

9. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Иностранная литература, 1963. — 829 с.
10. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. — М.: Советское радио, 1974. — 720 с.
11. Ihara S. Capacity of mismatched gaussian channels with and without feedback // Probab. Theory Relat. Fields. — 1990. — V. 84. — № 4. — С. 453—471.
12. Липцер Р.Ш. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского марковского сигнала по каналу с шумной обратной связью // Проблемы передачи информации. — 1974. — Т. 10. — № 4. — С. 3—15.
13. Arimoto S. Information-theoretical considerations on estimation problem // Inform. Control. — 1971. — V. 19. — № 2. — P. 181—194.
14. Tomita Y., Ohmatsu S., Soeda T. An application of the information theory to estimation problems // Information and Control. — 1976. — V. 32. — № 2. — P. 101—111.
15. Демин Н.С., Короткевич В.И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент марковских процессов // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 7. — С. 87—96.
16. Демин Н.С., Короткевич В.И. Об уравнениях для шенноновского количества информации при передаче марковских диффузионных сигналов по каналам с памятью // Проблемы передачи информации. — 1987. — Т. 23. — № 1. — С. 16—27.
17. Каллианпур Г. Стохастическая теория фильтрации. — М.: Наука, 1987. — 318 с.
18. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974. — 696 с.
19. Розовский Б.Л. О формуле Ито-Вентцеля // Вестник МГУ. Серия матем. механ. — 1973. — № 1. — С. 26—32.
20. Ocne D., Pardoux E. A generalized Ito-Ventzel formula // Ann. Inst. Henri Poincare. — 1989. — V. 25. — № 1. — P. 39—71.

УДК 532.58

СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ МЕДЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИпсоИДА

И.В. Дудин, Р.К. Нариманов

Томский государственный университет

E-mail: rin@ftf.tsu.ru

На основе применения преобразования простого растяжения-сжатия указана методика распространения решений задач, связанных с течением несжимаемой вязкой жидкости в присутствии сферы, на варианты, когда сфера заменяется трехосным эллипсоидом. Решена задача о медленном обтекании эллипсоида, указана простая расчетная формула для его сопротивления. Показано удовлетворительное совпадение с литературными данными, соответствующими предельным случаям.

Введение

Некоторые задачи, связанные с интегрированием уравнений Навье-Стокса

$$\nabla \frac{\vec{v}}{2} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = -Eu \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \text{rot rot } \vec{v}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

или их упрощений, в случаях присутствия твердого или жидкого объекта в виде сферы единичного радиуса успешно решены путем использования функции тока

$$\psi = \frac{1}{2} \sigma^2 f(\sigma) \sin^2 \theta, \quad (2)$$

$$\vec{\sigma} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k} = \sigma [\vec{i} \cos \theta + \sin \theta (\vec{j} \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi)].$$

При этом от функции $f(\sigma)$ требуется, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\text{rot rot rot } \vec{v} = \text{rot rot rot rot } (\psi \nabla \varphi) = 0, \quad (3)$$

что в общем случае влечет за собой представление

$$f(\sigma) = c_1 + c_2 \sigma^{-1} + c_3 \sigma^{-3} + c_4 \sigma^2. \quad (4)$$

При различном наборе констант интегрирования в (4) функция тока (2) будет обеспечивать кинематические картины течения как во внутренних (вихри Адамара-Рябчинского-Хилла, $c_2=c_3=0$), так и во внешних ($c_4=0$) областях. Для внутренних течений ускорение является консервативным вектором, и давление находится из полных уравнений

движения Навье-Стокса; в идеальном внешнем потоке ($c_2=0$) давление определено интегралом Бернулли, а во внешнем вязком оно находится из уравнений Стокса.

Ниже обсуждается проблема распространения отмеченных и других решений на случай замены сферы трехосным эллипсоидом. Сопротивление эллипсоида вращения при его медленном движении было найдено в [1] по теории ньютоновского потенциала притяжения. В [2] предпринята попытка определить сопротивление набегающему потоку вязкой жидкости трехосного эллипсоида при параллельности потока и одной из полуосей путем использования преобразования простого растяжения-сжатия, при котором сфера переводится в эллипсоид и наоборот.

