\tag{6}$$

Используя (1, 2) и (4), получаем $d[\overline{e}_1,\overline{e}_2]=$ $=(\omega_1^1+\omega_2^2)\cdot[\overline{e}_1,\overline{e}_2]+(A_{11}^{\hat\alpha}[\overline{e}_{\hat\alpha},\overline{e}_2]+A_{21}^{\hat\alpha}[\overline{e}_1,\overline{e}_{\hat\alpha}])\cdot\theta^1$. Следовательно, гиперплоскость (6) проходит через l_2 параллельно бивектору $[\overline{e}_1,\overline{e}_2]'$, смежному бивектору $[\overline{e}_1,\overline{e}_2]$ вдоль S_1, если выполняются условия

$$\begin{cases} x_3 A_{11}^3 + x_4 A_{11}^4 + x_5 A_{11}^5 = 0, \\ x_3 A_{21}^3 + x_4 A_{21}^4 + x_5 A_{21}^5 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Проведём канонизацию аффинного репера R в A_5, при которой

$$A_{11}^5 = 0,\ A_{21}^5 = 0,\ A^* = \begin{vmatrix} A_{11}^3 & A_{11}^4 \\ A_{21}^3 & A_{21}^4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \omega_1^5 = 0,\ \omega_2^5 = 0. \tag{8}$$

Канонизация (8) приводит с учётом (2–5) к дифференциальным уравнениям

$$\omega_3^5 = A_{31}^5\theta^1,\ \omega_4^5 = A_{41}^5\theta^1,$$
$$dA_{31}^5 - A_{31}^5\theta_1^1 - A_{31}^5\omega_3^3 - A_{41}^5\omega_3^4 + A_{31}^5\omega_5^5 = B_{311}^5\theta^1,$$
$$dA_{41}^5 - A_{41}^5\theta_1^1 - A_{31}^5\omega_4^3 - A_{41}^5\omega_4^4 + A_{41}^5\omega_5^5 = B_{411}^5\theta^1$$

и характеризуется тем, что

$$l_4 = (\overline{A},\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_2, \overline{e}_3,\ \overline{e}_4) \Leftrightarrow x^5 = 0. \tag{9}$$

При этом из рассмотрения исключается случай $A^*=0$, когда гиперплоскость l_4 либо вовсе не существует (система (7) несовместна), либо таких гиперплоскостей имеется бесчисленное множество, пересекающихся по некоторой 3-плоскости, проходящей через l_2.

В плоскости l_2 рассмотрим точку Y с радиус-вектором $\overline{Y}=\overline{A}+y^1\overline{e}_1+y^2\overline{e}_2$ и вектор $\overline{x}=x^1\overline{e}_1+x^2\overline{e}_2$. Будем иметь с учётом (1), (4) и (8)

$$d\overline{x} = (\cdots)^\alpha \overline{e}_\alpha + (x^1 A_{11}^3 + x^2 A_{21}^3)\theta^1\overline{e}_3 + (x^1 A_{11}^4 + x^2 A_{21}^4)\theta^1\overline{e}_4,$$
$$d\overline{Y} = (\cdots)^\alpha \overline{e}_\alpha + (A_1^3 + y^1 A_{11}^3 + y^2 A_{21}^3)\theta^1\overline{e}_3 +$$
$$+(A_1^4 + y^1 A_{11}^4 + x^2 A_{21}^4)\theta^1\overline{e}_4 + A_1^5\theta^1\overline{e}_5.$$

Следовательно, каждому вектору $\overline{x}\,\|\,l_2$ отвечает 3-плоскость

$$l_3(\overline{x}) = (\overline{A}, \overline{e}_1, \overline{e}_2,\ (x^1 A_{11}^3 + x^2 A_{21}^3)\overline{e}_3 + (x^1 A_{11}^4 + x^2 A_{21}^4)\overline{e}_4),$$

которая проходит через l_2 параллельно вектору $\overline{x}'$, смежному вектору $\overline{x}$ вдоль S_1, а каждой точке $Y \in l_2$ соответствует 3-плоскость

$$L_3(Y) = (\overline{A}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, A_1^5\overline{e}_5 + (A_1^3 + y^1 A_{11}^3 + y^2 A_{21}^3)\overline{e}_3 +$$
$$+ (A_1^4 + y^1 A_{11}^4 + y^2 A_{21}^4)\overline{e}_4),$$

проходящая через l_2 и $(l_2)'$, смежную l_2 вдоль S_1.