В общем случае трехосный эллипсоид имеет бесконечно много сопротивлений, что зависит от его ориентации к набегающему потоку. Поэтому исследование выполняется в предположении, что орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат жестко связаны с главными центральными осями эллипсоида

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

который в тексте будет фигурировать в виде уравнения (при $\sigma=1$)

$$\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda_3}\right)^2 = \sigma^2, \lambda_1 = \frac{a}{L}, \lambda_2 = \frac{b}{L}, \lambda_3 = \frac{c}{L},$$

где L – линейный масштаб, используемый при обезразмеривании системы Навье-Стокса, а в качестве x, y, z участвуют теперь безразмерные координаты. Используется линейный переход от размерного радиуса-вектора \vec{r} к безразмерному

$$\vec{\sigma} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k} = \frac{x}{\lambda_1} \vec{i} + \frac{y}{\lambda_2} \vec{j} + \frac{z}{\lambda_3} \vec{k}$$

по схеме преобразования простого растяжения-сжатия

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = a \frac{x}{a} \vec{i} + b \frac{y}{b} \vec{j} + c \frac{z}{c} \vec{k} = L(\lambda_1 \xi \vec{i} + \lambda_2 \eta \vec{j} + \lambda_3 \zeta \vec{k}),$$

$$\frac{\vec{r}}{L} = \Lambda \vec{\sigma}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Особое внимание уделено нахождению решения системы:

$$\nabla p + \text{rot rot } \vec{v} = 0, \text{div } \vec{v} = 0, \text{rot rot rot } \vec{v} = 0 \quad (5)$$

в переменных вектора $\vec{\sigma}$ в области $1 \leq \sigma < \infty$ при условии прилипания $\vec{v}(1) = 0$. Необходимо отметить, что возможное решение в переменных ξ, η, ζ не является универсальным, что можно пояснить следующим примером. Линейное уравнение движения свидетельствует о том, что давление p является гармонической функцией. Но, например, функция

$$p = \xi \sigma^{-3} = \frac{x}{\lambda_1} \left(\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} + \frac{z^2}{\lambda_3^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

в пространстве ξ, η, ζ является гармонической и теряет это свойство в пространстве x, y, z , если $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ ($\nabla^2 p(\xi, \eta, \zeta) = 0, \nabla^2 p(x, y, z) \neq 0$). Из этого следует, что система (5) при $\vec{v}(\xi, \eta, \zeta), p(\xi, \eta, \zeta)$ не отражает законы гидромеханики в обычном понимании, и ее возможные решения при данной зависимости дают лишь приблизительную информацию о реальном явлении.

Обтекание эллипсоида. Скоростное поле и поле давления

Если эллипсоид находится под углом атаки, то скорость набегающего потока \vec{V} ($|\vec{V}| = 1$) удобно представить в виде разложения:

$$\vec{V} = V_1 \vec{i} + V_2 \vec{j} + V_3 \vec{k}, \quad V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 1.$$

С тем, чтобы удовлетворить уравнению несжимаемости, скоростное поле ищется в виде:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{1}{2} \text{rot}(f \vec{V} \times \vec{\sigma}), \quad f = f(\sigma), \quad \sigma^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

где $f(\sigma)$ выбирается из требования выполнения последнего уравнения системы (5).

Расшифровка операторов пространственного дифференцирования показывает, что

$$\vec{v} = \left(f + \frac{1}{2} \sigma f' \right) \vec{V} - \frac{1}{2} (\vec{\sigma} \vec{V}) \sigma^{-1} f' \vec{\sigma},$$

$$\text{rot } \vec{v} = -\frac{1}{2} (f'' + 4\sigma^{-1} f') \vec{V} \times \vec{\sigma},$$

$$\text{rot rot } \vec{v} = -\frac{1}{2} \left[(\sigma(f'' + 4\sigma^{-1} f')' + 2(f'' + 4\sigma^{-1} f')) \vec{V} - \right. \\ \left. - (\vec{\sigma} \vec{V}) \sigma^{-1} (f'' + 4\sigma^{-1} f')' \vec{\sigma} \right],$$

$$\text{rot rot rot } \vec{v} = \frac{1}{2} [(f'' + 4\sigma^{-1} f')'' + 4\sigma^{-1} (f'' + 4\sigma^{-1} f')'] \vec{V} \times \vec{\sigma},$$

$$\text{rot}(\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) = -\frac{1}{2} (\vec{\sigma} \vec{V}) \sigma^{-1} f' (f'' + 4\sigma^{-1} f')' \vec{V} \times \vec{\sigma}.$$

Теперь видно, что третье условие (5), соответствующее требованию (3), будет выполнено, если функция $f(\sigma)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(f'' + 4\sigma^{-1} f')'' + 4\sigma^{-1} (f'' + 4\sigma^{-1} f')' = 0,$$

что в общем случае приводит ее к представлению по (4). Заодно легко просматриваются варианты для исполнения полного уравнения Гельмгольца, получаемого после применения к первому соотношению из (1) операции ротирования.

Если при внешнем обтекании потребовать, чтобы при $\sigma = 1$ поверхность объекта (в пространстве x, y, z им служит эллипсоид, а в пространстве ξ, η, ζ – сфера) была поверхностью тока и на ней осуществлялось прилипание, а вдали от него было

$$\vec{v}(\infty) = \vec{V} \quad \left(\vec{v} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \neq \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

то (4) примет вид:

$$f' = 1 - \frac{3}{2} \sigma^{-1} + \frac{1}{2} \sigma^{-3},$$

а это приводит к тому, что скоростное поле представится равенствами:

$$\xi = V_1 \left(1 - \frac{3}{4} \sigma^{-1} - \frac{1}{4} \sigma^{-3} - \frac{3}{4} \xi^2 \sigma^{-3} (1 - \sigma^{-2}) \right) - \\ - \frac{3}{4} V_2 \xi \eta \sigma^{-3} (1 - \sigma^{-2}) - \frac{3}{4} V_3 \xi \eta \sigma^{-3} (1 - \sigma^{-2}), \\ \eta = -\frac{3}{4} V_1 \xi \eta \sigma^{-3} (1 - \sigma^{-2}) + \\ + V_2 \left(1 - \frac{3}{4} \sigma^{-1} - \frac{1}{4} \sigma^{-3} - \frac{3}{4} \eta^2 \sigma^{-3} (1 - \sigma^{-2}) \right) - \quad (6)$$

$$- \frac{3}{4} V_3 \eta \zeta \sigma^{-3} (1 - \sigma^{-2}),$$

$$\zeta = -\frac{3}{4} V_1 \xi \zeta \sigma^{-3} (1 - \sigma^{-2}) - \frac{3}{4} V_3 \eta \zeta \sigma^{-3} (1 - \sigma^{-2}) + \\ + V_3 \left(1 - \frac{3}{4} \sigma^{-1} - \frac{1}{4} \sigma^{-3} - \frac{3}{4} \zeta^2 \sigma^{-3} (1 - \sigma^{-2}) \right).$$

А поскольку теперь

$$\text{rot rot } \vec{v} = \frac{3}{2} (\sigma^{-3} \vec{V} - 3(\vec{\sigma} \vec{V}) \sigma^{-5} \vec{\sigma}) = \frac{3}{2} \nabla((\vec{\sigma} \vec{V}) \sigma^{-3}),$$

то из закона движения по Стоксу поле давления будет определено формулой

$$p = -\frac{3}{2} (\vec{\sigma} \vec{V}) \sigma^{-3}. \quad (7)$$

По форме система равенств (6) и (7) выглядит совершенно одинаково как для эллипсоида, так и для сферы. Но в первом случае надо читать:

$$\xi = \frac{x}{\lambda_1}, \eta = \frac{y}{\lambda_2}, \zeta = \frac{z}{\lambda_3} \left(\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, \zeta = \frac{z}{c} \right),$$

а во втором:

$$\xi = \frac{x}{R}, \eta = \frac{y}{R}, \zeta = \frac{z}{R},$$

где a, b, c, R – соответственно полуоси эллипсоида и радиус сферы. Вполне понятно, что при наличии только одной составляющей скорости набегающего потока, направленной вдоль оси эллипсоида, формулы упрощаются, а для сферы они воспроизводят известное [1] решение Стокса.