Проведём следующую канонизацию репера R:

$$\begin{gathered} A_{11}^3 = 1,\ A_{21}^4 = 1,\ A_1^5 = 1,\ A_{11}^4 = 0,\ A_{21}^3 = 0,\ A_1^3 = 0,\ A_1^4 = 0 \Leftrightarrow \\ \omega^3 = 0, \omega^4 = 0, \omega^5 = \theta^1, \omega_1^3 = \theta^1\ \omega_2^3 = 0, \omega_1^4 = 0, \omega_2^4 = \theta^1,\ A^* = 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Для удобства вычислений будем считать теперь $\theta^1=\omega^5$. Тогда с учётом (8) и (10) имеем $D\omega^5=\omega^5\wedge\omega_5^5$.

Канонизация (10) приводит к следующим дифференциальным уравнениям

$$\omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_5^5 = B_1^1\omega^5, \omega_1^2 - \omega_3^4 = B_1^2\omega^5, \omega^1 - \omega_5^3 = B^1\omega^5,$$
$$\omega_2^2 - \omega_4^4 + \omega_5^5 = B_2^2\omega^5, \omega_2^1 - \omega_4^3 = B_2^1\omega^5, \omega^2 - \omega_5^4 = B^2\omega^5,$$
$$dB^1 - B^1\omega_5^5 + B^1\omega_1^1 + B^2\omega_2^1 - B_1^1\omega_5^3 - B_2^1\omega_5^4 - 2\omega_5^1 = C_1^1\omega^5,$$
$$dB^2 - B^2\omega_5^5 + B^1\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 - B_1^2\omega_5^3 - B_2^2\omega_5^4 - 2\omega_5^2 = C_1^2\omega^5,$$

$$\begin{gathered} dB_1^1 - B_1^1\omega_5^5 + B_1^2\omega_2^1 + B_2^1\omega_3^4 + 2A_{31}^5\omega_5^3 + A_{41}^5\omega_5^4 - 2\omega_3^1 = C_{11}^1\omega^5, \\ dB_2^2 - B_2^2\omega_5^5 - B_1^2\omega_4^3 + B_2^1\omega_1^2 + A_{31}^5\omega_5^3 + 2A_{41}^5\omega_5^4 - 2\omega_4^2 = C_{21}^2\omega^5, \\ dB_2^1 - B_2^1\omega_5^5 + B_2^1(\omega_4^4 - \omega_3^3) - (B_1^1 - B_2^2)\omega_2^1 + A_{41}^5\omega_5^3 - 2\omega_4^1 = C_{21}^1\omega^5, \\ dB_1^2 - B_1^2\omega_5^5 + B_1^2(\omega_4^4 - \omega_3^3) + (B_1^1 - B_2^2)\omega_1^2 + A_{31}^5\omega_5^4 - 2\omega_3^2 = C_{11}^2\omega^5 \end{gathered} \tag{11}$$

и характеризуется тем, что

$$\begin{gathered} \overline{x} \mapsto l_3(\overline{x}) = (\overline{A},\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ x^1\overline{e}_3 + x^2\overline{e}_4), \\ Y \mapsto L_3(Y) = (\overline{A},\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ y^1\overline{e}_3 + y^2\overline{e}_4 + \overline{e}_5). \end{gathered} \tag{12}$$

Если точка X с радиус-вектором $\overline{X}=\overline{A}+x^1\overline{e}_1+x^2\overline{e}_2+x^3\overline{e}_3+x^4\overline{e}_4 \in l_4$ описывает характеристический элемент гиперплоскости (9), то из условия $(d\overline{X},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3,\overline{e}_4)=0$ в силу (1), (4), (8) и (11) получаем уравнения характеристики $\mathrm{ch}(l_4)$: $1+x^3A_{31}^5+x^4A_{41}^5=0, x^5=0$.