Еще раз следует отметить, что найденные поля (6) и (7) для обтекания эллипсоида не являются вполне достоверными, так как безразмерная система (5) при учете масштабов a, b, c будет выглядеть несколько по иному. Вопрос о степени достоверности найденного решения можно выяснить после вычисления сопротивления взятых объектов.

Сопротивление сферы и эллипсоида

Сопротивление состоит, как известно, из двух слагаемых – сопротивления от давления $\vec{F}(p) = -\int p d\vec{S}$ и сопротивления трения $\vec{F}(\gamma) = 2\int \gamma d\vec{S}$. Здесь через $d\vec{S}$ обозначен направленный по нормали поверхностный элемент объекта, а через γ – тензор скорости деформации, компоненты которого в силу отмеченных особенностей скоростного поля выглядят совершенно одинаково для сферы и эллипсоида. На самой поверхности (при $\sigma=1$) они запишутся в виде формул:

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\xi} &= \frac{3}{2} \xi (V_1(1-\xi^2) - V_2 \xi \eta - V_3 \xi \zeta), \\ \gamma_{\xi\eta} &= \frac{3}{4} (V_1 \eta (1-2\xi^2) + V_2 \xi (1-2\eta^2) - 2V_3 \xi \eta \zeta), \\ \gamma_{\xi\zeta} &= \frac{3}{4} (V_1 \zeta (1-2\xi^2) - 2V_2 \xi \eta \zeta + V_3 \xi (1-2\zeta^2)), \\ \gamma_{\eta\eta} &= \frac{3}{2} \eta (-V_1 \xi \eta + V_2(1-\eta^2) - V_3 \eta \zeta), \\ \gamma_{\eta\zeta} &= \frac{3}{4} (-2V_1 \xi \eta \zeta + V_2 \zeta (1-2\eta^2) + V_3 \eta (1-2\zeta^2)), \\ \gamma_{\zeta\zeta} &= \frac{3}{2} \zeta (-V_1 \xi \zeta - V_2 \eta \zeta + V_3(1-\zeta^2)). \end{aligned}$$

При этом давление на поверхности принимает значение:

$$p = -\frac{3}{2} \vec{\sigma} \vec{V} = -\frac{3}{2} (V_1 \xi + V_2 \eta + V_3 \zeta).$$

При производстве процедур по интегрированию необходимо учесть, что

$$\xi = \cos \theta, \eta = \sin \theta \cos \varphi, \zeta = \sin \theta \sin \varphi; 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

благодаря чему поверхностные элементы берутся в виде записей для сферы и эллипсоида соответственно

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= (\xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}) \sin \theta d\theta d\varphi, \\ d\vec{S} &= (\lambda_2 \lambda_3 \xi \vec{i} + \lambda_1 \lambda_3 \eta \vec{j} + \lambda_1 \lambda_2 \zeta \vec{k}) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Исполнение процедур по вычислению приводит к результатам для сферы

$$\vec{F}(p) = 2\pi \vec{V}, \vec{F}(\gamma) = 4\pi \vec{V}, \vec{F}(p, \gamma) = \vec{F}(p) + \vec{F}(\gamma) = 6\pi \vec{V}, (|\vec{V}|=1)$$

и для находящегося под углом атаки эллипсоида

$$\begin{aligned} \vec{F}(p) &= 2\pi (\lambda_2 \lambda_3 V_1 \vec{i} + \lambda_1 \lambda_3 V_2 \vec{j} + \lambda_1 \lambda_2 V_3 \vec{k}), \\ \vec{F}(\gamma) &= \frac{2}{5} \pi [(4\lambda_2 \lambda_3 + 3\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)) V_1 \vec{i} + \dots] \text{ (по циклу),} \\ \vec{F}(p, \gamma) &= \frac{6}{5} \pi [(3\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)) V_1 \vec{i} + \dots] \text{ (по циклу).} \end{aligned}$$

Итоговая информация в размерных величинах получается после умножения соответствующих выражений на размерные комплексы $\mu |\vec{V}_\infty| R, \mu |\vec{V}_\infty| L$, благодаря чему она фиксируется формулами:

$$\begin{aligned} \vec{F}(p, \gamma) &= 6\pi \mu R \vec{V}_\infty, \\ \vec{F}(p, \gamma) &= \frac{6}{5} \pi \frac{\mu}{L} \begin{bmatrix} (3bc + a(b+c)) V_{1\infty} \vec{i} + \\ + (3ac + b(a+c)) V_{2\infty} \vec{j} + \\ + (3ab + c(a+b)) V_{3\infty} \vec{k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

соответственно для сферы и эллипсоида. Для варианта обтекания без угла атаки, например, при $\vec{V}_\infty = V_\infty \vec{i}$ итоговые формулы понятным образом упрощаются и принимают вид:

$$X^* = 6\pi \mu R V_\infty, X_* = \frac{6}{5} \pi \frac{\mu V_\infty}{L} (3bc + a(b+c)). \quad (8)$$

Обычно сравнение сведений по сопротивлению производится путем введения эквивалентной сферы, радиус которой $R=R(a, b, c, L)$ получается в результате совпадения сил X и X^* из формул (8), что дает

$$LR_a = \frac{1}{5} [3bc + a(b+c)].$$

Индекс подчеркивает, в направлении какой из главных центральных осей инерции движется эллипсоид. Здесь масштаб обезразмеривания L остается неопределенным, и способы его выбора нуждаются в дополнительных обоснованиях. Наиболее простым (напрашивающимся) выбором этого линейного размера является равенство $L=R$, что влечет за собой

$$R_a^2 = \frac{1}{5} [3bc + a(b+c)], \quad (9)$$

здесь и далее предполагается, что полуось параллельна направлению набегающего потока.

Но следует заметить, что такой выбор размера L в случаях вырождения эллипсоида в пластины, когда преобразование координат перестает работать, вряд ли можно считать оправданным. Например, по теории потенциала притяжения известно [1], что предельные выражения для сил сопротивления плоского круглого диска (радиуса b), движущегося в направлениях, перпендикулярном своей плоскости и параллельном ей, соответственно равны

$$X = 16\mu bV, \quad X = \frac{32}{3} \mu bV,$$

что при сравнении с эквивалентной сферой означает

$$\frac{R}{b} = \frac{8}{3\pi} \approx 0,85, \quad \frac{R}{b} = \frac{16}{9\pi} \approx 0,57.$$