Проведём следующую канонизацию аффинного репера R:

$$A_{31}^5 = 0,\ A_{41}^5 = 1 \Leftrightarrow \omega_3^5 = 0,\ \omega_4^5 = \omega^5. \tag{13}$$

Эта канонизация (13) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\omega_3^4 = A_{31}^4\omega^5, \omega_1^2 = A_{11}^2\omega^5, \omega_4^4 = A_{41}^4\omega^5,$$
$$dA_{31}^4 - A_{31}^4(\omega_5^5 + \omega_3^3) - \omega_3^2 = B_{311}^4\omega^5,$$
$$dA_{11}^2 - A_{11}^2(\omega_5^5 - \omega_2^2 + \omega_1^1) + \omega_3^2 = B_{111}^2\omega^5,$$
$$dA_{41}^4 - A_{41}^4\omega_5^5 - A_{31}^4\omega_4^3 - \omega_4^2 + \omega_5^4 = B_{411}^4\omega^5$$

и характеризуется тем, что 3-плоскость $l_3^*=(\overline{A}-\overline{e}_4,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$ является характеристическим элементом гиперплоскости (9) вдоль S_1. При этом из рассмотрения исключается случай $A_{31}^5=0$, $A_{41}^5=0$, когда l_4 и $(l_4)'$, смежная к l_4 вдоль S_1, параллельны или, когда l_3 несобственная. Кроме того, плоскость $l_3^{123}=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$ геометрически характеризуется тем, что она проходит через l_2 параллельно l_3^*. Заметим, что вектор $\overline{e}_1$ геометрически характеризуется тем, что ему отвечает, согласно (12), 3-плоскость $l_3^{123}=l_3(\overline{e}_1)$.

Пусть точка X с радиус-вектором $\overline{X}=\overline{A}+x^1\overline{e}_1+x^2\overline{e}_2+x^3\overline{e}_3-\overline{e}_4$ описывает характеристику 3-плоскости l_3^* вдоль S_1. Тогда x^1, x^2, x^3 удовлетворяют уравнениям

$$x^2 + A_{31}^4 x^3 - A_{41}^4 = 0, x^4 = 1, x^5 = 0.$$

Проведём канонизацию репера R:

$$A_{31}^4 = 0,\ A_{41}^4 = 0 \Leftrightarrow \omega_3^4 = 0,\ \omega_4^4 = 0, \tag{14}$$

которая приводит к дифференциальным уравнениям

$$\omega_3^2 = A_{31}^2\omega^5, \omega_4^2 - \omega^2 = B_4^2\omega^5,$$
$$dA_{31}^2 + A_{31}^2(\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_5^5) - A_{11}^2\omega_3^1 = B_{311}^2\omega^5,$$
$$dB_4^2 - B_4^2\omega_5^5 + B_4^2\omega_2^2 - A_{11}^2(\omega^1 - \omega_4^1) + A_{31}^2\omega_4^3 = B_{41}^2\omega^5.$$

Замечаем, что при канонизации (14) $l_2^*=(\overline{A}-\overline{e}_4,\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ является характеристикой 3-плоскости l_3^* вдоль S_1.

Обычным образом получаем уравнения характеристики $\mathrm{ch}(l_2^*)$ плоскости l_2^* вдоль S_1:

$$-B_4^2 + x^1 A_{11}^2 + x^3 A_{31}^2 = 0, x^2 = 0, x^4 = 1, x^5 = 0.$$

Проведём такую канонизацию репера R, при которой

$$A_{31}^2 = 0,\ B_4^2 = 0,\ A_{11}^2 = 1 \Leftrightarrow \omega_3^2 = 0, \omega_1^2 = \omega^5, \omega_4^2 - \omega^2 = 0. \tag{15}$$

Тогда

$$\omega_3^1 = A_{31}^1\omega^5, \omega_4^1 - \omega^1 = B_4^1\omega^5, \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_5^5 = B^*\omega^5,$$
$$dA_{31}^1 + A_{31}^1(\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_5^5) = B_{311}^1\omega^5,$$
$$dB_4^1 + B_4^1(\omega_1^1 - \omega_5^5) - A_{31}^1\omega_4^3 = B_{41}^1\omega^5,$$
$$dB^* - \omega_5^5 + 2\omega_2^1 + \omega_3^1 - \omega_4^2 - \omega_5^4 = B_1^*\omega^5.$$