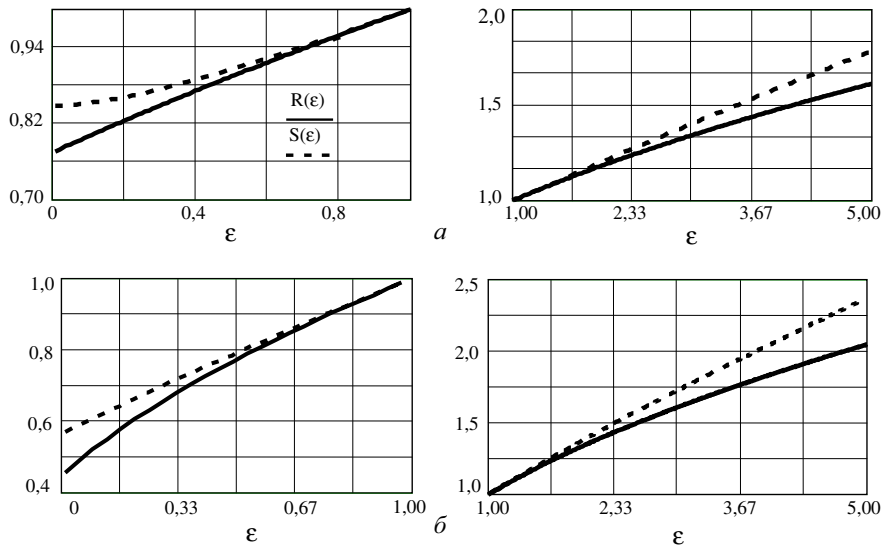


Рисунок. Отношение эффективного радиуса сопротивления к величине полуоси: а) поперечной направлению движения, б) параллельной направлению движения

В то время как из (9), в случае $a=0$ и $b=c$, соответствующем варианту движения диска перпендикулярно своей плоскости, имеем

$$\frac{R_a}{b} = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0,7746,$$

а при $a=b$ и $c=0$, что соответствует движению параллельно плоскости диска:

$$\frac{R_a}{b} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,4472.$$

Попутно можно отметить, что по [1] сопротивление диска при движении в ортогональном к своей плоскости направлении в полтора раза больше, чем в продольном, а по (9) это отношение составляет $\sqrt{3}=1,732$.

Подобно [3] для течения, параллельного оси симметрии (при $b=c$), введем отношение длины к диаметру $\varepsilon=a/c$. Из (9) отношение эффективного радиуса к величине поперечной полуоси будет

$$R = \frac{R_a}{c} = \sqrt{\frac{1}{5}(3+2\varepsilon)}. \quad (10)$$

Из [3] данная величина при $\varepsilon > 1$ равна:

$$S = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{-\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2-1} + \frac{2\varepsilon^2-1}{(\varepsilon^2-1)^{3/2}} \ln \left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right)} \right],$$

а при $\varepsilon < 1$:

$$S = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} + \frac{2(1-2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)} \right]. \quad (11)$$

На рисунке, а приведено сравнение формулы (9) с данными [3] при различных значениях ε при движении эллипсоида вдоль оси симметрии. В случае движения поперек направления оси симметрии следует положить $a=b$ и ввести $\varepsilon=c/a$. Тогда (9) дает

$$R = \frac{R_a}{a} = \sqrt{\frac{1}{5}(4\varepsilon+1)}. \quad (12)$$

Согласно [3] при $\varepsilon > 1$:

$$S = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2-1} + \frac{2\varepsilon^2-3}{(\varepsilon^2-1)^{3/2}} \ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2-1})} \right],$$

а при $\varepsilon < 1$:

$$S = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} - \frac{2\varepsilon^2-3}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \operatorname{arcsin}(\sqrt{1-\varepsilon^2})} \right]. \quad (13)$$

На рисунке, б приведено сравнение при различных значениях ε в случае движения тела поперек оси симметрии. Как видно, (9) дает всюду заниженные результаты при хорошем совпадении для тел, мало отличающихся от сферических. Следует отметить, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ формулы (10) и (11) соответствуют диску, движущемуся в потоке, перпендикулярном своей плоскости, а формулы (12) и (13) – диску, движущемуся параллельно своей плоскости.

Полученная информация о сопротивлении при значительных отличиях полуосей a, b, c от радиуса сферы R , существенно расходится с имеющимися теоретическими сведениями. Объясняется это, по-видимому, тем, что использованная система (5), записанная с применением изотропного обезразмеривания, некоторым образом отличается от той, которая получается при неизотропном обезразмеривании. Это обстоятельство приводит к тому, что введенная функция $f(\sigma)$ должна иным образом зависеть от аргументов ξ, η, ζ .

Заключение

Таким образом, решена задача о медленном обтекании эллипсоида, мало отличающегося от сферы, указана формула для расчета его сопротивления.