Получаем, что при канонизации (15) характеристикой плоскости l_2^* вдоль S_1 является прямая

$$l_1 = (\overline{A} - \overline{e}_4,\ \overline{e}_3). \tag{16}$$

При этом из рассмотрения исключается случай $A_{31}^2=0$, $B_4^2=0$, $A_{11}^2=0$, когда плоскости l_2^* и смежная к ней $(l_2^*)'$ вдоль S_1 параллельны. Заметим, что вектор $\overline{e}_3$ параллелен прямой (16).

Пусть точка E_4^* с радиус-вектором $\overline{E}_4^*=\overline{A}-\overline{e}_4+x^3\overline{e}_3$ является характеристической точкой прямой (16) вдоль S_1, тогда $x^3A_{31}^1-B_4^1=0$, $x^1=x^2=x^5=0$, $x^4=1$.

Проведём следующую канонизацию репера R:

$$B_4^1 = 0, A_{31}^1 \neq 0 \Leftrightarrow \omega_4^1 - \omega^1 = 0. \tag{17}$$

Канонизация (17) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\omega_2^1 = A_{21}^1\omega^5, \omega_4^3 = A_{41}^3\omega^5, dA_{41}^3 + A_{41}^3(\omega_3^3 - \omega_5^5) = B_{411}^3\omega^5,$$
$$dA_{21}^1 + A_{21}^1(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_5^5) + \omega_4^1 = B_{211}^1\omega^5$$

и характеризуется тем, что

$$\overline{E}_4^* = \overline{A} - \overline{e}_4.$$

При этом из рассмотрения исключается случай $B_4^1=0$, $A_{31}^1=0$, когда прямая l_1 параллельна своей смежной $(l_1^*)'$ вдоль S_1. Заметим также, что 3-плоскость $l_3^4=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_4)$ проходит через точку E_4^* и плоскость l_2. Легко видеть, что вектор $\overline{e}_2$ является направляющим вектором прямой $g1=\mathrm{ch}(l_3^4)=(\overline{A}-A_{41}^3\overline{e}_1-\overline{e}_4,\overline{e}_2)$. Вектор $\overline{e}_1$ параллелен прямой $l_1^1=l_3^4\cap l_2=(\overline{A},\overline{e}_1)$.

Рассмотрим 2-плоскость l_2^{24}, проходящую через точку E_4^* параллельно вектору $\overline{e}_2$ и касательной к индикатрисе $(\overline{e}_2)$. Имеем $d\overline{e}_2=(A_{21}^1\overline{e}_1+\overline{e}_4)\omega^5+\omega_2^2\overline{e}_2$, следовательно, $l_2^{24}=(\overline{A}-\overline{e}_4,\overline{e}_2,A_{21}^1\overline{e}_1+\overline{e}_4)$.

Проведём такую канонизацию аффинного репера R, при которой

$$A_{21}^1 = 0 \Leftrightarrow \omega_2^1 = 0. \tag{18}$$

Канонизация (18) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\omega_4^1 = \omega^1 = A_{41}^1\omega^5, \omega_5^3 = A_{51}^3\omega^5,$$
$$dA_{41}^1 + A_{41}^1(\omega_1^1 - \omega_5^5) + \omega_5^1 = B_{411}^1\omega^5,$$
$$dA_{51}^3 + A_{51}^3(\omega_3^3 - 2\omega_5^5) - A_{41}^3\omega_5^4 - \omega_5^1 = B_{511}^3\omega^5$$

и характеризуется тем, что $l_2^{24}=(\overline{A},\overline{e}_2,\overline{e}_4)$. Кроме того, каждой точке Y_2 с радиус-вектором $\overline{Y}_2=\overline{A}+y^2\overline{e}_2$ прямой $l_1^2=l_2^{24}\cap l_2=(\overline{A},\overline{e}_2)$ отвечает в соответствии с (12) 3-плоскость $L_3(Y_2)=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2,y^2\overline{e}_4+\overline{e}_5)$. Заметим, что все плоскости $L_3(Y_2)$ принадлежат одной гиперплоскости $l_4^1=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_4,\overline{e}_5)$.

Рассмотрим теперь прямую l_1^2 и близкую к ней $(l_1^2)'$ вдоль S_1. Они будут принадлежать некоторой гиперплоскости $x^1x_1+x^3x_3+x^4x_4+x^5x_5=0$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $x_4=0$, $x_1A_1^1+x_5=0$. Следовательно, все такие гиперплоскости пересекаются по 3-плоскости $l_3^{245}=(\overline{A},\overline{e}_2,\overline{e}_4,A_1^1\overline{e}_1+\overline{e}_5)$.

Обычным путём находим, что плоскость $H_3=(\overline{A},\overline{e}_2,\overline{e}_4-A_{41}^3\overline{e}_1,\overline{e}_5-A_{51}^3\overline{e}_1)$ является характеристикой гиперплоскости l_4^1 вдоль S_1.

Проведём следующую канонизацию репера R:

$$A_{41}^1 = 0, A_{51}^3 = 0, A_{41}^3 \neq 0 \Leftrightarrow \omega_4^1 = \omega^1 = 0, \omega_5^3 = 0. \tag{19}$$

Канонизация (19) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\omega_5^1 = A_{51}^1\omega^5, \omega_5^4 = A_{51}^4\omega^5, \omega^2 = \omega_4^2 = A_1^2\omega^5,$$
$$dA_{51}^1 + A_{51}^1(\omega_1^1 - 2\omega_5^5) = B_{511}^1\omega^5,$$
$$dA_1^2 + A_1^2(\omega_2^2 - \omega_5^5) + \omega_5^2 = B_{11}^2\omega^5,$$
$$dA_{51}^4 - 2A_{51}^4\omega_5^5 - \omega_5^2 = B_{511}^4\omega^5.$$

Теперь имеем $l_3^{245}=(\overline{A},\overline{e}_2,\overline{e}_4,\overline{e}_5)$, $H_3=(\overline{A},\overline{e}_2,\overline{e}_4-A_{41}^3\overline{e}_1,\overline{e}_5)$. При этом из рассмотрения исключается случай $A_{41}^3=0$, когда $l_3^{245}=H_3$. Заметим, что $l_3^{245}\cap H_3=(\overline{A},\overline{e}_2,\overline{e}_5)=l_2^{25}$. Следовательно, 3-плоскость $l_3^{125}=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_5)$ проходит через плоскость l_2^{25} параллельно вектору $\overline{e}_1$. Точка A характеризуется тем, что ей отвечает в силу (14) 3-плоскость $l_3^{125}=L_3(0)$. Из $d\overline{A}=(A_1^2\overline{e}_2+\overline{e}_5)\omega^5$ следует, что прямая $l_1^5=(\overline{A},A_1^2\overline{e}_2+\overline{e}_5)$ является касательной к линии $\overline{A}$, описываемой точкой A вдоль S_1.

Проведём заключительную канонизацию репера R

$$A_1^2 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = 0, \omega_4^2 = 0.$$

Из этой канонизации следуют дифференциальные уравнения $\omega_5^2=A_{51}^2\omega^5$, $dA_{51}^2-2A_{51}^2\omega_5^5=B_{511}^2\omega^5$. Теперь геометрически определена прямая $l_1^5=(\overline{A},\overline{e}_5)$. Заметим, что 3-плоскость $l_3^{134}=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_3,\overline{e}_4)$ проходит через точку A и 2-плоскость $l_2^*=(\overline{A}-\overline{e}_4,\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ и $l_1^4=l_2^{24}\cap l_3^{134}=l_3^{125}=(\overline{A},\overline{e}_4)$.

Таким образом, все прямые $l_3^i=(\overline{A},\overline{e}_i)$, $(i=\overline{1,5})$, проходящие через точку A параллельно соответствующим векторам $\overline{e}_i$, геометрически определены.