Использованные обозначения

\vec{v} – вектор скоростей, Eu – число Эйлера, Re – число Рейнольдса, p – давление, ψ – функция тока, θ – сферическая координата, φ – потенциал, a , b , c – полуоси эллипса, ξ , η , ζ – криволинейные координаты, x , y , z – декартовы координаты, μ – динамическая вязкость, X^* , X_s – силы сопротивления, $d\vec{S}$ – элемент поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
2. Дудин И.В., Нариманов Р.К. Сопротивление медленно движущегося в вязкой жидкости трехосного эллипсоида // Препринт № 37. – Томск: Изд-во ТГУ, 2000. – 11 с.
3. Хаппель Д., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.

УДК 536.46

К ВОПРОСУ НАХОЖДЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ МАРКШТЕЙНА

К.О. Сабденов

Томский политехнический университет
E-mail: sabdenov@k21.phtd.tpu.ru

На примере простой модели показано, что уравнения горения допускают решения со смещенными профилями температуры и участвующей в реакции горения концентрации вещества. Скорость искривленного пламени определяется однозначно, а длина Маркштейна оказывается существенно больше, чем в ранних теориях. Это позволяет, по меньшей мере, на порядок расширить область гидродинамической устойчивости по числу Рейнольдса.

Пытаясь объяснить, почему ламинарное пламя в газе устойчиво к гидродинамическим возмущениям Дж. Маркштейн предположил, что скорость пламени u_n зависит от кривизны K его фронта [1]. Когда фронт обращен выпуклой стороной к горючей смеси u_n уменьшается, а если вогнутой – увеличивается. Это означает, что изогнутый под действием возмущений фронт пламени стремится принять плоскую форму. В предположенной формуле Маркштейна

$$u_n = u_n^0(1 - l_M K), \quad (1)$$

где u_n^0 – скорость пламени с плоским фронтом, присутствует неопределенная величина l_M размерности длины (постоянная Маркштейна). Им же были сделаны первые попытки экспериментального определения этой величины. Дальнейшие теоретические поиски [2–5 и др.] приводили к выражению постоянной Маркштейна в виде отношения коэффициента температуропроводности газа κ на скорость u_n^0

$$l_M = \frac{\kappa}{u_n^0}. \quad (2)$$

Но в этом случае объяснение гидродинамической устойчивости пламени ограничено. Эксперименты показывают устойчивость пламени при числах Рейнольдса Re , по меньшей мере, на порядок превышающих критическое значение Re_{cr} , которое следует из формул (1) и (2).

Кроме указанного Маркштейном механизма, приводящего к устойчивости пламени, может иметь место случай ухода возмущений из рассматриваемой области горения [3]. Дело в том, что в экспериментах пламя, как правило, занимает ограниченное пространство (пламя горелки Бунзена или в трубе, свечи). Эти виды пламени имеют касательную составляю-

щую скорости газа к поверхности горения, благодаря чему гидродинамические возмущения или затухают на стенках, или уходят в свободное пространство из области горения прежде, чем они успевают заметно вырасти [3]. Но такие явления наблюдаются при достаточно больших числах Рейнольдса.

Механизм ухода возмущений не объясняет полностью наблюдающуюся гидродинамическую устойчивость пламени. Если основываться только лишь на таком механизме и на формулах (1, 2), то мы уже при относительно небольших числах Рейнольдса ($Re \sim 10 \dots 100$) должны были видеть пламя с непрерывно колеблющимся фронтом. В реальности это не имеет место: колебание фронта, свидетельствующее о наличии гидродинамической неустойчивости, возникает внезапно и при больших числах Рейнольдса ($Re \sim 10^3$).

Дальнейшие пути объяснения гидродинамической устойчивости пламени можно искать в самой теории ламинарного горения. Предложенные в работах [2–5] способы нахождения l_M , несмотря на их математическую строгость расчетов, не исключают существования других подходов. Дело в том, что если в теории Зельдовича-Франк-Каменецкого одномерного пламени с плоским фронтом его скорость движения определяется единственным образом [5], то скорость распространения искривленного пламени без привлечения дополнительного физического принципа не является однозначно определенной [6, 7]. Это обстоятельство приводит к неожиданному результату при исследовании не одномерной диффузионно-тепловой устойчивости пламени [8]. Использование известной [5] схемы анализа на основе формулы (1) и без привлечения