Репер R 1-семейства S_1 плоскостей l_2 в A_5 полностью канонизирован и его деривационные формулы, по аналогии с [6. С. 23], запишутся в виде:

$$\frac{d\overline{A}}{ds} = \overline{e}_5, \frac{d\overline{e}_1}{ds} = A_{11}^1\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3, \frac{d\overline{e}_2}{ds} = A_{21}^2\overline{e}_2 + \overline{e}_4,$$
$$\frac{d\overline{e}_3}{ds} = A_{31}^1\overline{e}_1 + A_{31}^3\overline{e}_3, \frac{d\overline{e}_4}{ds} = A_{41}^3\overline{e}_3 + \overline{e}_5, \tag{20}$$
$$\frac{d\overline{e}_5}{ds} = A_{51}^1\overline{e}_1 + A_{51}^2\overline{e}_2 + A_{51}^4\overline{e}_4 - (A_{11}^1 + A_{21}^2 + A_{31}^1)\overline{e}_5,$$

где $\omega^5=ds$ является дифференциальным инвариантом. Независимыми являются следующие 8 инвариантов: A_{11}^1, A_{21}^2, A_{31}^1, A_{31}^3, $A_{41}^3\neq0$, A_{51}^1, A_{51}^2, A_{51}^4, поэтому 1-семейство S_1 плоскостей l_2 в A_5 определяется с произволом 8 функций одного аргумента.

Рассмотрим на прямой $l_1^2=(\overline{A},\overline{e}_2)$ точку T с радиус-вектором $\overline{T}=\overline{A}+t\overline{e}_2$. Вектор $\overline{e}_{45}=t\overline{e}_4+\overline{e}_5)$ параллелен прямой пересечения плоскости $l_2^{45}=(\overline{A},\overline{e}_4,\overline{e}_5)=l_1^4\cup l_1^5$ с линейным подпространством $(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3,T(\overline{T}))=$ $=l_1^1\cup l_1^2\cup l_1^3\cup T(\overline{T})$. Здесь $T(\overline{T})$ означает касательную к линии $(\overline{T})$, описываемой точкой T вдоль S_1. Вектору $\overline{e}_{24}=\lambda\overline{e}_2+\overline{e}_4$ соответствует вектор $\overline{e}'_{45}=\lambda\overline{e}_4+\overline{e}_5$, являющийся направляющим вектором прямой пересечения плоскости l_2^{45} с линейным подпространством $(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,T(\bar{e}_{24}))=l_1^1\cup l_1^2\cup l_1^3\cup T(\bar{e}_{24})$. Здесь $T(\bar{e}_{24})$ означает касательную к индикатрисе $(\bar{e}_{24})$ вектора $\bar{e}_{24}$. Векторы $\bar{e}'_{45}$ и $\bar{e}_{45}$ параллельны тогда и только тогда, когда $\lambda=t$. Таким образом, точке T отвечают вектор $\bar{e}_{45}$ и вектор $\bar{e}_{24}=t\bar{e}_2+\bar{e}_4$. Заметим, что точка E_4 с радиус-вектором $\bar{E}_4=\bar{A}+\bar{e}_4$ симметрична точке E_4^* относительно точки A на прямой $l_1^4=(\bar{A},\bar{e}_4)$. Поэтому точка K^{24} с радиус-вектором $\bar{K}^{24}=\bar{A}+t\bar{e}_2+\bar{e}_4$ есть проекция точки E_4 на прямую $g=(\bar{A},t\bar{e}_2+\bar{e}_4)$ в направлении вектора $\bar{e}_2$. Рассмотрим теперь плоскость $l_2^{23}=(\bar{A},\bar{e}_2,\bar{e}_3)=l_1^2\cup l_1^3$. Вектор $\bar{e}_{23}=\bar{e}_2+\bar{e}_3$ параллелен пересечению плоскости l_2^{23} с линейным подпространством $(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_4,\bar{e}_5,T(\bar{e}_1))= =l_1^1\cup l_1^4\cup l_1^5\cup T(\bar{e}_1)$. Замечаем, что прямая $h=(\bar{A},\bar{e}_2+\bar{e}_3)$ проходит через точку A параллельно вектору $\bar{e}_{23}$. Поэтому точка K^{23} с радиус-вектором $\bar{K}^{23}=\bar{A}+t(\bar{e}_2+\bar{e}_3)$ есть проекция точки T на прямую h в направлении вектора $\bar{e}_3$. Точка K^3 с радиус-вектором $\bar{K}^3=\bar{A}+t\bar{e}_3$ есть проекция точки K^{23} на прямую $l_1^3=(\bar{A},\bar{e}_3)$ в направлении вектора $\bar{e}_2$. Точка K^{45} с радиус-вектором $\bar{K}^{45}=\bar{A}+\frac{1}{t}(t\bar{e}_4+\bar{e}_5)$ плоскости l_2^{45} есть проекция точки E_4 на прямую $f=(\bar{A},t\bar{e}_4+\bar{e}_5)$ в направлении вектора $\bar{e}_5$. Поэтому точка K^5 с радиус-вектором $\bar{K}^5=\bar{A}+\frac{1}{t}(\bar{e}_5)$ есть проекция точки K^{45} на прямую l_1^5 в направлении вектора $\bar{e}_4$. На прямой $l_1^1=(\bar{A},\bar{e}_1)$ рассмотрим точку K^1 с радиус-вектором $\bar{K}^1=\bar{A}+\mu\bar{e}_1$ и выберем её так, чтобы

$$(\overline{KA^1},\overline{AT},\overline{AK^3},\overline{AE_4^1},\overline{AK^5})=1,$$

т.е. при $\mu=1/t$. Тогда вектор $\bar{e}_{35}=\frac{1}{t}\bar{e}_3+\bar{e}_5$ является направляющим вектором прямой пересечения плоскости $l_2^{35}=(\bar{A},\bar{e}_3,\bar{e}_5)$ с линейным подпространством $(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_4,T(\bar{K}^1))=l_1^1\cup l_1^2\cup l_1^4\cup T(\bar{K}^1)$. Замечаем, что точка K с радиус-вектором $\bar{K}=\bar{A}+t^2(\frac{1}{t}\bar{e}_3+\bar{e}_5)$ есть проекция точки K^3 на прямую $q=(\bar{A},\bar{e}_{35})$ в направлении вектора $\bar{e}_5$. Поэтому точка K_5^* с радиус-вектором $\bar{K}_5^*=\bar{A}+t^2\bar{e}_5$ есть проекция точки K на прямую l_1^5 в направлении вектора $\bar{e}_3$. Точки K^5 и K_5^* совпадают тогда и только тогда, когда $(t)^3=1\Rightarrow t=1$. Поэтому при $t=1$ получается геометрическая характеристика единичных точек $\bar{E}_i=\bar{A}+\bar{e}_i$, $(i=\overline{1,5})$, на прямых l_1^i. Кроме того, дифференциальный инвариант ds геометрически характеризуется так (по аналогии с [6. С. 28–30]):

$$ds=120V_0,$$

где V_0 – главная часть объёма $V=(\overline{AE_1},\overline{AE_2},\overline{AE_3},\overline{AE_4},\overline{AE_5})$.

Таким образом, все элементы канонического репера $R=\{\bar{A},\bar{e}_i\}$ многообразия S_1 в A_5, в том числе нормировка векторов $\bar{e}_i$ и дифференциальный инвариант ds, геометрически определены. Геометрическая характеристика инвариантов в деривационных формулах (20) A_{11}^1, A_{21}^2, A_{31}^1, A_{31}^3, $A_{41}^3\neq0$, A_{51}^1, A_{51}^2, A_{51}^4 будет предметом особого рассмотрения.

Замечание. Из геометрической интерпретации элементов канонического репера многообразия S_1 плоскостей $l_2=(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ следует, что 3-плоскость $l_3=(\bar{A},\bar{e}_3,\bar{e}_4,\bar{e}_5)=l_1^3\cup l_1^4\cup l_1^5$. является оснащающей плоскостью к S_1 в точке A в смысле [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кругляков Л.З. Основы проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1980. – 111 с.
2. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r// Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
3. Остиану Н.М. Об инвариантном оснащении семейств многомерных плоскостей в проективном пространстве. Труды геометрического семинара. – М. ВИНИТИ АН СССР, 1969. – Т. 2. – С. 247-262.
4. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. – М.: Иностранная литература, 1954. – Т. 1. – 461 с.
5. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
6. Щербаков Р.Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1960. – 194 с.